Numerik von Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2014
Übungsblatt 10

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten

Abgabe: Dienstag, 24.06.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 17 (Eine Anfangsrandwertaufgabe mit periodischen Randbedingungen).
Gegeben sei eine Anfangsrandwertaufgabe mit Konvektion $\nu \in \mathbb{R}$ und periodischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_t =& u_{xx} - \nu u_x, x \in [0,1], t \geq 0, \\ u(x,0) =& u_0(x), \qquad x \in [0,1], \\ u(0,t) =& u(1,t), \qquad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda = \lambda_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{N})$ des periodischen Randwertproblems

$$u_{xx} - \nu u_x = \lambda u,\ x \in [0,1],\ u(0) = u(1),\ u_x(0) = u_x(1).$$

(ii) Stellen Sie das Liniensystem zu (1) in der Form

$$v' = A_{\Delta x} v, \quad v(0) = v^0, \quad v^0 \in \mathbb{R}^M,\ A_{\Delta x} \in \mathbb{R}^{M,M} \tag{2}$$

auf. Verwenden Sie die Schrittweite $\Delta x = M^{-1}$, zentrale Differenzen für u_{xx} und u_x an den Gitterpunkten $x_j = j\Delta x, j = 1, \ldots, M$ und eliminieren Sie v_0, v_{M+1} mittels der Diskretisierung der Randbedingungen durch $v_0 = v_M, v_1 = v_{M+1}$.

(iii) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_{k,\Delta x}, k = 1, \ldots, M$ und Eigenvektoren von $A_{\Delta x}$. Welche Bedingung ergibt sich aus der Forderung, dass $\Delta t \lambda_{k,\Delta x}, k = 1, \ldots, M$ im Bereich der absoluten Stabilität des ϑ-Verfahrens für (2) liegt ?

Hinweis: Sowohl in (i) wie in (iii) verwende man den Ansatz $u(x) = \exp(i\omega x)$ mit geeigneten $\omega \in \mathbb{R}$ für Eigenfunktionen auf $[0,1]$ bzw. auf dem Raumgitter.

(6 Punkte)

Aufgabe 18 (Bereich der absoluten Stabilität eines Mehrschrittverfahrens).
Für das lineare System

$$v' = Av, \quad v(0) = v^0, \quad A \in \mathbb{C}^{n,n}$$

sei das Mehrschrittverfahren

$$\frac{1}{\Delta t}(v^j - v^{j-1}) = \frac{3}{2} A v^{j-1} - \frac{1}{2} A v^{j-2}, \quad j \geq 2$$

gegeben. Diskutieren Sie den Bereich der absoluten Stabilität $G \subset \mathbb{C}$ dieses Mehrschrittverfahrens. Geben Sie eine Parametrisierung der Randkurve Γ von G an und berechnen Sie auf dieser Kurve die Punkte mit maximalem bzw. minimalem Realteil. Zeichnen Sie dann die Kurve numerisch und bestimmen Sie durch Auswahl spezieller Punkte, ob das Gebiet der absoluten Stabilität innerhalb bzw. außerhalb von Γ liegt.

(6 Punkte)