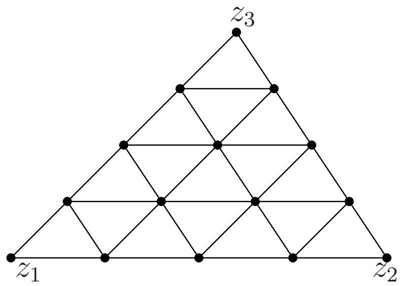
Numerik von Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2014
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten

Abgabe: Dienstag, 08.07.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.
Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 21 (Bestimmtheit von Lagrangeschen Dreieckselementen)**.**

Für das Lagrangesche Dreieeckselement vom Grad $k = 4$ (siehe Skizze) zeige man, dass die Punktfunktionale an den angegebenen 15 Knoten den Raum $\mathcal{P}_4(\mathbb{R}^2)$ bestimmen.



(6 Punkte)

Aufgabe 22 (Interpolation mit Lagrangeschen Dreieckselementen)**.**

Das Lagrangesche Element vom Grad k auf einem Dreieck $\triangle(z_1, z_2, z_3) \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch den Raum der Polynome $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^2)$ und Funktionale ψ_i, $i = 1, \ldots, \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. Die Funktionale werten dabei eine Funktion an den Knoten

$$(z_i,\ z_{i,j}\ (j = 1, \ldots, k-1))\ i = 1,2,3, \qquad s_{j,l}\ (1 \le l \le j \le k-2)$$

aus, wobei $z_{i,j}, j = 1, \ldots, k-1$ durch äquidistante Unterteilung der Strecke $\overline{z_i, z_{i+1}}$ (lies $i+1$ zyklisch in $\{1,2,3\}$) und $s_{j,l}$ durch Schnitt der Verbindungsstrecken $\overline{z_{1,j}, z_{2,k-j}}$ und $\overline{z_{2,l}, z_{3,k-l}}$ für $j = 1, \ldots, k-2$ und $l = 1, \ldots, k-1-j$ entstehen, für den Fall $k = 4$ vgl. die Skizze in Aufgabe 21.
Man schreibe ein Programm, welches diese Knoten berechnet und aus den Monomen $p_\alpha(x) = x^\alpha, x \in \mathbb{R}^2, |\alpha| \le k$ die nodale Basis zu den Punktfunktionalen konstruiert. Zeichnen Sie im Fall

$$k = 4,\ z_1 = (0,0),\ z_2 = (3,0),\ z_3 = (2,1) \tag{1}$$

die nodalen Basisfunktionen zu Punkten auf der Grundlinie und zu den inneren Punkten.
Berechnen Sie auf dem Dreieck (1) in den Fällen $k = 1, \ldots, 5$ das Lagrangesche Interpolationspolynom $v \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^2)$ der Funktion

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

und zeichnen Sie die Differenz $u - v$.

(6 Punkte)