Numerik von Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2014
Übungsblatt 7

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten

Abgabe: Dienstag, 03.06.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 11 (Eigenwerte und Stabilitätskriterien bei gemischten Randbedingungen)**.**
Seien λ_k die Eigenwerte und v^k, $k \in \mathbb{N}$, die zugehörigen Eigenfunktionen der Randeigenwertaufgabe (vgl.Aufgabe 5)

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x) \quad \text{für} \quad x \in (0,1), \\ u'(0) = 0, &\quad u(1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Sei $A_{\Delta x} u = \lambda u, u \in \mathbb{R}^{\Omega_{\Delta x}}$ die (durch Elimination am Rand entstehende) Diskretisierung von (1) zur Schrittweite $\Delta x = \frac{1}{M}$ auf dem Gitter $\Omega_{\Delta x} = \{x_j = j\Delta x : j = 0, \dots, M-1\}$. Man bestimme alle Eigenwerte $\lambda_{k,\Delta x}$ und zugehörigen Eigenvektoren $v^k_{\Delta x}, k = 1, \dots M-1$ von $A_{\Delta x}$. Ferner zeige man, dass für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ ein $C_k \geq 0$ existiert mit

$$|\lambda_k - \lambda_{k,\Delta x}| \leq C_k (\Delta x)^2 \quad \forall M > k.$$

(b) Man bestimme eine möglichst genaue obere Schranke für $\max\{\lambda_{k,\Delta x} : k = 0, \dots, M-1\}$ und daraus wie in der Vorlesung eine Schrittweitenbedingung an $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, die die Konvergenz des ϑ-Verfahrens ($\vartheta \in [0,1]$) bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{2,\infty}$ für die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{in } (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in (0,1) \\ u_x(0,t) &= \gamma_0(t), \quad u(1,t) = \gamma_1(t), \quad t \in (0,T) \end{aligned}$$

impliziert.

(6 Punkte)

Aufgabe 12 (Numerische Lösung einer nichtlinearen Reaktions-Diffusions-Gleichung)**.**
Lösen Sie die nichtlineare Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 10\frac{u}{1+u}, \quad x \in [0,1],\, t \in [0,1], \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in [0,1], \\ u(0,t) &= u_0(0),\ u(1,t) = u_0(1), \quad t \in [0,1], \end{aligned}$$

numerisch mit dem ϑ-Verfahren für $\vartheta = 0, \frac{1}{2}, 1$ mit den neuen Schrittweitenkombinationen

$$(\Delta x, \Delta t) = (0.2, 0.02), (0.2, 0.01), (0.1, 0.005), (0.1, 0.0025).$$

Verwenden Sie die beiden Anfangsfunktionen aus Aufgabe 8 und lösen Sie die bei den impliziten Verfahren auftretenden Gleichungssysteme, indem Sie das Newton-Verfahren anwenden und die Iteration mit der Näherung aus der vorigen Zeitschicht starten.
Zeichnen Sie die Näherungslösungen als Funktionen über einem (x,t)-Gitter, das aus grafischen Gründen in Zeitrichtung ausgedünnt wird.

(6 Punkte)