Numerik von Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2014
Übungsblatt 4

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten

Abgabe: Dienstag, 13.05.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 6 (Eigenfunktionen für eine elliptische und Reihenentwicklung für eine parabolische Gleichung)**.**

(a) Man bestimme die Eigenfunktionen $u_{n,m}(x,y)$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_{n,m}$ für $n,m \in \mathbb{N}$ der Eigenwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) =& \lambda u, \quad \text{für} \quad (x,y) \in \Omega = (0,1)^2, \\ u(x,y) =& 0, \quad \text{für} \quad (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

durch einen Produktansatz $u_{n,m}(x,y) = p_n(x)q_m(y)$.

(b) Man berechne eine formale Reihendarstellung der Form

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m} g_{n,m}(t) u_{n,m}(x,y)$$

für die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t =& \Delta u + au \quad \text{für} \quad (x,y) \in \Omega, t \geq 0, \\ u(x,y,0) =& u_0(x,y) \quad \text{für} \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y,t) =& 0 \quad \text{für} \quad (x,y) \in \partial\Omega, t \geq 0 \end{aligned}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante, und es sind geeignete von a und u_0 abhängige Funktionen $g_{n,m}$ zu bestimmen.

(c) Man zeichne die Partialsummen bis $N = 10, 50$ der formalen Reihe aus (b) zu den Zeitpunkten $t = 0.1, 1, 10$ für die Parameter $a = 0, 20$ und die Anfangsfunktion

$$u_0(x,y) = \begin{cases} 1 & x, y \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(12 Punkte)