

Im Fall $a_3 > 0$ ist das Gleichgewicht asymptotisch stabil. Für $a_3^2 > 4a_1a_2$ haben wir $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ und es liegt ein stabiler Knoten vor (siehe den folgenden § 1.3). Die Konvergenz zum Gleichgewicht ist oszillatorisch (komplexe EW'e) im Fall

$$a_3^2 < 4a_1a_2 \Leftrightarrow \rho(1 - (c + i\delta))^2 < \frac{4\iota\beta\bar{p}}{\alpha}.$$

Dies tritt insbesondere dann auf, wenn ρ sehr klein ist, wenn sich also die Produktion nur langsam dem Kapitalmarkt anpasst (siehe (1.12)). Andererseits ist das Gleichgewicht selbst (siehe (1.14)) von der Größe ρ völlig unabhängig.

1.3 Zweidimensionale Systeme

Es lohnt sich, die Ergebnisse aus Kapitel III, § 3.3 im Zusammenhang mit den asymptotischen Aussagen dieses Kapitels speziell für zweidimensionale reelle Systeme

$$(1.16) \quad u' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} u, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

zusammenzustellen. Die Eigenwerte von A sind

$$(1.17) \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (T \pm \sqrt{T^2 - 4D})$$

mit

$$(1.18) \quad T = a + d \quad (\text{Spur}), \quad D = \det A = ad - bc \quad (\text{Determinante}).$$

Im Fall $T^2 \neq 4D$ ist $\lambda_+ \neq \lambda_-$ und es liegt der diagonalisierbare Fall vor

$$(1.19) \quad A(z_+ \ z_-) = (z_+ \ z_-) \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren z_{\pm} sind für $4D < T^2$ reell und für $4D > T^2$ konjugiert komplex von der Form

$$(1.20) \quad z_{\pm} = x \pm iy, \quad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Im Fall $T^2 = 4D$ ist $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} T$ ein doppelter Eigenwert. Diagonalisierbar ist A dann nur noch im Fall

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\pm} = a.$$

In allen anderen Fällen ist A nicht diagonalisierbar und die Normalform ist

$$(1.21) \quad A(z_+ \ z_-) = (z_+ \ z_-) \begin{pmatrix} \lambda_+ & 1 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}, \quad \lambda_+ = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} (a + d)$$

wobei z_+ Eigenvektor zu λ_+ und z_- Hauptvektor zweiter Stufe zu $\lambda_+ = \lambda_-$ ist.

Für das Verhalten $t \rightarrow \infty$ der Lösungen ist entscheidend, in welchen Halbebenen von \mathbb{C} die Eigenwerte liegen, siehe das folgende Diagramm.

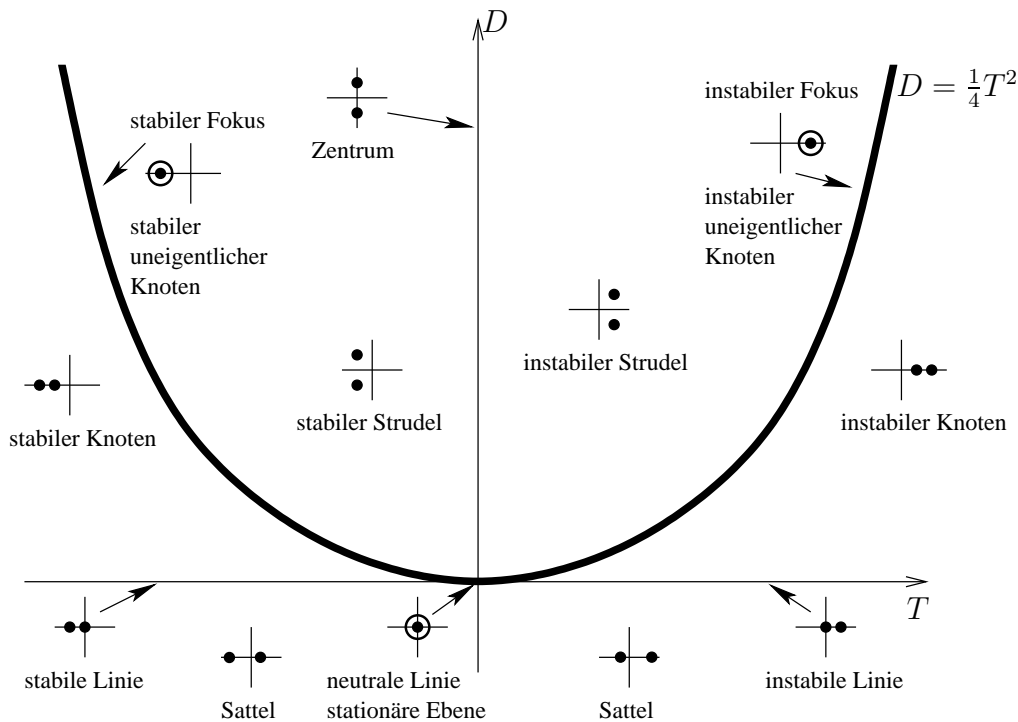


Abbildung 1.1:

Nach Satz 1.1 ist die Nulllösung genau dann asymptotisch stabil, wenn

$$(1.22) \quad T = a + d < 0, \quad D = ad - bc > 0$$

gilt. Zusätzlich ist sie nach Satz 1.3 stabil in den Fällen

$$T = 0, \quad D > 0 \quad \text{bzw.} \quad T < 0, \quad D = 0 \quad \text{bzw.} \quad A = 0.$$

Im Folgenden geben wir die Phasenbilder zu den einzelnen in Abbildung 1.1 bereits benannten Fällen an.

I Diagonalisierbarer Fall

Die Eigenvektoren seien z_{\pm} wie in (1.19).

Alle reellen Lösungen sind dann von der Form

$$(1.23) \quad u(t) = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} z_+ + \alpha_- e^{\lambda_- t} z_- = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} z_+ & e^{\lambda_- t} z_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_{\pm} \in \mathbb{R}$, falls $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$, und $\alpha_+ = \bar{\alpha}_- \in \mathbb{C}$ im komplexen Fall zu wählen sind.

1. Sattel $D < 0$, $\lambda_- < 0 < \lambda_+$

$$u(t) \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{falls } \alpha_+ \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Man beachte, dass für die Koordinaten im (z_+, z_-) Koordinatensystem gilt

$$(1.24) \quad e^{\lambda_- t} = (e^{\lambda_+ t})^{\lambda_- / \lambda_+},$$

wobei $\frac{\lambda_-}{\lambda_+} < 0$.

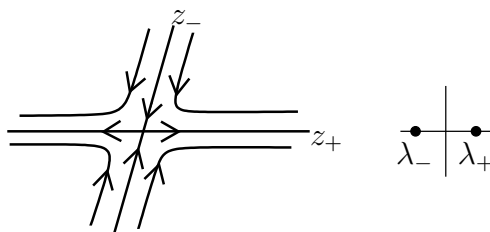


Abbildung 1.2:

2. Stabiler Knoten $0 < D < \frac{1}{4}T^2$, $T < 0$

Es gilt $u(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, und $\frac{\lambda_-}{\lambda_+} > 1$.

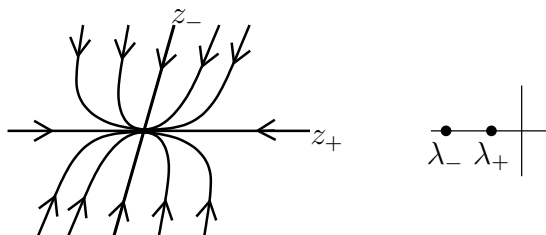


Abbildung 1.3:

3. Instabiler Knoten $0 < D < \frac{1}{4}T^2$, $T > 0$

Es gilt $u(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ falls $|\alpha_+| + |\alpha_-| > 0$. Außerdem ist $0 < \frac{\lambda_-}{\lambda_+} < 1$.

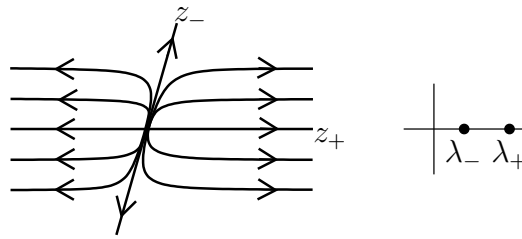


Abbildung 1.4:

4. Stabiler Strudel $\frac{1}{4}T^2 < D$, $T < 0$

Wie in (1.20) ist $z_{\pm} = x \pm iy$, $\lambda_{\pm} = \mu \pm i\omega$, $\mu = \frac{T}{2}$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - D}$.

Nach Kapitel III, § 3.4 sind die reellen Lösungen von der Form

$$(1.25) \quad e^{\mu t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

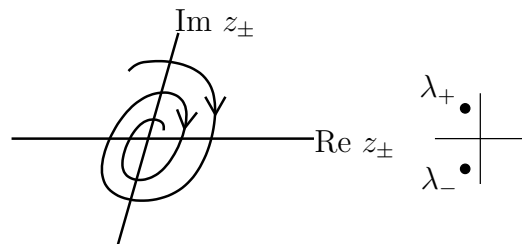


Abbildung 1.5:

Es gilt $u(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

5. Instabiler Strudel $\frac{1}{4}T^2 < D$, $T > 0$

Wir haben dieselben Lösungen wie in (1.25) nur mit $\mu = \frac{T}{2} > 0$.

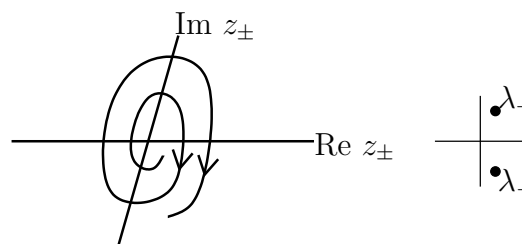


Abbildung 1.6:

6. Stabile Linie $D = 0, T < 0$

Für die Lösungen gilt wie in (1.23)

$$u(t) = \alpha_+ z_+ + \alpha_- e^{\lambda_- t} z_-, \quad \lambda_- < 0$$

und wir erhalten

$$u(t) \rightarrow \alpha_+ z_+ \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Alle Punkte in $\text{span}\{z_+\}$ sind stationär und stabil.

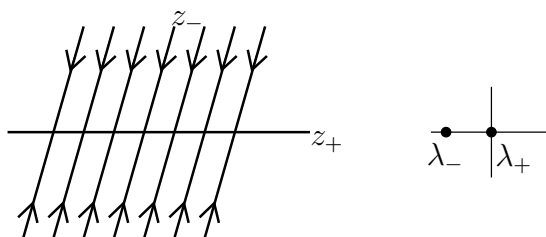


Abbildung 1.7:

7. Instabile Linie $D = 0, T > 0$

Jetzt gilt entsprechend

$$u(t) = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} z_+ + \alpha_- z_-$$

und

$$u(t) \rightarrow \infty \quad \text{falls } \alpha_+ \neq 0.$$

Alle Punkte in $\text{span}\{z_-\}$ sind stationär und instabil.

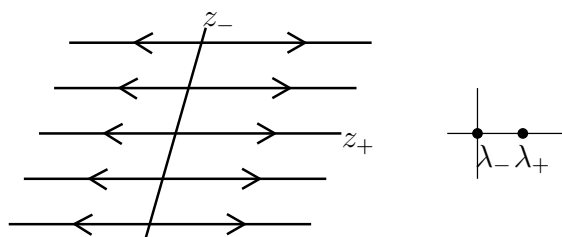


Abbildung 1.8:

8. Zentrum $D > 0, T = 0$.

Die Lösungen sind durch (1.25) mit $\mu = 0$ gegeben

$$u(t) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$u(t)$ ist periodisch mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und der Nullpunkt ist stabil.

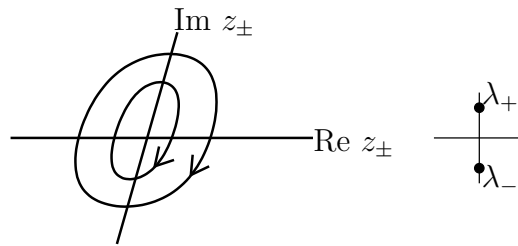


Abbildung 1.9:

9. Stabiler Fokus $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $T = 2a < 0$, $D = \frac{1}{4} T^2$

Die Lösungen haben die Form

$$(1.26) \quad u(t) = e^{at}(\alpha_+ z_+ + \alpha_- z_-) = e^{at} u(0)$$

und es gilt

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_+} = 1.$$

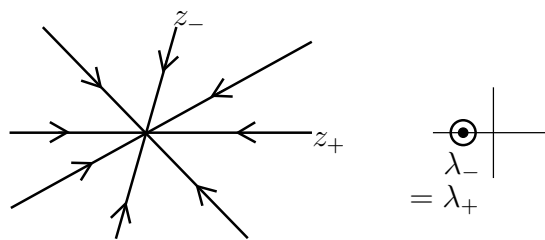


Abbildung 1.10:

10. Instabiler Fokus $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $T = 2a > 0$

Die Lösungen sind wieder durch (1.26) gegeben, wobei die Nulllösung jetzt instabil ist.

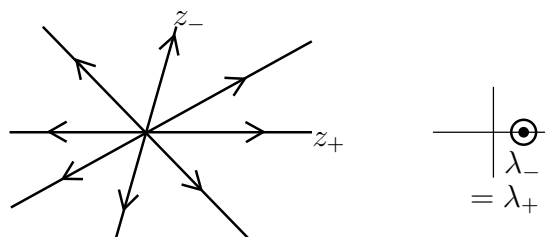


Abbildung 1.11:

11. Nullsystem $A = 0$, alle Punkte in \mathbb{R}^2 sind stationär und stabil.

II Nichtdiagonalisierbarer Fall

Jetzt ist $D = \frac{1}{2} T^2$ und $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} (a + d)$ ist algebraisch doppelter und geometrisch einfacher Eigenwert.

An die Stelle von (1.19) tritt (vgl. (1.21))

$$(1.27) \quad A \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

und die Lösungen sind von der Form

$$(1.28) \quad u(t) = \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = e^{\lambda t} ((\alpha + t\beta)z^1 + \beta z^2).$$

12. Uneigentlicher stabiler Knoten $D = \frac{1}{4} T^2$, $T < 0$

Es gilt $u(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Im (z^1, z^2) Koordinatensystem schreibt sich die erste Koordinate $\alpha_1 = e^{\lambda t}(\alpha + t\beta)$ als Funktion der zweiten $\alpha_2 = \beta e^{\lambda t}$ wie folgt:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\beta} \alpha_2 + \frac{\alpha_2}{\lambda} \ln \left(\frac{\alpha_2}{\beta} \right).$$

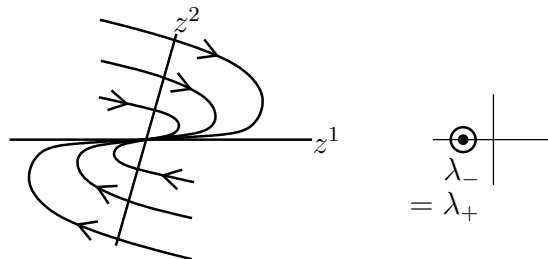


Abbildung 1.12:

13. Uneigentlicher instabiler Knoten $D = \frac{1}{4} T^2$, $T > 0$

Aus (1.28) folgt jetzt $|u(t)| \rightarrow \infty$, falls $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

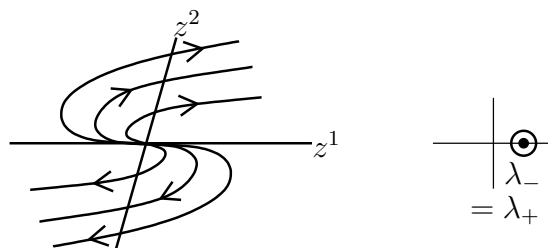


Abbildung 1.13:

14. Neutrale Linie $D = 0, T = 0$

Nach (1.28) haben wir die Lösungen

$$u(t) = z^1(\alpha - \beta t) + \beta z^2$$

und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty, \text{ falls } \beta \neq 0, \text{ und } u(t) = u(0) \quad \forall t, \text{ falls } \beta = 0.$$

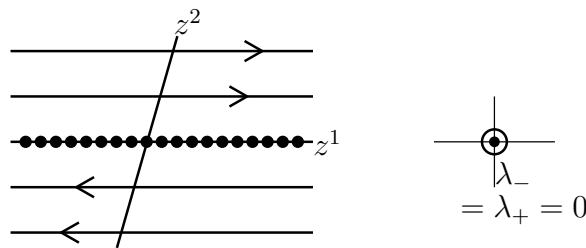


Abbildung 1.14:

1.4 Stabilität für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Wir kommen im Lichte der asymptotischen Aussagen von § 1.3 noch einmal auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung (siehe Kapitel III, (4.12)) zurück

$$(1.29) \quad Lu = u'' + au' + bu = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Sie lässt sich mittels $v = u'$ schreiben als

$$(1.30) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Die Aussagen von § 1.3 gelten also mit $T = -a$, $D = b$ und

$$(1.31) \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \text{vgl. Kapitel III, (4.13)}.$$

Die in Kapitel III, § 4 aufgeführten Fälle für $a, b \geq 0$ ordnen sich damit den folgenden Phasenbildern zu.

Fall 1: Stabiler Knoten (stark gedämpftes System)

$$0 < b < \frac{1}{4} a^2, \quad \lambda_- < \lambda_+ < 0.$$