Numerik von Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2014
Übungsblatt 9

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten

Abgabe: Dienstag, 17.06.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 15 (Charakterisierung des Spektralradius)**.**
Für lineare stetige Operatoren $A \in L[X]$ in einem Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ wurde in der Vorlesung bewiesen

$$\hat{r}(A) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\|A^n\|\right)^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \left(\|A^n\|\right)^{1/n}. \tag{1}$$

Man zeige:

(i) Der Grenzwert in (1) ist für jede zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm derselbe,

(ii) $\hat{r}(A) = \inf\{\|A\|_* : \|\cdot\|_* \text{ ist eine zu } \|\cdot\| \text{ äquivalente Norm auf } X\}$.

(iii) Im reellen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $\|x + iy\|_{\mathbb{C}} := \max_{0 \le t \le 2\pi} \|\mathrm{Re}\,(e^{it}(x+iy))\|$ eine Fortsetzung von $\|\cdot\|$ auf die Komplexifizierung $X_{\mathbb{C}}$ von X mit der Eigenschaft $\|A_{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A\|$ für den komplexifizierten Operator $A_{\mathbb{C}}$ mit $A_{\mathbb{C}}(x+iy) = Ax + iAy,\ x, y \in X$.

Hinweis zu (ii): Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ betrachte man $\|x\|_* = \sum_{j=0}^{N-1} \|A^j x\| (\hat{r}(A) + \varepsilon)^{-j}$ mit geeignetem N.

(6 Punkte)

Aufgabe 16 (Numerische Lösung einer Reaktions-Diffusions-Gleichung mit Konvektion)**.**
Setzen Sie Aufgabe 14 fort durch Lösung der nichtlinearen Anfangsrandwertaufgabe mit Konvektion

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - \nu u_x - 10\frac{u}{1+u}, \quad x \in [0,1], t \in [0,1], \\ u(x,0) &= 1, \quad x \in [0,1], \\ u(0,t) &= 1,\ u(1,t) = 1, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Verwenden Sie das Crank-Nicolson Verfahren mit den Schrittweitenkombinationen

$$(\Delta x, \Delta t) = \left(\tfrac{1}{1000}, 2^{-j}\tfrac{1}{10}\right), \left(2^{-j}\tfrac{1}{10}, \tfrac{1}{1000}\right), \quad j = 0, \ldots, 6.$$

Schätzen sie die Konvergenzordnung p bzgl. Δx bzw. q bzgl. Δt aus jeweils drei aufeinanderfolgenden Schrittweiten unter Annahme einer Fehlerentwicklung an der Stelle $x = 0.5, t = 0.1$:

$$u_h(0.5, 0.1) = \bar{u}(0.5, 0.1) + C_1(\Delta x)^p + C_2(\Delta t)^q + \mathcal{O}((\Delta x)^{p+1} + (\Delta t)^{q+1}).$$

(6 Punkte)