Numerik von Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2014
Übungsblatt 11

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten

Abgabe: Dienstag, 01.07.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 19 (Elemente von $H^{-1}(\Omega)$)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes im Hilbertraum $(H_0^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^1})$ zeige man, dass $f \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$ genau dann gilt, wenn es Funktionen $f_0, f_i \in L^2(\Omega), i = 1, \ldots, d$ gibt mit

$$\langle f, v\rangle = (f_0, v)_2 + \sum_{i=1}^{d} (f_i, D_i v)_2 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \tag{1}$$

Man zeige, dass sich im Fall $\Omega = (-1,1)^d$ das durch ein Oberflächenintegral definierte Funktional

$$\langle f, v\rangle = \int_{\{x\in\Omega: x_d = 0\}} v(x) do(x), \quad v \in C_0^\infty(\Omega),$$

zu einem $f \in H^{-1}(\Omega)$ fortsetzen lässt, und man gebe die Funktionen aus der Darstellung (1) für dieses Funktional an.

(6 Punkte)

Aufgabe 20 (Massen- und Steifigkeitsmatrix im nichtäquidistanten Fall)**.**
Gegeben seien ein (nicht notwendig äquidistantes) Gitter auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$\mathcal{G} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b\}$$

und die bzgl. $\mathcal{G}$ stückweise linearen Basisfunktionen

$$\varphi_j \in C([a,b],\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \varphi_j(x_k) = \delta_{j,k}, \quad j = 1, \ldots, N,\ k = 0, \ldots, N+1.$$

Man berechne die zugehörige Massenmatrix M und die Steifigkeitsmatrix A

$$M_{j,k} = \langle \varphi_j, \varphi_k\rangle_{L^2}, \quad A_{j,k} = \langle \varphi_j', \varphi_k'\rangle_{L^2}, \quad j, k = 1, \ldots, N.$$

Man zeige, dass M strikt diagonal dominant ist und M, A positiv definit sind. Im Falle eines äquidistanten Gitters bestimme man alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A und M.

(6 Punkte)