

## 2. Beispiele und Grundbegriffe

2.1. Wandernde Wellen: Betrachte eine allg. Evolutionsgleichung in einer Raumdimension

(2.1)  $u_t = F(u)$ ,  $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,

wobei  $F$  einen linearen oder nichtlinearen Differentialoperator in  $\frac{d}{dx} = \partial_x$  bezeichne.

### Definition 2.1: (wandernde Welle)

Eine Lösung

$u_*: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(x,t) \mapsto u_*(x,t)$

Von (2.1) der Form

(2.2)  $u_*(x,t) = v_*(x - c_*t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$

heißt **wandernde Welle** mit **(Wellen-) Profil**  $v_*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  und **Geschwindigkeit**  $c_* \in \mathbb{R}$ . Falls zusätzlich die beiden Limes

(2.3)  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v_*(\xi) = v_- \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} v_*(\xi) = v_+ \in \mathbb{R}^m$

existieren, so nennen wir  $u_*$  eine **wandernde Front** falls  $v_- \neq v_+$ , und einen **wandernden Puls** (oder: eine **Solitärwelle**) falls  $v_- = v_+$ . Wir nennen  $u_*$  **nichttriviale** wandernde Welle, falls  $v_*$  nicht konstant ist.

Auffinden wandernder Wellen:

Betrachte anstelle von (2.1) die allgemeinere Form

(2.5)  $u_t = f(u, \partial_x u, \dots, \partial_x^k u)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,

wobei  $f: \mathbb{R}^{(k+1)m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  gegeben sei. Einfügen von

(2.6)  $u(x,t) = v(x - ct)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  (**wandernde Wellenansatz**)

in (2.5) liefert

$-cv'(x-ct) = f(v(x-ct), v'(x-ct), \dots, v^{(k)}(x-ct))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ .

Da die Gleichung für alle Argumente gelten muss, substituieren wir

$\xi := x - ct$  (**Wellenvariable**)

und erhalten eine gewöhnliche DGL  $k$ -ter Ordnung

$0 = cv'(\xi) + f(v(\xi), v'(\xi), \dots, v^{(k)}(\xi))$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$

Untdrückung der Argumente liefert

(TWODE)  $0 = cv' + f(v, v', \dots, v^{(k)})$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . (**wandernde Wellen ODE**)  
Von (2.5)

Beachte: Die Reduktion auf eine autonome ODE funktioniert nicht, wenn  $f$  explizit von  $x$  oder  $t$  abhängt, d.h.

$u_t = f(x,t,u, \partial_x u, \dots, \partial_x^k u)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ .

## 2.2. Beispiele linearer PDE's:

### Beispiel 2.2: (Advektionsgleichung)

Betrachte die **Advektionsgleichung** (oder: **lineare Transportgleichung**)

(2.7)  $u_t + au_x = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,

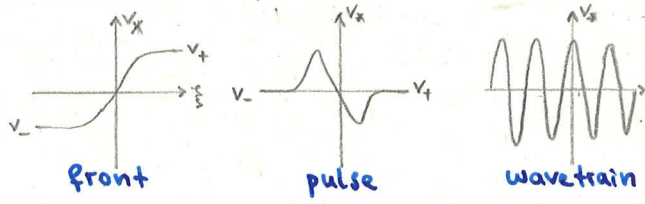
wobei  $0 \neq a \in \mathbb{R}$ . Die wandernde Wellen ODE von (2.7) lautet

$0 = cv' - av'$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Für  $v \neq \text{const}$  gilt  $v' \neq 0$  und wir erhalten  $c = a$ . Damit ist  $u_*: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$u_*(x,t) = v_*(x - c_*t)$

für jedes hinreichend glattes Profil  $v_*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (d.h.  $v_* \in C^1$ ) eine wandernde Welle von (2.7) mit Geschwindigkeit  $c_* = a$ .



Das zu (2.7) gehörige Cauchy Problem

(2.8)  $u_t + a u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$   
 $u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$  (Anfangsbedingung mit  $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

besitzt die Lösung  $u(x, t) = u_0(x - at), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$

Somit sind alle Lösungen von (2.8) wandernde Wellen.  
 Spezialfall: Ist  $u_0 = \text{const}$ , so ist  $u = \text{const}$  eine wandernde Welle von (2.7) für beliebige Geschwindigkeiten  $c \in \mathbb{R}$ .  
 Dies ist ein entarteter Fall, da  $v' = 0$ . Nichtkonstante Profile erfüllen  $v' = 0$  nicht. Ist  $v' \neq 0$  so nennen wir eine wandernde Welle  $u_*$  **nichttrivial**.

**Simulation !!!**

 $v_*(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \quad c_* = -1, 0, 1$

**Beispiel 2.3: (Wärmeleitungsgleichung)**

Betrachte die **Wärmeleitungsgleichung** (oder: **Diffusionsgleichung**)

(2.9)  $u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$

Die wandernde Wellen ODE von (2.9) lautet

$0 = c v' + v'' , \quad \xi \in \mathbb{R}.$

und besitzt die linear unabhängigen Lösungen

(2.10)  $v_1(\xi) = 1, \quad v_2(\xi) = e^{-c\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$   
 (konstant) (unbeschränkt)

Damit besitzt (2.9) keine beschränkten, nichttrivialen wandernden Wellen. Dies ändert sich im Falle nichtlinearer Wärmeleitungsgleichungen (siehe später).

**Beispiel 2.4: (Klein Gordon Gleichung)**

Betrachte die **Klein Gordon Gleichung**

(2.11)  $u_{tt} = a^2 u_{xx} - \mu^2 u, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$

wobei  $0 \neq a, \mu \in \mathbb{R}$ . Die Skalierung

$\tilde{u}(x, t) = u\left(\frac{a}{\mu} x, \frac{1}{\mu} t\right) \quad (\text{denn: } u(x, t) = \tilde{u}(y, s), \quad y = \frac{\mu}{a} x, \quad s = \mu t, \quad u_{tt} = \mu^2 \tilde{u}_{ss}, \quad u_{xx} = \frac{\mu^2}{a^2} \tilde{u}_{yy})$

transformiert (2.11) zu (wir unterdrücken die Tildes)

(2.12)  $u_{tt} = u_{xx} - u, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$

Anwenden von (2.6) auf (2.12) liefert die wandernde Wellen ODE (2. Ordnung!) von (2.12)

(2.13)  $0 = (c^2 - 1)v'' + v, \quad \xi \in \mathbb{R}.$

Mit dem charakteristischen Polynom

$p(\lambda) = (c^2 - 1)\lambda^2 + 1. \quad (p(\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \iff \lambda = \pm \sqrt{\frac{-1}{c^2 - 1}} \in \begin{cases} \mathbb{R}, & |c| < 1 \\ i\mathbb{R}, & |c| > 1 \end{cases})$

Für  $|c| = 1$  besitzt  $p(\lambda) = 0$  keine Lösungen. Für  $|c| \neq 1$  besitzt (2.13) die Fundamentallösungen

$v_1(\xi) = \begin{cases} \cosh(K\xi), & |c| < 1 \\ \cos(K\xi), & |c| > 1 \end{cases}, \quad v_2(\xi) = \begin{cases} \sinh(K\xi), & |c| < 1 \\ \sin(K\xi), & |c| > 1 \end{cases}$

wobei

(2.14)  $K := \frac{1}{\sqrt{|c^2 - 1|}}. \quad (\text{Wellenzahl})$

Für  $|c| < 1$  sind  $v_1$  &  $v_2$  unbeschränkt. Damit besitzt (2.12) für  $|c| < 1$  keine beschränkten, nichttrivialen wandernden Wellen.

Für  $|c| > 1$  sind  $v_1$  &  $v_2$  beschränkt & nichttrivial. Damit besitzt (2.13) die Familie beschränkter Lösungen

(2.15)  $v(\xi) = \alpha_1 \cos(K\xi) + \alpha_2 \sin(K\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}$  für  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$

Aus (2.6) & (2.15) erhalten wir die Familie beschränkter, nichttrivialer wandernder Wellen von (2.12)

(2.16)  $u(x, t) = \alpha_1 \cos(Kx - \omega(K)t) + \alpha_2 \sin(Kx - \omega(K)t), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$



wobei

$$\omega(k) := ck \stackrel{(2.14)}{=} \sqrt{k^2 + 1}. \quad (\text{Kreisfrequenz})$$

Die Gleichung

$$(2.17) \quad \omega(k)^2 = k^2 + 1 \quad (\text{Dispersionsrelation}) \quad \Leftrightarrow \quad ck =: \omega(k) \stackrel{(2.14)}{=} \frac{c}{\sqrt{|c^2 - 1|}}$$

beschreibt eine Beziehung zwischen der Wellengeschwindigkeit  $c$  und der Wellenfrequenz  $\omega(k)$ . Die wandernden Wellen (2.16) sind weder Fronten noch Pulse, da die Linien in (2.3) nicht existieren. Aufgrund ihrer räumlichen Periodizität bezeichnet man diese Lösungen als **Wellenzüge**. Sie besitzen zwar ein festes Profil, können aber mit beliebiger Geschwindigkeit  $c > 1$  und  $c < -1$  laufen

**Simulation !!!**

$$k = -1, 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, c = \frac{\omega(k)}{k}$$

**Beispiel 2.5: (Symmetrische hyperbolische Systeme)**

Betrachte das System 1. Ordnung (vgl. (2.7))

$$(2.18) \quad u_t + Au_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^m$  und  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Die wandernde Wellen ODE von (2.18) lautet

$$(A - cI_m)v' = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Jeder reelle Eigenwert  $\lambda$  mit reellem Eigenvektor  $w$  von  $A$

$$(2.19) \quad Aw = \lambda w, \quad \lambda \in \mathbb{R}, 0 \neq w \in \mathbb{R}^m$$

führt zu einer Lösung

$$(2.20) \quad v(\xi) = \alpha(\xi)w, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad \text{für jedes (nichttriviale) beschränkte } \alpha \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

und somit zu einer (nichttrivialen) wandernden Welle von (2.18)

$$(2.21) \quad u(x,t) = \alpha(x - \lambda t)w, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad c = \lambda.$$

Ist  $A$  reell diagonalisierbar, so besitzt  $A$  nur reelle Eigenwerte  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  mit reellem Eigenvektoren  $w_j \in \mathbb{R}^m, j=1, \dots, m$ . Somit hat (2.18) Lösungen der Form

$$(2.22) \quad u(x,t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(x - \lambda_j t)w_j, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad \text{für jedes beschränkte } \alpha_j \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(2.22) ist eine **Superposition** wandernder Wellen mit Geschwindigkeit  $\lambda_j$  in Richtung  $w_j$ .

Das zu (2.18) gehörige Cauchy Problem

$$\begin{aligned} u_t + Au_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{Anfangsbedingung mit } u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m)$$

besitzt die Lösung (2.22), wobei die  $\alpha_j$ 's aus der Zerlegung von  $u_0$  folgen

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(x)w_j, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ist  $A$  reell diagonalisierbar, d.h.

$$W^{-1}AW = \Lambda_A := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad \text{mit } W = (w_1 | \dots | w_m) \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

so liefert die Transformation von (2.18) via

$$\tilde{u}(x,t) = W^{-1}u(x,t)$$

das diagonale System (wir unterdrücken die Tilden)

$$u_t + \Lambda_A u_x = 0.$$

Dieses besteht aus  $m$  Advektionsgleichungen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten

$$u_t^{(j)} + \lambda_j u_x^{(j)} = 0, \quad j=1, \dots, m.$$

Das hyperbolische System (2.18) heißt **symmetrisch**, wenn es sich in ein diagonales System transformieren lässt.

**Simulation !!!**

$$m=2, \lambda_1=1, \lambda_2=\frac{1}{2}, w_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_1(x)=\alpha_2(x)=\frac{1}{2}\exp(-\frac{x^2}{2})$$

## 2.3. Wandernde Wellen in nichtlinearen parabolischen PDE's:

Betrachte das **nichtlineare System**

$$(2.23) \quad u_t = A u_{xx} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  und  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  invertierbar. Die wandernde Wellen ODE von (2.23) lautet, vgl. (TWODE)

$$(2.24) \quad 0 = A v'' + c v' + f(v), \quad f \in \mathbb{R}.$$

Wir suchen nach Lösungen  $v \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  mit, vgl. (2.3),

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v(\xi) = v_{\pm} \in \mathbb{R}^m, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v'(\xi) = v'_{\pm} \in \mathbb{R}^m.$$

Das nächste Lemma zeigt, dass dies

$$f(v_{\pm}) = 0, \quad v'_{\pm} = 0$$

impliziert.

### Lemma 2.6:

Die Transformation

$$w = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} \quad (w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, w_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, j=1,2)$$

überführt (2.24) in das  $2m$ -dimensionale System 1. Ordnung

$$(2.26) \quad w' = \begin{pmatrix} w_2 \\ -c A^{-1} w_2 - A^{-1} f(w_1) \end{pmatrix} =: G(w), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Für jede Lösung  $v \in C^2([0, \infty), \mathbb{R}^m)$  von (2.24) auf  $[0, \infty)$  mit

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} v(\xi) = v_+ \in \mathbb{R}^m, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} v'(\xi) = v'_+ \in \mathbb{R}^m$$

gilt  
(2.27a)  $f(v_+) = 0, \quad v'_+ = 0,$

Für jede Lösung  $v \in C^2((-\infty, 0], \mathbb{R}^m)$  von (2.24) auf  $(-\infty, 0]$  mit

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi) = v_- \in \mathbb{R}^m, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} v'(\xi) = v'_- \in \mathbb{R}^m$$

gilt  
(2.27b)  $f(v_-) = 0, \quad v'_- = 0.$

### Beweis: (Lemma 2.6)

• Transformation:

$$w_1' = v' = w_2$$

$$w_2' = v'' = \underset{(2.24)}{\underset{A \text{ inv.}}{-c A^{-1} v' - A^{-1} f(v)}} = -c A^{-1} w_2 - A^{-1} f(w_1).$$

• Aus

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = w_+ := \begin{pmatrix} v'_+ \\ v_+ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$$

folgt

$$\begin{aligned} |G(w_+)| &= \left| \int_x^{x+1} G(w_+) - \underbrace{G(w(\xi)) + w'(\xi)}_{=0} d\xi \right| \leq \int_x^{x+1} |G(w_+) - G(w(\xi))| d\xi + |w(x+1) - w(x)| \\ &\leq \sup_{\Delta|\xi| \geq x} |G(w_+) - G(w(\xi))| + |w(x+1) - w_+| + |w_+ - w(x)| \quad \forall x \in [0, \infty). \\ &\quad \xrightarrow[G \text{ stetig}]{\rightarrow 0, x \rightarrow \infty} \quad \xrightarrow{\rightarrow 0, x \rightarrow \infty} \quad \xrightarrow{\rightarrow 0, x \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

also  $G(w_+) = 0$  und somit, vgl. (2.26),  $v'_+ = 0$  und  $f(v_+) = 0$ . (2.27b) erfolgt ähnlich. ■

### Bemerkung:

Gilt  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  (d.h.  $\operatorname{Re} \lambda > 0 \quad \forall \lambda$  Eigenwert von  $A$ ), d.h. (2.23) ist **parabolisch**, so kann die Voraussetzung

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v'(\xi) = v'_{\pm} \in \mathbb{R}^m$$

in Lemma 2.6 weggelassen werden (vgl. Lemma 2.2b).



## Lemma 2.7: (Spiegelungssymmetrie)

Ist

$u_*(x,t) = v_*(x - c_*t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,  $v_*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $c_* \in \mathbb{R}$   
eine wandernde Welle von (2.23), so auch

$u^*(x,t) = v^*(x - c^*t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,  $v^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $c^* \in \mathbb{R}$

mit  
(2.28)  $v^*(\xi) := v_*(-\xi)$ ,  $c^* := -c_*$ .

Beweis: Übung. ■

Ab jetzt betrachten wir die **skalare nichtlineare Gleichung** (vgl. (2.23) mit  $m=A=1$ )

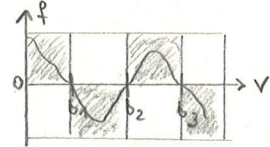
(2.29)  $u_t = u_{xx} + f(u)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ .

Die wandernde Wellen ODE von (2.29) lautet

(2.30)  $0 = v'' + cv' + f(v)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Für mögliche wandernde Wellen  $u_*$  von (2.29) müssen die Grenzwerte  $v_{\pm}$  des Profile  $v_*$  Nullstellen von  $f$  sein, d.h.  $f(v_{\pm}) = 0$  (vgl. Lemma 2.6). Im Folgenden habe  $f$  drei Nullstellen

(2.31)  $b_1 < b_2 < b_3$  und  $f(v) \begin{cases} > 0, & v < b_1 \text{ oder } b_2 < v < b_3 \\ < 0, & b_1 < v < b_2 \text{ oder } b_3 < v \end{cases}$



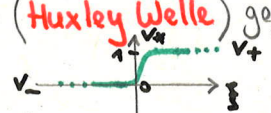
## Beispiel 2.8: (Nagumo Gleichung)

Betrachte die **Nagumo Gleichung**

(2.32)  $u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-b)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,

wobei  $0 < b < 1$ . Diese besitzt eine explizite wandernde Front  $u_*(x,t) = v_*(x - c_*t)$  (**Huxley Welle**) gegeben durch

(2.33)  $v_*(\xi) = \left(1 + \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\right)^{-1}$ ,  $c_* = -\sqrt{2}\left(b - \frac{1}{2}\right)$



mit **asymptotischen Zuständen**  $v_- = 0$  und  $v_+ = 1$ . Beachte:  $c_* < 0$ , falls  $b < \frac{1}{2}$  und  $c_* > 0$ , falls  $b > \frac{1}{2}$ .

**Simulation !!!**

- a)  $b = \frac{1}{4}$ ,  $c_* = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
- b)  $b = \frac{3}{4}$ ,  $c_* = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Nach Lemma 2.7 ist durch  $u^*(x,t) = v^*(x - c^*t)$  eine weitere wandernde Front von (2.32) gegeben mit

$v^*(\xi) = \left(1 + \exp\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\right)^{-1}$ ,  $c^* = -\sqrt{2}\left(b - \frac{1}{2}\right)$



und  $v_- = 1$ ,  $v_+ = 0$ .

Derartige Gleichungen mit 3 Nullstellen (Gleichgewichten) sind durch Populationsmodelle in der mathematischen Biologie motiviert, wie z.B. dem **spruce budworm model**

$u_t = ru\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1+u^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,

Für kubische Nichtlinearitäten  $f$ , die drei verschiedene Nullstellen  $b_1, b_2, b_3$  besitzt und sich wie  $-u^3$  (statt  $u^3$ ) verhält, lässt sich (2.29) in (2.32) transformieren, denn:

## Aufgabe 2.9:

Gegeben sei die allgemeine Gleichung

(2.34)  $u_t = Du_{xx} + B(u - b_1)(b_2 - u)(u - b_3)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,

wobei  $D, B > 0$ . Verwende die **lineare Transformation**  $u = \beta_1 \tilde{u} + \beta_2$  und die **zeitliche & räumliche Skalierung**  $\tilde{u}(x,t) = \hat{u}(\alpha_1 x, \alpha_2 t)$  und zeige, dass sich (2.34) auf (2.32) reduzieren lässt. Bestimmen Sie die Profile & Geschwindigkeit der wandernden Welle von (2.34)

## Lösung: (Aufgabe 2.9)

Lineare Transformation von (2.34) via  $u = \beta_1 \tilde{u} + \beta_2$  liefert

$\beta_1 \tilde{u}_t = u_t = Du_{xx} + B(u - b_1)(b_2 - u)(u - b_3) = D\beta_1 \tilde{u}_{xx} + B\beta_1^3 \left(\tilde{u} - \frac{b_1 - \beta_2}{\beta_1}\right) \left(\frac{b_2 - \beta_2}{\beta_1} - \tilde{u}\right) \left(\tilde{u} - \frac{b_3 - \beta_2}{\beta_1}\right)$

Die Forderungen  $\frac{b_1 - \beta_2}{\beta_1} \stackrel{!}{=} 0$  und  $\frac{b_3 - \beta_2}{\beta_1} \stackrel{!}{=} 1$  liefern  $\beta_2 = b_1$ ,  $\beta_1 = b_3 - \beta_2 = b_3 - b_1$ . Somit erhalten wir nach

Division durch  $\beta_1$   
 $\tilde{u}_t = D\tilde{u}_{xx} + B(b_3 - b_1)^2 \tilde{u}(1 - \tilde{u})(\tilde{u} - b)$ ,  $b = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$ .



Skalierung dieser Gleichung via  $\tilde{u}(x,t) = \hat{u}(\alpha_1 x, \alpha_2 t)$  liefert

$$\alpha_2 \hat{u}_t = \tilde{u}_t = D \tilde{u}_{xx} + B(b_3 - b_1)^2 \tilde{u}(1 - \tilde{u})(\tilde{u} - b) = \alpha_1^2 D \hat{u}_{xx} + B(b_3 - b_1)^2 \hat{u}(1 - \hat{u})(\hat{u} - b)$$

und Division durch  $\alpha_2$

$$\hat{u}_t = \underbrace{\frac{\alpha_1^2 D}{\alpha_2}}_{\stackrel{!}{=} 1} \hat{u}_{xx} + \underbrace{\frac{B(b_3 - b_1)^2}{\alpha_2}}_{\stackrel{!}{=} 1} \hat{u}(1 - \hat{u})(\hat{u} - b)$$

Die Forderungen  $\frac{\alpha_1^2 D}{\alpha_2} \stackrel{!}{=} 1$  und  $\frac{B(b_3 - b_1)^2}{\alpha_2} \stackrel{!}{=} 1$  liefern  $\alpha_2 = B(b_3 - b_1)^2$ ,  $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{D}} = \sqrt{\frac{B}{D}} \cdot (b_3 - b_1)$ . Somit geht die Gleichung über in (2.32).

Sei  $\hat{u}(x,t) = v_*(x - c_* t)$  eine wandernde Welle von (2.32), dann ist

$$u(x,t) = b_1 + (b_3 - b_1)v_*(\alpha_1 x - c_* \alpha_2 t)$$

eine wandernde Welle von (2.34) mit Profil

$$(2.35) \quad W_*(\xi) := b_1 + (b_3 - b_1)v_*(\alpha_1 \xi) \quad , \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{B}{D}}(b_3 - b_1)$$

und Geschwindigkeit

$$(2.36) \quad c_* := \frac{\alpha_2}{\alpha_1} c_* = \sqrt{\alpha_2 D} c_* = \sqrt{BD}(b_3 - b_1) c_* \stackrel{(2.33) \& \text{Def. von } b}{=} \sqrt{\frac{BD}{2}}(b_3 - b_1) \left( \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1} - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{\frac{BD}{2}}(-b_1 + 2b_2 - b_3)$$

Wir diskutieren nun einen allgemeinen Lösungsansatz zur Berechnung des Profils  $v_*$  und der Geschwindigkeit  $c_*$  aus (2.33) der wandernden Welle von (2.32):

Betrachte die wandernde Wellen ODE von (2.32):

$$(2.37) \quad 0 = v'' + cv' + v(1-v)(v-b)$$

Um eine Lösung von (2.37) zu finden, die  $v_- = 0$  und  $v_+ = 1$  verbindet, suchen wir nach Lösungen der ODE 1. Ordnung

$$(2.38) \quad v' = \alpha v(1-v) =: g(v)$$

mit noch zu bestimmenden Parameter  $\alpha > 0$ . Trennung der Veränderlichen liefert für (2.38) mit  $v(0) = \frac{1}{2}$  die Lösung

$$(2.39) \quad v_\alpha(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha \xi)} \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Einsetzen von (2.39) in (2.37) liefert wegen

$$v'_\alpha(\xi) = \alpha e^{-\alpha \xi} v_\alpha^2(\xi) \quad , \quad v''_\alpha(\xi) = \alpha^2 e^{-\alpha \xi} (e^{-\alpha \xi} - 1) v_\alpha^3(\xi) \quad , \quad g'(v_\alpha) v'_\alpha =$$

die Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} v''_\alpha + c v'_\alpha + v_\alpha(v_\alpha - b)(1 - v_\alpha) = g'(v_\alpha) v'_\alpha + c_* v'_\alpha - \frac{1}{\alpha} (b - v_\alpha) v'_\alpha = v'_\alpha \left( \underbrace{\left( \frac{1}{\alpha} - 2\alpha \right)}_{\stackrel{!}{=} 0} v_\alpha + \underbrace{\left( \alpha + c_* - \frac{b}{\alpha} \right)}_{\stackrel{!}{=} 0} \right)$$

Die Forderungen  $\frac{1}{\alpha} - 2\alpha \stackrel{!}{=} 0$  und  $\alpha + c_* - \frac{b}{\alpha} \stackrel{!}{=} 0$  liefern

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad c_* = \frac{b}{\alpha} - \alpha = \sqrt{2}(b - \frac{1}{2})$$

Dies zusammen mit (2.39) liefert (2.33). Wir fassen dieses Vorgehen zusammen:

**Proposition 2.10:**

Sei  $f \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  und  $g \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  erfülle

$$(2.40) \quad (Dg(v) + c I_m)g(v) + f(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$$

für ein  $c \in \mathbb{R}$ . Dann ist jede Lösung  $v \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$  von  $v' = g(v)$  auf  $I$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall) auch eine Lösung der wandernden Wellen ODE (2.30) auf  $I$ .

**Beweis: (Proposition 2.10)**

Differenziation von  $v' = g(v)$  bzgl.  $\xi \in I$  liefert wegen der Kettenregel & (2.40)

$$v'' \stackrel{(KR)}{=} Dg(v)v' \stackrel{v'=g(v)}{=} Dg(v)g(v) \stackrel{(2.40)}{=} -cg(v) - f(v) = -cv' - f(v) \quad , \quad \xi \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

**Bemerkung:**

Für die Nagumo Gleichung (2.32) haben wir zur Anwendung von Proposition 2.10 das folgende Setting verwendet

$$f(v) = v(1-v)(v-b) \quad , \quad g(v) = \alpha v(1-v) \quad , \quad \text{mit } \alpha, c \text{ derart dass (2.40) gilt.}$$

Skalarer Fall ( $m=1$ ): Falls  $g \in \mathcal{P}_L$  (Polynom vom Grad  $L$ ), so sollte  $f \in \mathcal{P}_{2L-1}$  gelten. (2.40) zeigt, dass jede Nullstelle von  $f$  entweder Nullstelle von  $g$  oder von  $g'(v) + c$  ist. Insbesondere können  $g$  und  $g'(v) + c$  keine weiteren Nullstellen besitzen.



# Aufgabe 2.11: (Quintische Nagumo Gleichung)

Betrachte die **quintische Nagumo Gleichung**

$$(2.41) \quad u_t = u_{xx} - \prod_{i=1}^5 (u - b_i), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ . Bestimmen Sie eine Beziehung der  $b_1, \dots, b_5$ , die die Berechnung einer wandernden Wellen Verbindung von  $b_1$  zu  $b_3$  oder von  $b_3$  zu  $b_5$  mithilfe der ODE 1. Ordnung ermöglicht.

## 2.4. Analyse der Phasenebilder von wandernden Wellen ODEs:

Wie wir in Lemma 2.6 gesehen haben treten wandernde Wellen als Orbits eines autonomen ODE auf, die zwei asymptotisch Zustände verbinden.

### Definition 2.12: (heterokliner/homokliner Verbindungsorbit)

Sei  $w \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  eine Lösung des dynamischen Systems

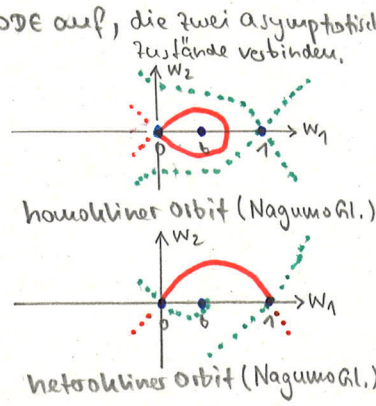
$$(2.42) \quad w' = G(w), \quad \text{wobei } G \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m),$$

derart, dass die folgenden Limes existieren

$$(2.43) \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w(\xi) = w_{\pm} \in \mathbb{R}^m. \quad (w_{\pm} \text{ heißen asymptotische Zustände})$$

Dann bezeichnen wir zu (2.42) gehörigen  $Q(w) := \{w(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$

als den **Verbindungsorbit** von  $w_-$  zu  $w_+$ . Der Verbindungsorbit heißt **heteroklin**, falls  $w_- \neq w_+$ , und **homoklin**, falls  $w_- = w_+$ .



Eine wandernde Welle  $u_*(x,t) = v_*(x - c_*t)$  von (2.23) mit Geschwindigkeit  $c_*$  und Profil  $v_*$ , das  $v_-$  mit  $v_+$  verbindet, entspricht somit einem zu (2.26) gehörigen Verbindungsorbit  $Q(w_*)$ ,  $w_* := \begin{pmatrix} v_* \\ c_* \end{pmatrix}$ , von  $w_- = \begin{pmatrix} v_- \\ c \end{pmatrix}$  zu  $w_+ = \begin{pmatrix} v_+ \\ c \end{pmatrix}$ , wobei  $c = c_*$ .

Beachte, dass neben dem Orbit (also  $w_*$ ) auch die Geschwindigkeit  $c_*$  unbekannt ist. Um beide aus (2.26) zu gewinnen, müssen wir  $c$  in (2.26) solange variieren, bis wir eine Lösung  $w_*$  von (2.26) gefunden haben, dessen Orbit  $w_-$  mit  $w_+$  verbindet. Einen solchen Verbindungsorbit zu finden, ist i. Allg. sehr schwierig, siehe Abschnitt 3.

Wir untersuchen nun wandernde Wellen von (2.23), wobei sich  $f$  als Gradient schreiben lässt, d.h.

$$(2.44) \quad f(v) = \nabla F(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \quad \text{für ein } F \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$$

### Proposition 2.13:

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  symmetrisch und erfülle  $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  die Eigenschaft (2.44). Weiter sei  $u_*(x,t) = v_*(x - c_*t)$  eine wandernde Welle von (2.23) mit Geschwindigkeit  $c_* \neq 0$  und Profil  $v_*$  mit  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v_*(\xi) = v_{\pm} \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist  $v_*' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  und es gilt

$$(2.45) \quad c_* \int_{-\infty}^{\infty} |v_*'(\xi)|^2 d\xi = F(v_-) - F(v_+).$$

### Beweis: (Proposition 2.13)

Multiplikation von (2.24) mit  $(v_*')^T$  und Integration über  $[-R, R]$  liefert

$$(2.46) \quad \int_{-R}^R v_*'(\xi)^T A v_*''(\xi) d\xi + c_* \int_{-R}^R |v_*'(\xi)|^2 d\xi = - \int_{-R}^R v_*'(\xi)^T \nabla F(v_*(\xi)) d\xi.$$

Partielle Integration und Symmetrie von  $A$  liefern

$$\int_{-R}^R v_*'(\xi)^T A v_*''(\xi) d\xi = - \int_{-R}^R \underbrace{v_*''(\xi)^T A v_*'(\xi)}_{= v_*'(\xi)^T A^T v_*''(\xi)} d\xi + \left[ v_*'(\xi)^T A v_*'(\xi) \right]_{\xi=-R}^R$$

also

$$\int_{-R}^R v_*'(\xi)^T A v_*''(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left( v_*'(R)^T A v_*'(R) - v_*'(-R)^T A v_*'(-R) \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Weiter ist die rechte Seite ein vollständiges Integral

$$\int_{-R}^R v_*'(\xi)^T \nabla F(v_*(\xi)) d\xi = \int_{-R}^R \frac{d}{d\xi} (F \circ v_*)(\xi) d\xi = F(v_*(R)) - F(v_*(-R)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} F(v_+) - F(v_-)$$

Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  in (2.46) liefert daher (2.45). Da  $c_* \neq 0$ , impliziert (2.45), dass  $v_*' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  gilt. ■



• Formel (2.45) besagt, dass

- $C_* > 0$ , falls  $F(v_-) > F(v_+)$ ,
- $C_* < 0$ , falls  $F(v_-) < F(v_+)$ ,
- $C_* = 0$ , falls  $F(v_-) = F(v_+)$ ,

jedoch können wir im Fall " $=$ " nicht  $v_* \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  schließen.

• Betrachte die **Skalare nichtlineare Gleichung** (2.29)

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

mit zugehöriger **wandernde Wellen ODE** (2.30)

$$0 = v'' + cv' + f(v), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

In diesem (skalaren) Fall gilt (2.44) mit dem **Potential**

$$(2.47) \quad F(y) := \int_0^y f(x) dx, \quad y \in \mathbb{R},$$

so dass Proposition 2.13 immer anwendbar ist. Es gilt:

$$\int_{v_-}^{v_+} f(x) dx = F(v_+) - F(v_-) \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \\ = 0 \end{matrix} \implies C_* \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{matrix}.$$

### Beispiel 2.14: (Nagumo Gleichung)

Betrachte die **Nagumo Gleichung** (2.32)

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-b), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $0 < b < 1$ . Für

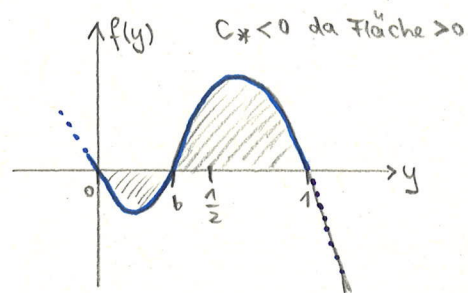
$$f(u) = u(1-u)(u-b)$$

erhalten wir nach (2.47) das Potential

$$F(y) = \int_0^y f(x) dx = -\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}(b+1)y^3 - \frac{1}{2}by^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Mit den Gleichgewichtswerten  $v_- = 0, v_+ = 1$  liefert Proposition 2.13

$$F(v_+) - F(v_-) = \int_{v_-}^{v_+} f(x) dx = \frac{1}{12}(1-2b) \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \\ = 0 \end{matrix} \iff b \begin{matrix} > \frac{1}{2} \\ < \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2} \end{matrix} \implies C_* \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{matrix}, \text{ vgl. (2.33).}$$



### Klassifizierung der Gleichgewichte:

Um die Gleichgewichte im skalaren Fall (2.30) zu charakterisieren, transformieren wir (2.30) mittels

$w = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$  in das **2-dimensionale System 1. Ordnung**

$$(2.48) \quad w' = \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ -f(w_1) - cw_2 \end{pmatrix} =: G(w)$$

(\*)  $w_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  ein Gleichgewicht von (2.48), d.h.  $G(w_0) = 0$ . Die **Linearisierung** von (2.48) an  $w_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  lautet

$$(2.49) \quad w' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(v_0) & -c \end{pmatrix} w = DG(w_0)w. \quad (DG(w_0) \text{ Jacobi-Matrix})$$

Wegen

$$\det(DG(w_0) - \lambda I_2) = \lambda^2 + c\lambda + f'(v_0)$$

lauten die Eigenwerte von  $DG(w_0)$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(v_0)}).$$

Die Lage der Eigenwerte in der komplexen Ebene entscheidet über den **Typ und die Stabilität des Gleichgewichtes**. (Siehe Einschub)

Source  
Sink  
Saddle

Do solutions decay to zero as  $t \rightarrow \infty$

(\*) Ist  $v_0 \in \mathbb{R}$  ein Gleichgewicht von (2.30), d.h.  $f(v_0) = 0$ , so ist



Betrachte das 2-dimensionale reelle System

$$u' = Au, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (T \pm \sqrt{T^2 - 4D})$$

Mit

$$T = a + d \quad (\text{Spur})$$

$$D = ad - bc = \det A \quad (\text{Determinante})$$

In Abhängigkeit von  $T$  und  $D$  (also in Abh. von der Lage der Eigenwerte) klassifizieren wir das Lösungsverhalten für  $t \rightarrow \infty$  die Gleichgewichte, also

(a) **Senke (sink)**:  $D > 0$  &  $T < 0$

- **stabiler Knoten (stable node)**:  $D < \frac{1}{4} T^2$
- **stabiler Fokus (stable focus)**:  $D = \frac{1}{4} T^2$
- **stabiler Strudel (stable vortex, spiral in)**:  $D > \frac{1}{4} T^2$

(b) **Quelle (source)**:  $D > 0$  &  $T > 0$

- **instabiler Knoten (unstable node)**:  $D < \frac{1}{4} T^2$
- **instabiler Fokus (unstable focus)**:  $D = \frac{1}{4} T^2$
- **instabiler Strudel (unstable vortex, spiral out)**:  $D > \frac{1}{4} T^2$

(c) **Sattel (saddle)**:  $D < 0$  &  $T \in \mathbb{R}$

- (d)
- **instabile Linie**:  $D = 0, T > 0$
  - **neutrale Linie**:  $D = 0, T = 0$
  - **stabile Linie**:  $D = 0, T < 0$
  - **Zentrum**:  $D > 0, T = 0$

Die Nulllösung ist

(a) **asymptotisch stabil**:  $T < 0$  &  $D > 0$  (Senke)

- (b) **stabil**:
- $T = 0$  &  $D > 0$  (Zentrum)
  - $T < 0$  &  $D = 0$  (stabile Linie)
  - $A = 0$

2. Fall:  $(c^2 - 4f'(v_0) < 0)$ . Es gilt  $\lambda_{\pm} = \mu \pm i\omega$  ( $\mu = -\frac{1}{2}c$ ,  $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4f'(v_0) - c^2}$ )

Wir unterscheiden 3 Fälle:

- $\text{Re } \lambda = \mu > 0$  :  $w_0$  heißt **spiral out**
- $\text{Re } \lambda = \mu = 0$  : " " **center**
- $\text{Re } \lambda = \mu < 0$  : " " **spiral in**

$T = -c$   
 $D = f'(v_0)$

3. Fall:  $(c^2 - 4f'(v_0) = 0)$ . Es gilt  $\lambda_{+} = \lambda_{-} = -\frac{1}{2}c$ . (**Limiting case**)

**Lemma 2.15:**

Sei  $v_0 \in \mathbb{R}$  ein Gleichgewicht von (2.30), dann ist das Gleichgewicht  $w_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  von (2.48)

- (i) : ein Sattel, falls  $f'(v_0) < 0$
- (ii) : eine Senke, falls  $f'(v_0) > 0$  und  $c > 0$
- (iii) : eine Quelle, falls  $f'(v_0) > 0$  und  $c < 0$

**Bemerkung:**

(a) In den Grenzfällen

- $f'(v_0) = 0$  ( $\Rightarrow \lambda_{-} = -c, \lambda_{+} = 0$ )  $c > 0$  stabile Linie  $c = 0$  neutrale Linie  $c < 0$  instabile Linie
- $f'(v_0) > 0, c = 0$  ( $\Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm \frac{1}{2}i\sqrt{4f'(v_0)}$ ) Zentrum

Liegen Eigenwerte auf der imaginären Achse. Daher genügt die Linearisierung hier nicht zur Typeneinteilung des Gleichgewichtes. Im Falle

- $f'(v_0) = 0, c < 0$  (instabile Linie)

Lässt sich (zumindest) zeigen, dass  $w_0$  instabil ist. Im Fall  $c^2 - 4f'(v_0) < 0$  sind die Eigenwerte komplex. Es gilt

- $c^2 - 4f'(v_0) < 0, c > 0 \Rightarrow w_0$  ist spiral in
- $c^2 - 4f'(v_0) < 0, c < 0 \Rightarrow w_0$  ist spiral out

(b) Das qualitative Phasendiagramm in der Nähe eines Gleichgewichtes bleibt beim Übergang vom linearen zum nichtlinearen Fall erhalten, vorausgesetzt es liegen keine Eigenwerte auf der imaginären Achse.

**Beispiel 2.16: (Fisher Gleichung)**

Betrachte die **Fisher Gleichung**

(2.50)  $u_t = u_{xx} + u(1-u), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$

$f(u) = u(1-u), \quad f'(u) = 1-2u$

Mit der **wandernde Wellen ODE**

$0 = v'' + cv' + v(1-v), \quad \xi \in \mathbb{R}$

und den **Gleichgewichten**

$v_0 = 0, v_1 = 1$  mit  $f'(v_0) = 1, f'(v_1) = -1$ .

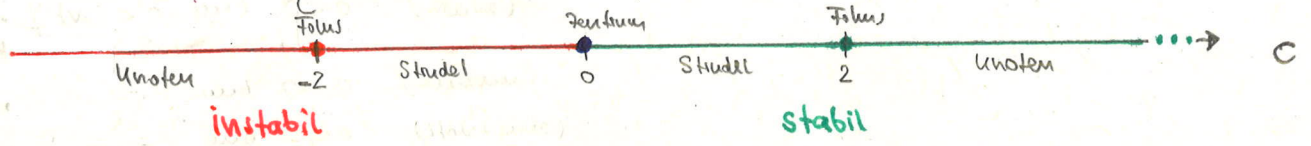
Für die Gleichgewichte

$w_{-} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_{+} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

des zugehörigen 2-dimensionalen Systems 1. Ordnung (2.48) folgt aus Lemma 2.15:

$w_{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist ein Sattel (da  $D = f'(v_1) < 0$ )

$w_{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist	{	ein stabiler Knoten	$c > 2$	(da $D = f'(v_0) > 0$ )	}	Senke
		ein stabiler Fokus	$c = 2$			
		ein stabiler Strudel	$0 < c < 2$			
		ein Zentrum	$c = 0$			
		ein instabiler Strudel	$-2 < c < 0$			
		ein instabiler Fokus	$c = -2$			
		ein instabiler Knoten	$c < -2$			
					}	Quelle





## Verbindungsorbit von $W_-$ zu $W_+$ :

Sei (wegen Lemma 2.7) o.B.d.A.  $c < 0$ . Da (2.50) ein Populationsmodell beschreibt, betrachten nur Lösungen  $v$  mit  $v(\xi) \geq 0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . Das Phasenbild zeigt, dass die stabile Mannigfaltigkeit von  $W_+$  aus einem instabilen Knoten / instabilen Sattel bei  $v_-$  entsteht. Die Positivitätsbedingung an  $v$  schiebt den Fall eines instabilen Sattels ( $-2 < c < 0$ ) aus. Damit erhalten wir eine Familie von Verbindungsorbits  $v(\cdot; c)$  für  $c \leq -2$ . Das Phasenbild zeigt, dass der instabile Knoten in Richtung des Eigenvektors verlässt, der zum kleinsten Eigenwert gehört, d.h.

$$y_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_- = \frac{1}{2}(-c - \sqrt{c^2 - 4})$$

Im kritischen Fall  $c = -2$  gilt  $\lambda_- = \lambda_+ = 1$ .

## 2.5. Beispiele nichtlinearer Wellengleichungen:

### Beispiel 2.17: (Sine-Gordon Gleichung)

Betrachte die **Sine-Gordon Gleichung**

(2.51)  $u_{tt} = u_{xx} - \sin u$  ,  $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ .

Diese besitzt die explizite **wandernde Welle**

(2.52)  $u(x,t) = v(x-ct)$  ,  $v(\xi) = 4 \arctan\left(\exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right)$  ,  $\xi \in \mathbb{R}, 0 \leq |c| < 1$  (**1-soliton**)

Die **wandernde Wellen ODE** von (2.51)

(2.53)  $0 = (1-c^2)v'' - \sin v$  ,  $\xi \in \mathbb{R}$

besitzt die **Gleichgewichte**

(2.54)  $v_n = n\pi$  ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Transformation von (2.53) via  $W = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$  liefert das **2-dimensionale System 1. Ordnung**

(2.55)  $W' = \begin{pmatrix} v_2 \\ \frac{1}{1-c^2} \sin v_1 \end{pmatrix} =: G(W)$  ,  $\xi \in \mathbb{R}$

mit den **Gleichgewichten**

$W_n = \begin{pmatrix} v_n \\ 0 \end{pmatrix}$  ,  $v_n$  aus (2.54).

Die **Linearisierung** von (2.55) bei  $W = W_n$  lautet

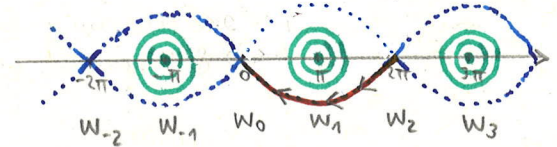
$W' = DG(W_n)W$  ,  $\xi \in \mathbb{R}$  mit  $DG(W_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{1-c^2} \cos v_n & 0 \end{pmatrix}$ .

Die Matrix  $DG(W_n)$  besitzt die **Eigenwerte** (da  $0 \leq c^2 < 1$ )

$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (T \pm \sqrt{T^2 - 4D})$  mit  $T = 0$  ,  $D = -\frac{1}{1-c^2} \cos v_n = \begin{cases} -\frac{1}{1-c^2} & n \text{ gerade} < 0 \\ \frac{1}{1-c^2} & n \text{ ungerade} > 0 \end{cases}$

Somit sind die Gleichgewichte entweder **Sattel** oder **Zentren**

$W_n$  ist ein  $\begin{cases} \text{Sattel} & , n \text{ gerade} \\ \text{Zentrum} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$  ,  $n \in \mathbb{Z}$



### Verbindungsorbit von $W_2$ zu $W_0$ :

Eine explizite Lösung  $v$  von (2.53) liefert die **Energiemethode**: Multiplikation von (2.53) mit  $v'$  liefert

$\left(-\frac{1}{2}(1-c^2)(v')^2\right)' = -(1-c^2)v''v' = -(\sin v)v' = (\cos v)'$  , (2.53)

und Integration bzgl.  $\xi$

(2.56)  $\frac{1}{2}(1-c^2)(v')^2 + \cos v = \text{const}$   $\forall \xi \in \mathbb{R}$

Die Lösung  $v$  soll folgende Eigenschaften aufweisen

$v(\xi) \rightarrow 0$  ,  $v'(\xi) \rightarrow 0$  für  $\xi \rightarrow \infty$   
 $v(\xi) \rightarrow 2\pi$  ,  $v'(\xi) \rightarrow 0$  für  $\xi \rightarrow -\infty$

Der Grenzübergang  $\xi \rightarrow \infty$  in (2.56) impliziert  $\text{const} = 1$ . Somit lässt sich (2.56) umschreiben in

(2.57)  $(v')^2 = \frac{2}{1-c^2} (1 - \cos v)$  ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Da  $(v')^2 \geq 0$  und  $(1 - \cos v) \geq 0$ , muss  $0 \leq |c| < 1$  gelten. Lösen wir (2.57) mittels Trennung des Veränderlichen unter Berücksichtigung des Grenzübergangs  $\xi \rightarrow -\infty$ , so erhalten wir das **Profil** (=den **Verbindungsorbit**)

$v(\xi) = 4 \arctan\left(\exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right)$  ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Wie wir in (2.56) gesehen haben, besitzt (2.53) eine **Erhaltungsgröße**

$E(v, v') := \frac{1}{2}(1-c^2)(v')^2 + \cos v$

Das Phasendiagramm besteht daher aus Niveaulinien von  $E$ . Neben homoklinen Orbits existieren hier auch periodische Orbits, die zu den Wellenzügen (wave trains) führen.



## Beispiel 2.18: (Korteweg-de Vries (KdV) Gleichung)

Betrachte die Korteweg-de Vries Gleichung

$$(2.58) \quad u_t = -uu_x - u_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

mit der wandernden Wellen ODE

$$(2.59) \quad 0 = cv' - \frac{1}{2}(v^2)' - v''', \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Profils:

Integration von (2.59) liefert

$$(2.60) \quad -v'' + v(c - \frac{1}{2}v) = -v'' - cv - \frac{1}{2}v^2 = \text{const}$$

Die Lösung  $v$  soll folgende Eigenschaften aufweisen

$$v(\xi) \rightarrow 0, \quad v''(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{für } \xi \rightarrow \pm\infty$$

Der Grenzübergang  $\xi \rightarrow \pm\infty$  in (2.60) impliziert  $\text{const} = 0$ . Somit lässt sich (2.60) umschreiben in

$$(2.61) \quad v'' = v(c - \frac{1}{2}v) =: f(v), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Gleichung (2.61) besitzt die Erhaltungsgröße

$$E(v, v') = \frac{1}{2}(v')^2 + P(v) \quad \text{mit } P(v) = - \int f(s) ds = -\frac{c}{2}v^2 + \frac{1}{6}v^3$$

Hierbei bezeichnet  $P$  das Potential mit  $P' = f$ . Transformation von (2.61) via  $W = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$  liefert das 2-dimensionale System 1. Ordnung

$$W' = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1(c - \frac{1}{2}w_1) \end{pmatrix} = G(w)$$

Dies besitzt einen homoklinen Orbit  $W$ , mit

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} W(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieser Orbit entspricht dem Energielevel  $E(v) = 0$  und ist für  $c > 0$  explizit gegeben durch

$$v(\xi) = 3c \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Damit besitzt (2.58) die explizite wandernde Welle

$$u(x,t) = v(x-ct), \quad v(\xi) = 3c \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi\right), \quad \xi \in \mathbb{R}, c > 0. \quad (\text{solitary waves})$$

## 2.6. Wandernde Wellen in parabolischen Systemen

### Beispiel 2.19: (FitzHugh-Nagumo System)

Betrachte das 2-dimensionale FitzHugh-Nagumo System

$$(2.62) \quad u_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} u_{xx} + \begin{pmatrix} u_1 - \frac{1}{3}u_1^3 - u_2 \\ \varepsilon(u_1 + a - bu_2) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^2$  und  $\beta, a, b, \varepsilon > 0$ . Gleichung (2.62) besitzt für die Parameter

$$\beta = 0.1, \quad a = 0.7, \quad \varepsilon = 0.08, \quad b = 3 \quad \text{eine wandernde Front}$$

und für

$$\beta = 0.1, \quad a = 0.7, \quad \varepsilon = 0.08, \quad b = 0.8 \quad \text{einen wandernden Puls}$$

In beiden Fällen gibt es weder für das Profil noch für die Geschwindigkeit eine explizite Darstellung. Lediglich Approximationen der Geschwindigkeit  $c_*$  liegen uns vor

$$c_* \approx -0.8557 \quad (\text{Front}), \quad c_* \approx -0.7892 \quad (\text{Puls}).$$

Beachte: Für kleine  $b$  besitzt (2.62) nur ein Gleichgewicht, für große  $b$  hingegen drei Gleichgewichte.

Das folgende Lemma verbessert die Aussage aus Lemma 2.6: Ist  $v$  eine Lösung der wandernden Wellen ODE (2.24) mit

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v(\xi) = v_{\pm} \in \mathbb{R}^m,$$

so liefert eine Anwendung des folgenden Lemmas (für  $h(\xi) = -f(v(\xi))$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ )

$$f(v_{\pm}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v'(\xi) = 0.$$

## Lemma 2.20:

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  mit  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  (d.h.  $\operatorname{Re} \lambda > 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$ ). Weiter sei  $v \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  und  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung von

$$(2.63) \quad Av'' + cv' = h, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

wobei  $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  und

$$(2.64) \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} h(\xi) = h_{\pm} \in \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v(\xi) = v_{\pm} \in \mathbb{R}^m.$$

Dann gilt

$$(2.65) \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} h(\xi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v'(\xi) = 0.$$

### Beweis: (Lemma 2.20)

Es genügt, die Aussage für  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  zu zeigen (für  $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$  folgt sie dann durch Spiegelung).

Multiplikation von (2.63) von links mit  $A^{-1}$  liefert ( $A^{-1}$  existiert, da  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ )

$$(2.66) \quad v'' + cA^{-1}v' = A^{-1}h =: \Gamma, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

wobei für  $\Gamma \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  wegen (2.64) gilt

$$(2.67) \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Gamma(\xi) = A^{-1}h_+ =: \Gamma_+ \in \mathbb{R}^m.$$

Transformation von (2.66) via  $W = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$  liefert das 2-dimensionale System 1. Ordnung

$$(2.68) \quad W' = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ 0 & -cA^{-1} \end{pmatrix} W + \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung von (2.66) ist von der Form

$$(2.69) \quad v(\xi) = \alpha_1 v_1(\xi) + \alpha_2 v_2(\xi) + v_3(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad v_i \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m), \quad i=1,2,3,$$

wobei  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$  die **allgemeine Lösung** der **homogenen Aufgabe** (2.66) &  $v_3$  eine **spezielle Lösung** der **inhomogenen Aufgabe** (2.66) bezeichnet. D.h. die Matrix (**Wronski-Matrix**)

$$W = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}$$

bildet ein Fundamentalsystem von (2.68) für  $\Gamma = 0$ . Im Folgenden konstruieren wir  $v_3$  derart, dass

$$(2.70) \quad v_3(\xi) = \int_0^{\xi} G(\xi, \eta) \Gamma(\eta) d\eta, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

für eine geeignete Green'sche Matrix  $G$ . Ferner zeigen wir unter Verwendung der Beschränktheit von  $v$  (d.h.  $v \in C^2 \cap C_b$ ), dass  $v_3$  der dominante Teil in (2.69) ist, d.h.  $|v_3(\xi)| \rightarrow \infty$  für  $\xi \rightarrow \infty$ , falls  $\Gamma_+ \neq 0$ .

### 1. Fall: ( $c > 0$ )

Wähle

$$(2.71) \quad v_1(\xi) = I_m, \quad v_2(\xi) = A \exp(-cA^{-1}\xi),$$

$$G(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{c} A (I_m - \exp(-cA^{-1}(\xi - \eta))) & , 0 \leq \eta \leq \xi, \\ 0 & , \xi < \eta, \end{cases}$$

dann bilden  $v_1, v_2$  ein Fundamentalsystem von  $v'' + cA^{-1}v' = 0$

$$v_1, v_2 \text{ lin. unabh.}, \quad v_1' + cA^{-1}v_1 = 0 + cA^{-1}0 = 0, \quad v_2' + cA^{-1}v_2 = \underbrace{[-cA^{-1}]^2 + cA^{-1}(-cA^{-1})}_{=0} A \exp(\dots) = 0$$

und  $v_3$  aus (2.70) löst (2.66) mit  $v_3(0) = v_3'(0) = 0$

Es gilt

$$\operatorname{Re} \sigma(A) > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \sigma(A^{-1}) > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \sigma(-A^{-1}) < 0$$

daher

$$\exists \beta_1 > 0 : \operatorname{Re} \sigma(-A^{-1}) \leq -\beta_1 < 0.$$

und somit (vgl. NDS)

$$(2.72) \quad \exists C \geq 1 : |\exp(-\tau A^{-1})| \leq C \exp(-\beta_1 \tau) \leq C, \quad \tau \geq 0.$$

Da  $v_1, v_2$  beschränkt sind, ist  $v_3$  nach (2.69) ebenfalls beschränkt. **Annahme:**  $\Gamma_+ \neq 0$ . Wir zeigen

$$|v_3(\xi)| \geq C\xi \quad \text{für große } \xi,$$

was einen Widerspruch zur Beschränktheit von  $v_3$  liefert. Sei  $\varepsilon > 0$ , dann wähle  $\xi_\varepsilon > 0$  so groß, dass (vgl. (2.67))

$$(2.73) \quad |\Gamma(\eta) - \Gamma_+| \leq \varepsilon \quad \forall \eta \geq \xi_\varepsilon.$$



Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 |V_3(\xi)| &= \left| \int_0^{\xi} G(\xi, \eta) r(\eta) d\eta + \int_{\xi}^{\xi} G(\xi, \eta) (r(\eta) - r_+) d\eta - \int_{\xi}^{\xi} G(\xi, \eta) r_+ d\eta \right| \\
 &\stackrel{(2.71)}{\geq} \left| \int_{\xi}^{\xi} G(\xi, \eta) r_+ d\eta \right| - \left| \int_0^{\xi} G(\xi, \eta) r(\eta) d\eta \right| - \left| \int_{\xi}^{\xi} G(\xi, \eta) (r(\eta) - r_+) d\eta \right| \\
 &\stackrel{\text{umgeh. } \Delta\text{'s-Ungl.}}{\geq} \underbrace{\left| \int_{\xi}^{\xi} G(\xi, \eta) r_+ d\eta \right|}_{\substack{(2.71) \\ \& \text{Stetigkeit}}} - \underbrace{\left| \int_0^{\xi} G(\xi, \eta) r(\eta) d\eta \right|}_{\substack{(2.71) \\ \& \text{Stetigkeit}}} - \underbrace{\left| \int_{\xi}^{\xi} G(\xi, \eta) (r(\eta) - r_+) d\eta \right|}_{\substack{(2.71) \\ \& \text{Stetigkeit}}} \\
 &\leq \int_0^{\xi} |G(\xi, \eta)| |r(\eta)| d\eta \leq \int_{\xi}^{\xi} |G(\xi, \eta)| |r(\eta) - r_+| d\eta \\
 &\stackrel{(2.71)}{\leq} \frac{2c|A|}{c} \leq \|r\|_{\infty} \leq \varepsilon \stackrel{(2.73)}{\leq} \varepsilon \\
 &= \frac{(\xi - \xi)c}{c} A r_+ - \frac{A^2}{c^2} \left( I_{\infty} - \exp(-cA^{-1}(\xi - \xi)) \right) r_+ \stackrel{(2.71)}{\leq} \frac{2c|A|}{c} \leq \|r\|_{\infty} \leq \varepsilon \stackrel{(2.73)}{\leq} \varepsilon \\
 &\stackrel{\text{umgeh. } \Delta\text{'s-Ungl.}}{\geq} \frac{(\xi - \xi)c}{c} |A r_+| - \frac{|A|^2}{c^2} \|r_+\| - \frac{|A|^2}{c^2} \underbrace{|\exp(-cA^{-1}(\xi - \xi))|}_{\leq c \exp(-\beta_1 c (\xi - \xi))} \|r_+\| \leq c \\
 &\stackrel{c > 0}{\geq} \frac{(\xi - \xi)c}{c} \left[ |A r_+| - 2c|A|\varepsilon \right] - \underbrace{\frac{2c|A|^2}{c^2} \|r_+\|}_{=: K_2} - \underbrace{\frac{2c|A|}{c} \|r\|_{\infty} \xi}_{=: K_3} \\
 &\geq c K_1 \\
 &\text{falls } \varepsilon \leq \frac{|A r_+| - K_2}{2c|A|} \text{ f\u00fcr ein } K_1 > 0 \text{ (\varepsilon hinr. klein)} \\
 &\geq K_1 (\xi - \xi) \\
 &\geq K_1 \left( \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \xi - \xi \right) - K_2 - K_3 \xi \geq \frac{K_1}{2} \xi \quad \forall \xi \geq \xi_0 \\
 &\geq \xi \varepsilon + \frac{K_3}{K_1} \xi \varepsilon + \frac{K_2}{K_1} =: \frac{\xi_0}{2} \\
 &\quad (\xi \text{ hinreichend gro\u00df})
 \end{aligned}$$

Folglich ist  $v_3$  unbeschr\u00e4nkt  $\nabla$  zur Beschr\u00e4nktheit von  $v_3$ , demnach gilt  $r_+ = 0$  (d.h.  $h_+ = 0$ ). Es bleibt die zweite Eigenschaft in (2.65) zu zeigen.

Aus (2.69) und (2.71) erhalten wir

$$v'(\xi) = \alpha_2 v_2'(\xi) + v_3'(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$|v_2'(\xi)| = c |\exp(-cA^{-1}\xi)| \leq c \exp(-\beta_1 c \xi) \quad \forall \xi \geq 0 \Rightarrow |v_2'(\xi)| \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty$$

und

$$\begin{aligned}
 |v_3'(\xi)| &= \left| \int_0^{\xi} \exp(-cA^{-1}(\xi - \eta)) r(\eta) d\eta \right| \\
 &\stackrel{\Delta\text{'s-Ungl.}}{\leq} \int_0^{\xi/2} \underbrace{|\exp(-cA^{-1}(\xi - \eta))|}_{\leq \exp(-\beta_1 c (\xi - \eta))} \|r(\eta)\| d\eta + \int_{\xi/2}^{\xi} \underbrace{|\exp(-cA^{-1}(\xi - \eta))|}_{\leq \exp(-\beta_1 c (\xi - \eta))} \underbrace{\|r(\eta)\|}_{\leq \sup_{\eta \geq \xi/2} \|r(\eta)\|} d\eta \\
 &\leq \|r\|_{\infty} c \int_0^{\xi/2} \exp(-\beta_1 c (\xi - \eta)) d\eta + \left( \sup_{\eta \geq \xi/2} \|r(\eta)\| \right) c \int_{\xi/2}^{\xi} \exp(-\beta_1 c (\xi - \eta)) d\eta \\
 &= \frac{1}{\beta_1 c} \left[ \exp(-\beta_1 c (\xi - \eta)) \right]_{\eta=0}^{\xi/2} = \frac{1}{\beta_1 c} \left[ \exp(-\beta_1 c \xi) - \exp(-\beta_1 c \xi/2) \right] \\
 &= \frac{c \|r\|_{\infty}}{\beta_1 c} \left( \underbrace{\exp(-\frac{\beta_1 c}{2} \xi)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\exp(-\beta_1 c \xi)}_{\rightarrow 0} \right) + \frac{c}{\beta_1 c} \left( \sup_{\eta \geq \xi/2} \|r(\eta)\| \right) \underbrace{\left( 1 - \exp(-\frac{\beta_1 c}{2} \xi) \right)}_{\rightarrow 1} \quad \forall \xi \geq 0 \\
 &\quad \rightarrow \|r_+\| = 0 \quad \rightarrow 1 \quad (\text{da } c, \beta_1 > 0)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |v_3'(\xi)| \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty$$

gilt

$$v'(\xi) = \alpha_2 v_2'(\xi) + v_3'(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty$$

also die zweite Eigenschaft in (2.65).

## 2. Fall: (c=0)

Wähle

(2.74)

$$V_1(\xi) = I_m, \quad V_2(\xi) = \xi I_m$$

$$G(\xi, \eta) = \begin{cases} (\xi - \eta) I_m, & 0 \leq \eta \leq \xi \\ 0, & \eta > \xi \end{cases}$$

Annahme:  $\Gamma_+ \neq 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , dann wähle  $\xi_\varepsilon > 0$  so groß, dass (2.73) erfüllt ist. Dann gilt

$$|V_3(\xi)| \geq \left| \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi} (\xi - \eta) \Gamma_+ d\eta \right| - \left| \int_0^{\xi_\varepsilon} (\xi - \eta) \Gamma(\eta) d\eta \right| - \left| \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi} (\xi - \eta) (\Gamma(\eta) - \Gamma_+) d\eta \right|$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \xi\eta - \frac{1}{2}\eta^2 \right]_{\eta=\xi_\varepsilon}^{\xi} \Gamma_+ \leq \int_0^{\xi_\varepsilon} (\xi - \eta) \|\Gamma(\eta)\| d\eta \leq \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi} (\xi - \eta) \|\Gamma(\eta) - \Gamma_+\| d\eta \\ &= \left( \xi^2 - \frac{1}{2}\xi^2 - \xi\xi_\varepsilon + \frac{1}{2}\xi_\varepsilon^2 \right) \Gamma_+ \leq \left[ \xi\eta - \frac{1}{2}\eta^2 \right]_{\eta=0}^{\xi_\varepsilon} \|\Gamma\|_\infty \leq \frac{1}{2} (\xi - \xi_\varepsilon)^2 \varepsilon \\ &= \frac{1}{2} (\xi - \xi_\varepsilon)^2 \Gamma_+ = \left( \xi\xi_\varepsilon - \frac{1}{2}\xi_\varepsilon^2 \right) \|\Gamma\|_\infty \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2} (\xi - \xi_\varepsilon)^2 (\Gamma_+ - \varepsilon) - \xi_\varepsilon (\xi - \frac{1}{2}\xi_\varepsilon) \|\Gamma\|_\infty$$

$\geq 2K_1$   
falls  $\varepsilon \leq \Gamma_+ + 2K_1$  für ein  $K_1 > 0$

$$\geq K_1 (\xi - \xi_\varepsilon)^2 - \xi_\varepsilon (\xi - \frac{1}{2}\xi_\varepsilon) \|\Gamma\|_\infty$$

$$= \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi - \xi_\varepsilon \left[ \begin{array}{l} \leq \frac{1}{2}\xi = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi - \xi_\varepsilon \\ \geq \frac{1}{2}\xi \end{array} \right] \geq 0$$

falls  $\xi \geq 2\xi_\varepsilon$

$$\geq \left[ \frac{K_1}{4} + \frac{\|\Gamma\|_\infty}{4} \right] \xi^2 \quad \forall \xi \geq 2\xi_\varepsilon$$

folglich wächst  $V_3$  für große  $|\xi|$  quadratisch und somit stärker als  $\alpha_1 V_1(\xi) + \alpha_2 V_2(\xi) = (\alpha_1 + \alpha_2 \xi) I_m$  mit linearem Wachstum. Damit ist  $V_3$  unbeschränkt  $\nabla$  zur Beschränktheit von  $V_3$ , demnach gilt  $\Gamma_+ = 0$  (also  $h_+ = 0$ ). Es bleibt die zweite Eigenschaft in (2.65) zu zeigen. Wegen  $c=0$  besitzt (2.65) die einfache Form  $v'' = r$ . Daher sei fortan o.B.d.A.  $u=1$ .

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists \theta_n \in [n, n+1] : v(n+1) - v(n) = v'(\theta_n)$$

Aus (2.64) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = v_+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v(n+1) = v_+$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v'(\theta_n) = v_+ - v_+ = 0.$$

$$[\theta_n, \xi] \subseteq [n, n+1] \quad \xi - \theta_n \in [0, 1]$$

$$\leq \sup_{\eta \in [n, n+1]} |v''(\eta)| \leq 1$$

Daraus erhalten wir für  $\xi \in [n, n+1]$ :

$$|v'(\xi)| \leq \underbrace{|v'(\xi) - v'(\theta_n)|}_{\text{vec}^2 \& \text{HDI}} + |v'(\theta_n)| \leq \underbrace{\sup_{\eta \in [\theta_n, \xi]} |v''(\eta)|}_{\leq 1} |\xi - \theta_n| + |v'(\theta_n)|$$

$$\leq \int_{\theta_n}^{\xi} |v''(\eta)| d\eta \leq (\sup_{\eta \in [\theta_n, \xi]} |v''(\eta)|) |\xi - \theta_n|$$

$$\leq \sup_{\eta \in [n, n+1]} |v''(\eta)| + |v'(\theta_n)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also gilt  $|v'(\xi)| \rightarrow 0$  für  $\xi \rightarrow \infty$  und folglich die zweite Eigenschaft in (2.65).



### 3. Fall: $(c < 0)$

Wähle

$$V_1(\xi) = I_m, \quad V_2(\xi) = A \exp(-cA^{-1}\xi)$$

(2.75)

$$G(\xi, \eta) = \frac{A}{c} \begin{cases} I_m - \exp(cA^{-1}\eta) & , 0 \leq \eta \leq \xi, \\ \exp(cA^{-1}(\eta - \xi))(I_m - \exp(cA^{-1}\xi)) & , 0 \leq \xi < \eta. \end{cases}$$

Wegen (2.72) für  $\alpha = -c\eta \geq 0$  (bzw.  $\alpha = -c\xi \geq 0$ ), da  $c < 0$ , gilt

$$\bullet |I_m - \exp(cA^{-1}\eta)| \leq 1 + |\exp(cA^{-1}\eta)| \stackrel{(2.72)}{\leq} 1 + C \exp(\beta_1 c \eta) \leq 1 + C \quad \forall 0 \leq \eta \leq \xi$$

$c < 0, \beta_1 > 0$   
 $\eta \geq 0$

$$\bullet |I_m - \exp(cA^{-1}\xi)| \stackrel{\text{analog}}{\leq} 1 + C \quad \forall 0 \leq \xi < \eta$$

$$\bullet |\exp(cA^{-1}(\eta - \xi))| \leq C \exp(\beta_1 c(\eta - \xi)) = C \exp(-\beta_1 |c|(\eta - \xi)) \quad \forall 0 \leq \xi < \eta$$

und somit für  $C_1 := \frac{A}{c}(1+C)$

$$|G(\xi, \eta)| \leq C_1 \cdot \begin{cases} 1 & , 0 \leq \eta \leq \xi, \\ \exp(-\beta_1 |c|(\eta - \xi)) & , 0 \leq \xi < \eta. \end{cases}$$

Somit existiert das Integral in (2.70) und wir erhalten dessen Abschätzung

$$\begin{aligned} |V_3(\xi)| &= \left| \int_0^\infty G(\xi, \eta) r(\eta) d\eta \right| \leq \int_0^\infty |G(\xi, \eta)| d\eta \|r\|_\infty \\ &\leq C_1 \left[ \int_0^\xi 1 d\eta + \int_\xi^\infty \exp(-\beta_1 |c|(\eta - \xi)) d\eta \right] \|r\|_\infty = C_1 \left( \xi + \frac{1}{\beta_1 |c|} \right) \|r\|_\infty \\ &= \xi \\ &= \left[ -\frac{1}{\beta_1 |c|} \exp(-\beta_1 |c|(\eta - \xi)) \right]_\xi^\infty \\ &= \frac{1}{\beta_1 |c|} \end{aligned}$$

Daher wächst  $V_3$  höchstens linear in  $\xi$  an. Daher ist  $V_2$  der dominante Term in (2.69): Es gilt

$$|\alpha_2 V_2(\xi)| \stackrel{(2.75)}{=} |\alpha_2 A \exp(-cA^{-1}\xi)| \geq \exp(\beta_1 |c|\xi) |\alpha_2 A|,$$

somit wächst  $V_2$  mindestens exponentiell an. Da  $v$  jedoch beschränkt ist (vgl. (2.64)) muss  $\alpha_2 = 0$  gelten.

**Annahme:**  $\Gamma_+ \neq 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , dann wähle  $\xi_\varepsilon > 0$  so groß, dass (2.73) erfüllt ist. Dann gilt

$$|V_3(\xi_\varepsilon)| \geq \left| \int_{\xi_\varepsilon}^\infty G(\xi_\varepsilon, \eta) d\eta \Gamma_+ \right| - \left| \int_0^{\xi_\varepsilon} G(\xi_\varepsilon, \eta) r(\eta) d\eta \right| - \left| \int_{\xi_\varepsilon}^\infty G(\xi_\varepsilon, \eta) (r(\eta) - \Gamma_+) d\eta \right|$$

Für den 1. Summanden gilt wegen

$$\begin{aligned} \int_{\xi_\varepsilon}^\infty G(\xi_\varepsilon, \eta) d\eta &= \left( \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi_\varepsilon} + \int_{\xi_\varepsilon}^\infty \right) G(\xi_\varepsilon, \eta) d\eta = \frac{A}{c} \left[ \eta I_m - \frac{A}{c} \exp(cA^{-1}\eta) \right]_{\xi_\varepsilon}^{\xi_\varepsilon} \\ &\quad - \frac{A}{c} (I_m - \exp(cA^{-1}\xi_\varepsilon)) \left[ \frac{A}{c} \exp(cA^{-1}(\eta - \xi_\varepsilon)) \right]_{\xi_\varepsilon}^\infty \\ &= \frac{A}{c} \left( (\xi_\varepsilon - \xi_\varepsilon) I_m + \frac{A}{c} (I_m - \exp(cA^{-1}\xi_\varepsilon)) \right) \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\xi_\varepsilon}^\infty G(\xi_\varepsilon, \eta) d\eta \Gamma_+ \right| &\stackrel{=: \tilde{C}_1}{\geq} \frac{1}{c} |\xi_\varepsilon - \xi_\varepsilon| |A \Gamma_+| + \frac{|(I_m - \exp(cA^{-1}\xi_\varepsilon)) \frac{A^2}{c^2} \Gamma_+|}{c} \geq \tilde{C}_1 (\xi_\varepsilon - \xi_\varepsilon) |A \Gamma_+| - \tilde{C}_2 \\ &\stackrel{\text{umgeh. Absch. } |x+y| \geq |x| - |y|}{\geq} \frac{1}{c} |\xi_\varepsilon - \xi_\varepsilon| |A \Gamma_+| - \frac{|I_m - \exp(cA^{-1}\xi_\varepsilon)| \frac{1}{c^2} |A^2 \Gamma_+|}{c} \\ &\leq \frac{1+C}{c} |A^2 \Gamma_+| \stackrel{(2.72), c < 0, \xi_\varepsilon \geq 0, \beta_1 > 0}{\leq} (1+C) \frac{|A^2 \Gamma_+|}{c^2} =: \tilde{C}_2 \end{aligned}$$

Für den 3. Summanden gilt die Abschätzung

$$\left| \int_{\xi_\varepsilon}^\infty G(\xi_\varepsilon, \eta) (r(\eta) - \Gamma_+) d\eta \right| \leq \int_{\xi_\varepsilon}^\infty |G(\xi_\varepsilon, \eta)| |r(\eta) - \Gamma_+| d\eta \leq \varepsilon \cdot \left( C_1 (\xi_\varepsilon - \xi_\varepsilon) + \frac{C_1}{\beta_1 |c|} \right) = \varepsilon (C_1 (\xi_\varepsilon - \xi_\varepsilon) + C_2) =: \varepsilon C_2$$

$\leq \varepsilon$  (2.73)       $\uparrow$  siehe Absch für  $|V_3(\xi)| \leq \dots$

Für den 2. Summanden gilt (wegen  $\xi \geq \xi_\varepsilon$ ) die Abschätzung

$$\left| \int_0^{\xi_\varepsilon} G(\xi, \eta) r(\eta) d\eta \right| \leq \int_0^{\xi_\varepsilon} \underbrace{|G(\xi, \eta)|}_{\leq C_1} \underbrace{|r(\eta)|}_{\leq \|r\|_\infty} d\eta \leq C_1 \|r\|_\infty \xi_\varepsilon$$

da  $0 \leq \eta \leq \xi_\varepsilon \leq \xi$

Einsetzen liefert

$$|V_3(\xi)| \geq \underbrace{\left( \tilde{C}_1 |A r_+| - \varepsilon C_1 \right)}_{\geq K_1 > 0} (\xi - \xi_\varepsilon) - \underbrace{\left( \tilde{C}_2 + \varepsilon C_2 + C_1 \|r\|_\infty \xi_\varepsilon \right)}_{\leq \tilde{C}_2 + C_2 \left( \frac{\tilde{C}_1 |A r_+| - K_1}{C_1} \right) + C_1 \|r\|_\infty \xi_\varepsilon =: K_2}$$

Falls  $\varepsilon \leq \frac{\tilde{C}_1 |A r_+| - K_1}{C_1}$  für ein  $K_1 > 0$   
( $\varepsilon$  hinreichend klein)

$$\geq K_1 (\xi - \xi_\varepsilon) - K_2 = \frac{K_1}{2} \xi + \underbrace{\frac{K_1}{2} \xi - K_1 \xi_\varepsilon - K_2}_{\geq 0} \geq \frac{K_1}{2} \xi \quad \forall \xi \geq \xi_0.$$

Falls  $\xi \geq 2\xi_\varepsilon + 2\frac{K_2}{K_1} =: \xi_0$

( $\xi$  hinreichend groß)

Folglich wächst  $V_3$  für  $\xi \geq \xi_0$  mindestens linear an, ist also unbeschränkt  $\hookrightarrow$  zur Beschränktheit von  $V_3$ , demnach gilt  $r_+ = 0$  (d.h.  $h_+ = 0$ ). Es bleibt die zweite Eigenschaft in (2.65) zu zeigen.

Aus (2.69), (2.75) und  $\alpha_2 = 0$  folgt

$$V'(\xi) = \alpha_1 \underbrace{V_1'(\xi)}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{V_2'(\xi)}_{=0} + V_3'(\xi) = \int_0^\infty \frac{d}{d\xi} G(\xi, \eta) r(\eta) d\eta = - \int_{\xi}^\infty \exp(cA^{-1}(\eta - \xi)) r(\eta) d\eta$$

$$= \begin{cases} 0 & , 0 \leq \eta \leq \xi \\ -\exp(cA^{-1}(\eta - \xi)) & , 0 \leq \xi \leq \eta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left( \frac{A}{c} \exp(cA^{-1}(\eta - \xi)) (I_m - \exp(cA^{-1}\xi)) \right) \\ &= \frac{d}{d\xi} \left( \frac{A}{c} \exp(cA^{-1}\eta) (\exp(cA^{-1}\xi) - I_m) \right) \\ &= \frac{A}{c} \exp(cA^{-1}\eta) (-cA^{-1}) \exp(cA^{-1}\xi) = -\exp(cA^{-1}(\eta - \xi)) , 0 \leq \xi \leq \eta \end{aligned}$$

und somit die Abschätzung

$$|V'(\xi)| \leq \int_{\xi}^\infty \underbrace{|\exp(cA^{-1}(\eta - \xi))|}_{\leq C \exp(-\beta_1 |\eta - \xi|)} |r(\eta)| d\eta \leq C \left( \sup_{\eta \geq \xi} |r(\eta)| \right) \int_{\xi}^\infty \exp(-\beta_1 |\eta - \xi|) d\eta$$

(2.72) mit  $\tau = -c(\eta - \xi) \geq 0$   $\frac{1}{\beta_1 |c|}$

$$= \frac{C}{\beta_1 |c|} \sup_{\eta \geq \xi} |r(\eta)| \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty$$

da  $r(\eta) \rightarrow r_+ = 0, \eta \rightarrow \infty$

was die zweite Eigenschaft in (2.65) beweist. ■



## 2.7. Wellen in komplexwertigen Systemen in einer Raumdimension

In diesem Abschnitt betrachten wir **Komplexwertige Gleichungen**

$$(2.76) \quad u_t = \alpha u_{xx} + g(x, |u|)u, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  hinreichend glatt und

$$u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, t) \mapsto u(x, t).$$

Für  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  ist (2.76) parabolisch (z.B. Ginzburg-Landau-Gleichung). Für  $\alpha = i$  ist (2.76) hyperbolisch (z.B. Schrödinger-Gleichung). Dies erhalten wir aus der reellwertigen Version von (2.76): Mit

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad u = u_1 + iu_2, \quad g = g_1 + ig_2, \quad \alpha_i, u_i, g_i \in \mathbb{R}$$

erhalten wir das **reellwertige System** von (2.76)

$$(2.77) \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{xx} + \begin{pmatrix} g_1 & -g_2 \\ g_2 & g_1 \end{pmatrix} (x, |u|) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

### Beispiel 2.21: (Lineare Schrödingergleichung)

Betrachte die **Lineare Schrödingergleichung (LSE)**

$$(2.78) \quad u_t = iu_{xx} + iV(x)u, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $\alpha = i$ ,  $g(x, |u|) = -iV(x)$ ,  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  **Potential**

In der Physik findet man (2.78) häufig in der Form

$$(2.79) \quad i\hbar \Psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi_{xx} + V(x)\Psi,$$

wobei  $\hbar$  die **reduzierte Plancksche Konstante**,  $m$  die **Mass eines Teilchens**,  $V$  ein **Potential** und  $\Psi$  die **Wellenfunktion** bezeichnet. Division von (2.79) durch  $i\hbar$  und eine Skalierung der räumlichen Variablen liefert (2.78).

### Beispiel 2.22: (Nichtlineare Schrödingergleichung)

Betrachte die **nichtlineare Schrödingergleichung (NLS)**

$$(2.80) \quad u_t = iu_{xx} + \beta |u|^p u, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $\alpha = i$ ,  $g(x, |u|) = \beta |u|^p$ ,  $\beta = ib$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 2$ .

Für  $p=2$  nennt man (2.80) die **kubische nichtlineare Schrödingergleichung (CNLS)**. Diese besitzt Lösungen der Form  $u(x,t) = c_1 e^{i(c_2 x + (bc_1^2 - c_2^2)t + c_3)}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ .

### Beispiel 2.23: (Gross-Pitaevskii-Gleichung)

Betrachte die **Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE)**

$$(2.81) \quad u_t = \frac{i}{2} u_{xx} - iV(x)u + \beta |u|^2 u, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $\alpha = \frac{i}{2}$ ,  $g(x, |u|) = -iV(x) + \beta |u|^2$ ,  $\beta = ib$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

### Beispiel 2.24: (Komplexe Ginzburg-Landau Gleichung)

Betrachte die **Komplexe Ginzburg-Landau Gleichung**

$$(2.82) \quad u_t = \alpha u_{xx} + (\mu + \beta |u|^2 + \gamma |u|^4)u, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ ,  $g(x, |u|) = \mu + \beta |u|^2 + \gamma |u|^4$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$

Man nennt (2.82) auch die **kubische-quintische komplexe Ginzburg-Landau Gleichung**. Für  $\gamma=0$ , nennt man (2.82) die **kubische komplexe Ginzburg-Landau Gleichung**. Diese Gleichung tritt in diversen Anwendungen im Bereich der Supraleitfähigkeit, der nichtlinearen Optik und der Laserphysik auf.

### Definition 2.25: (Oszillierende Welle)

Eine Lösung

$$u_*: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, t) \mapsto u_*(x, t)$$

von (2.76) der Form

$$(2.83) \quad u_*(x, t) = \exp(-i\theta t) v_*(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

heißt (**stehende**) **oszillierende Welle** mit (**Wellen-**) **Profil**  $v_*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und (**Oszillations-**) **Geschwindigkeit**

(oder: **Phasengeschwindigkeit**)  $-\pi \leq \theta < \pi$ .

Einsetzen von

$$(2.84) u(x,t) = \exp(-i\theta t) v(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

in (2.76)  $\Rightarrow$

$$-i\theta e^{-i\theta t} v(x) = a e^{-i\theta t} v_{xx}(x) + g(x, |v|) e^{-i\theta t} v(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

und Multiplikation mit  $e^{i\theta t}$  liefert die **ostillierende Puls ODE**

$$(2.85) 0 = a v'' + i\theta v + g(x, |v|) v, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

### Beispiel 2.26: (Kubische nichtlineare Schrödingergleichung)

Betrachte (2.80) für  $\beta = i b$  und  $p = 2$

$$(2.86) u_t = i u_{xx} + i b |u|^2 u$$

mit der **ostillierende Puls ODE**  $(\cdot (-i))$

$$(2.87) 0 = v'' + \theta v + b |v|^2 v, \quad x \in \mathbb{R} \quad (f(v) := -\theta v - b |v|^2 v)$$

Gleichung (2.87) besitzt die **Erhaltungsgröße**

$$E(v, v') = \frac{1}{2} (v')^2 + P(v) \quad \text{mit} \quad P(v) = -\int_0^v f(s) ds = -\frac{\theta}{2} v^2 + \frac{b}{4} v^4,$$

d.h.  $\frac{d}{dx} E(v, v') = 0$ . Integration liefert

$$(2.88) \frac{1}{2} (v')^2 + \frac{\theta}{2} v^2 + \frac{b}{4} v^4 = E(v, v') = \text{const}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung  $v$  von (2.87) soll folgende Eigenschaft aufweisen

$$v(x) \rightarrow 0, \quad v'(x) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow \pm\infty$$

Der Grenzübergang  $x \rightarrow \pm\infty$  in (2.88) impliziert somit  $\text{const} = 0$  und (2.88) geht über in

$$(2.89) 0 = E(v, v') = \frac{1}{2} (v')^2 + \frac{\theta}{2} v^2 + \frac{b}{4} v^4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### Berechnung einer ostillierenden Welle: Setzen wir den Ansatz

$$(2.90) v(x) = c_1 \text{sech}(c_2 x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1 \neq 0$$

in (2.87) ein, so erhalten wir wegen

$$v'(x) = -c_1 c_2 \frac{\sinh(c_2 x)}{\cosh^2(c_2 x)}, \quad v''(x) = c_1 c_2^2 \frac{\cosh^2(c_2 x) - 2}{\cosh^3(c_2 x)}$$

die Gleichung

$$0 = \frac{c_1}{\cosh^3(c_2 x)} \cdot \left( \underbrace{(c_2^2 + \theta)}_{=0} \cosh^2(c_2 x) + \underbrace{(b c_1^2 - 2 c_2^2)}_{=0} \right) \neq 0 \quad \forall x$$

Die Bedingungen  $c_2^2 + \theta = 0$  und  $b c_1^2 - 2 c_2^2$  liefern  $\theta = -c_2^2$  und  $c_1^2 = \frac{2}{b} c_2^2$  ( $\Rightarrow c_1 = \sqrt{\frac{2}{b}} c_2$  mit  $b > 0$  da  $c_1 \in \mathbb{R}$ ) und somit folgende Lösungen von (2.87)

$$(2.91) v(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} c_2 \text{sech}(c_2 x), \quad \theta = -c_2^2, \quad c_2 \in \mathbb{R}, \quad b > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die **ostillierenden Wellen** von (2.86) lauten daher

$$(2.92) u(x,t) = \exp(-i\theta t) v(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} c_2 \exp(i c_2^2 t) \text{sech}(c_2 x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}, \quad b > 0.$$

### Bemerkung:

Die Existenz **ostillierender Wellen** verlangt, dass der nichtlineare Operator (vgl. (2.76))

$$F(u) = a u_{xx} + g(x, |u|) u, \quad u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

die folgende **Äquivalenzbedingung** erfüllt

$$F(e^{i\theta} u) = e^{i\theta} F(u), \quad u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \theta \in \mathbb{C}.$$

(Äquivalenz bzgl. Drehung im Bild / Phasentransformation)

Die Existenz **wandernder Wellen** verlangt zuvor, dass

$$F(u) = A u_{xx} + f(u), \quad u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$$

die folgende **Äquivalenzbedingung** erfüllt

$$F(u(\cdot - \gamma)) = [F(u)](\cdot - \gamma), \quad u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

(Äquivalenz bzgl. Verschiebung / Translation)

Allgemein wird dies im nächsten Kapitel eingeführt. Beachte: Die Gleichungen (2.80) (NLS) und (2.82) (ACGL) erfüllen beide Äquivalenzbedingungen!



**Betrachte die Komplexwertige Gleichung**

(2.93)  $u_t = a u_{xx} + g(|u|)u, x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$

Einfügen von

(2.94)  $u(x,t) = e^{-i\theta t} v(x-ct), x \in \mathbb{R}, t \geq 0$  (wandernde-oscillierende Wellenansatz)

in (2.93) und Multiplikation mit  $e^{i\theta t}$  liefert

(2.95)  $0 = a v'' + cv' + (g(|v|) + i\theta)v, \xi \in \mathbb{R}$  (wandernde-oscillierende Wellen ODE)

mit  $\xi := x-ct$  (Wellenvariable).

**Beispiel 2.27: (Nichtlineare Schrödingergleichung)**

Betrachte die nichtlineare Schrödingergleichung (NLS) (2.80)

$u_t = i u_{xx} + i b |u|^p u, x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$

mit zugehöriger wandernde-oscillierende Wellen ODE

(2.96)  $0 = i v'' + cv' + (i b |v|^2 + i\theta)v, \xi \in \mathbb{R}.$

Einsetzen des Ansatzes

(2.97)  $v(\xi) = c_1 \exp(i c_2 \xi) \operatorname{sech}(c_3 \xi), \xi \in \mathbb{R}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

in (2.96) liefert unter Verwendung der Ableitungen

$\varepsilon := \exp(i c_2 \xi), \sigma = \operatorname{sech}(c_3 \xi), \tau = \tanh(c_3 \xi)$

und der Ableitungen

$\varepsilon' = i c_2 \varepsilon, \sigma' = -c_3 \tau \sigma, \tau' = c_3 \sigma^2, \sigma^2 = 1 - \tau^2, v = c_1 \varepsilon \sigma, |v| = |c_1| \sigma$

$v' = c_1 (i c_2 \varepsilon \sigma - \varepsilon c_3 \tau \sigma) = (i c_2 - c_3 \tau) v,$

$v'' = -c_3^2 \sigma^2 v + (i c_2 - c_3 \tau)^2 v = (-c_2^2 + c_3^2 - 2 c_3^2 \tau^2 - 2 i c_2 c_3 \tau) v$

die Gleichung

$0 = v'' - i c v' + \theta v + b |v|^2 v$   
 $= (-c_2^2 + c_3^2 - 2 c_3^2 \tau^2 - 2 i c_2 c_3 \tau + c c_2 + i c c_3 \tau + \theta + b c_1^2 \sigma^2) v$   
 $= \left( \underbrace{(-c_2^2 + c_3^2 + c c_2 + \theta)}_{=0} + i \tau \underbrace{(-2 c_2 c_3 + c c_3)}_{=0} + \sigma^2 \underbrace{(-2 c_3^2 + b c_1^2)}_{=0} \right) v, \xi \in \mathbb{R}.$

Die drei Bedingungen liefert die Beziehungen (o.B.d.A.  $c_3 \neq 0$ )

$\theta = -c_2^2 - c_3^2, c = 2 c_2, c_1 = \pm c_3 \sqrt{\frac{2}{b}}$  für  $c_2, c_3 \in \mathbb{R}, (b > 0, \text{ da } c_1, c_3 \in \mathbb{R})$

Einsetzen in (2.97) liefert das Profil und die Geschwindigkeiten

(2.98)  $v(\xi) = \pm c_3 \sqrt{\frac{2}{b}} \exp(i c_2 \xi) \operatorname{sech}(c_3 \xi), \theta = -c_2^2 - c_3^2, c = 2 c_2, c_1, c_3 \in \mathbb{R}$

Wir erhalten somit die wandernde-oscillierende Welle von (2.80), vgl. (2.94),

(2.99)  $u(x,t) = \pm c_3 \sqrt{\frac{2}{b}} \frac{\exp(i c_2 x + i (c_3^2 - c_2^2) t)}{\cosh(c_3 (x - 2 c_2 t))}, x \in \mathbb{R}, t \geq 0, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, b > 0.$

Da  $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt werden dürfen, bildet dies eine 2-Paramete-Familie wandernde-oscillierende Wellen von (2.80)

**2.8. Ausgewählte Wellenphänomene in höheren Raumdimensionen**

Betrachte das System von Reaktions-Diffusionsgleichungen für Raumdimensionen  $d \geq 2$

(2.100)  $u_t = A \Delta u + f(u), x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  mit  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  (d.h.  $\operatorname{Re} \lambda > 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$ ),  $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), u = u(x,t) \in \mathbb{R}^m$  und  $d \geq 2.$

a) **Wandernde Wellen:** Für geeignete Funktionräume  $Y$  (z.B.  $Y = H^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$  oder  $Y = C_{\text{unif}}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ ) erfüllt der Operator  $\mathbb{F}: X \supseteq Y \rightarrow X$  definiert durch

$[\mathbb{F}(v)](x) := A \Delta v(x) + f(v(x)), x \in \mathbb{R}^d, v \in Y$

die Eigenschaft

$[\mathbb{F}(v)](x - \gamma) = [\mathbb{F}(v(\cdot - \gamma))](x), x \in \mathbb{R}^d, \gamma \in \mathbb{R}^d$  (Translationsäquivalenz)

Eine wandernde Welle von (2.100) ist eine Lösung  $u$  der Form

(2.101)  $u(x,t) = v(K^T x - \omega t), x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$

mit Wellenvektor  $K \in \mathbb{R}^d$ , Frequenz  $\omega \in \mathbb{R}$  und eindimensionalem (Wellen-) Profil  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Lösungen der Form (2.101) heißen ebene Wellen, da sie in der Hyperebene  $K^\perp$  konstant sind und nur in Richtung  $K$  wandern.

Einsetzen von (2.101) in (2.100) liefert die **wandernde Wellen ODE** von (2.100)

(2.102)  $0 = A|k|^2 v'' + \omega v' + f(v)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$

Lösen  $v, k, \omega$  Gleichung (2.102), so ist (2.101) eine wandernde Welle von (2.100). Üblicherweise normiert man  $|k|=1$ , so dass (2.102) mit (2.24) übereinstimmt.

**b) Rotierende Wellen:** Es bezeichne

(2.103)  $O(\mathbb{R}^d) := \{Q \in \mathbb{R}^{d \times d} : Q^T Q = I_d\}$

die **orthogonale Gruppe**, dann definieren wir für Funktionen  $v: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  die **Gruppenaktion**

(2.104)  $V_Q(x) := v(Q^T x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $Q \in O(\mathbb{R}^d)$ .

**Lemma 2.28:**

Für hinreichend glatte  $v: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  erfüllt der Operator

(2.105)  $[F(v)](x) := A \Delta v(x) + f(v(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$

die Eigenschaft

(2.106)  $[F(V_Q)](x) = [F(v)](Q^T x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $Q \in O(\mathbb{R}^d)$ . (**Rotationsäquivalenz**)

**Beweis: (Lemma 2.28)**

Aus der Kettenregel erhalten wir

$\bullet D_i V_Q(x) = \sum_{j=1}^d D_j v(Q^T x) (Q^T)_{ji}$

$\bullet D_i D_j V_Q(x) = \sum_{k=1}^d D_k D_j v(Q^T x) (Q^T)_{ki} (Q^T)_{jj}$

$\bullet D_i^2 V_Q(x) = \sum_{j,k=1}^d D_k D_j v(Q^T x) (Q^T)_{ji} Q_{ik}$

$\bullet \Delta V_Q(x) = \sum_{i=1}^d D_i^2 V_Q(x) = \sum_{j,k=1}^d D_k D_j v(Q^T x) \underbrace{\sum_{i=1}^d (Q^T)_{ji} Q_{ik}}_{(Q^T Q)_{jk} = (I_d)_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases}} = \sum_{j=1}^d D_j^2 v(Q^T x) = \Delta v(Q^T x)$

und somit

$\bullet [F(V_Q)](x) = A \Delta V_Q(x) + f(V_Q(x)) = A \Delta v(Q^T x) + f(v(Q^T x)) = [F(v)](Q^T x)$ . ■

**Beispiel 2.29: (Barkley-Modell)**

Betrachte das **Barkley-Modell**

(2.107)  $u_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \Delta u + \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} u_1(1-u_1)(u_1 - \frac{u_2+b}{a}) \\ g(u_1) - u_2 \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \geq 0$ ,  $u_1$ : **activator** (fast if  $\epsilon \ll 1$ ),  $u_2$ : **inhibitor** (slow)

wobei  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  mit  $u_i = u_i(x,t) \in \mathbb{R}$  und

$0 < d_2 \ll 1$ ,  $0 < \epsilon \ll 1$ ,  $a, b > 0$ .

Übliche Wahlen für  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lauten

$g(w) = w$  bzw.  $g(w) = w^3$ ,  $w \in \mathbb{R}$ .

Für die Parameter

$d_2 = \frac{1}{10}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{50}$ ,  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = \frac{1}{100}$ ,  $g(w) = w$

besitzt (2.107) **rotierende Spiralwelle**, die sich z.B. für die Anfangsdaten

$u_1(x,0) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq 0 \\ 1, & x_1 > 0 \end{cases}$ ,  $u_2(x,0) = \begin{cases} 0, & x_2 \leq 0 \\ \frac{a}{2}, & x_2 > 0 \end{cases}$

entwickelt, und um den Ursprung rotiert.

Eine **(starr-) rotierende Welle** von (2.107) ist eine Lösung

$u: \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x,t) \mapsto u(x,t)$

von (2.107) der Form

(2.108)  $u(x,t) = V_* (Q^T(t) x)$ ,  $Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_* t) & -\sin(\omega_* t) \\ \sin(\omega_* t) & \cos(\omega_* t) \end{pmatrix}$

mit **(Wellen-)Profil**  $V_*: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und **(Rotations-)Geschwindigkeit (Winkel Frequenz)**  $\omega_* \in \mathbb{R}$ .



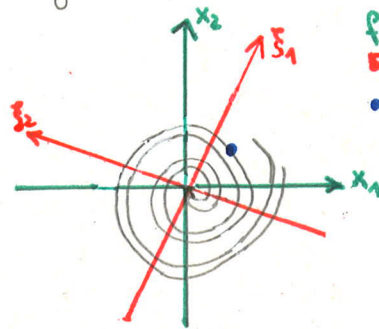
Gegeben sei ein **Referenzpunkt**  $X_* \in \mathbb{R}^2$  des Wellenprofils  $v_*$  (z.B. die Spitze eines Spiralringers). Befindet sich dieser Referenzpunkt bei der rotierenden Welle  $u$  zur Zeit  $t=0$  bei  $x_* \in \mathbb{R}^2$ , so befindet er sich zur Zeit  $t>0$  bei  $x(t)$ , wobei

$$Q^T(t)x(t) = x_*, \quad \text{d.h.} \quad x(t) = Q(t)x_*.$$

$\xi, X_*$ : **Lagrange-Koord.**

$x, x_*$ : **Euler-Koord.**

Damit rotiert das Profil im Uhrzeigersinn, falls  $\omega_* < 0$ , und entgegen des Uhrzeigersinn, falls  $\omega_* > 0$ .



**fest  
rotiert**

• Referenzpunkt: Punkt bewegt sich in  $x_1-x_2$ -Koordinatensystem und ist fest im  $\xi_1-\xi_2$ -Koordinatensystem. Das  $\xi_1-\xi_2$ -Koordinatensystem bewegt sich entsprechend des Punktes.

Die orthogonale Matrix  $Q(t)$  in (2.108) lässt sich durch das Matrixexponential einer schiefssymmetrischen Matrix darstellen

$$Q(t) = \exp(tS), \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_* \\ \omega_* & 0 \end{pmatrix}.$$

Allgemeines gilt: Ist  $S \in \mathbb{R}^{d,d}$  **schiefssymmetrisch** (d.h.  $S = -S^T$ ), so ist  $Q = \exp(S) \in \mathbb{R}^{d,d}$  **orthogonal** (d.h.  $Q^T Q = I_d$ ).

$$Q^T Q = \exp(S)^T \exp(S) = \exp(S^T) \exp(S) = \exp(-S) \exp(S) = \exp(-S+S) = \exp(0) = I_d.$$

### Definition 2.30: (rotierende Welle)

Eine Lösung

$$u: \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, t) \mapsto u(x, t)$$

von (2.109)  $u_t = A \Delta u(x) + f(u(x)), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq 0, \quad d \geq 2$

der Form (2.110)  $u(x, t) = v_*(\exp(-tS)x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq 0$

heißt **rotierende Welle** mit (Wellen-) **Profil**  $v_*: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  und (Rotations-) **Geschwindigkeitsmatrix**  $S \in \mathbb{R}^{d,d}, \quad S = -S^T$ .

### Proposition 2.31:

Sei  $u$  eine rotierende Welle von (2.109) mit (2.110), dann löst  $v_*$  die Gleichung

$$(2.111) \quad 0 = A \Delta v(x) + v_x(x) S x + f(v(x)), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad \text{(rotierende Wellen PDE)}$$

Sei  $v_*$  eine Lösung von (2.111) und  $S \in \mathbb{R}^{d,d}$  mit  $S = -S^T$ , dann ist  $u$  aus (2.110) eine rotierende Welle von (2.109).

### Beweis: (Proposition 2.31)

Aus Lemma 2.28, der Orthogonalität von  $\exp(tS)$  und der Substitution  $\xi := \exp(-tS)x$  (Wellenvariable) erhalten wir

$$\bullet u_t(x, t) \stackrel{(2.110)}{=} -v_{\xi}(\exp(-tS)x) S \exp(-tS)x = -v_{\xi}(\xi) S \xi,$$

$$\bullet A \Delta u(x, t) = A \Delta_x (v(\exp(-tS)x)) \stackrel{\text{Lemma 2.28}}{=} [A \Delta_{\xi} v](\exp(-tS)x) = A \Delta v(\xi),$$

$$\bullet f(u(x, t)) = [f \circ v](\exp(-tS)x) = [f \circ v](\xi).$$

### Bemerkung: (Rotationsterm)

In (2.111) bezeichnet  $v_x \in \mathbb{R}^{m,d}$  die **totale Ableitung**. Somit enthält (2.111) einen 1. Ordnungsterm  $v_x$  mit unbeschränkten Koeffizienten  $Sx$ . Schreibt man diesen Term für  $v: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  als

$$\langle Sx, \nabla v(x) \rangle := \sum_{j=1}^d (Sx)_j D_j v(x) = v_x(x) Sx, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad \text{(inneres Produkt)}$$

mit

$$\nabla v := v_x^T \quad \text{(Gradient)}$$

So liefert die Schiefssymmetrie von  $S \in \mathbb{R}^{d,d}$  (d.h.  $S = -S^T$ )

$$\begin{aligned}
(V_x(x)Sx)_i &= \sum_{j=1}^d \mathcal{D}_j V_i(x) (Sx)_j = \sum_{j,k=1}^d \mathcal{D}_j V_i(x) S_{jk} x_k \\
&= \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^{k-1} \mathcal{D}_j V_i(x) S_{jk} x_k + \sum_{k=1}^d \underbrace{\mathcal{D}_k V_i(x) S_{kk}}_{=0} x_k + \sum_{k=1}^d \sum_{j=k+1}^d \mathcal{D}_j V_i(x) \underbrace{S_{jk}}_{=-S_{kj}} x_k \\
&= \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^{k-1} S_{jk} (x_k \mathcal{D}_j - x_j \mathcal{D}_k) V_i(x), \quad \underbrace{\sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{j-1} \mathcal{D}_j V_i(x) S_{kj} x_k}_{= - \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^{k-1} \mathcal{D}_k V_i(x) S_{jk} x_j}
\end{aligned}$$

für  $i=1, \dots, n$ . Hierbei ist  $x_k \mathcal{D}_j - x_j \mathcal{D}_k$  die **Winkelableitung** in der  $(x_j, x_k)$ -Ebene und  $S_{jk}$  die **Rotationsgeschwindigkeit** in der  $(x_j, x_k)$ -Ebene.

**Bemerkung: (Rotationszentrum)**

Eine rotierende Welle muss nicht notwendigerweise um den Ursprung rotieren: Ist  $u$  eine rotierende Welle von (2.109) der Form (2.110), so ist die Funktion

$$u_0(x, t) := u(x - x_0, t) = v_*(\exp(-tS)(x - x_0)), \quad x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$$

für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  eben falls eine rotierende Welle von (2.109) mit verschobenem Profil

$$(2.112) \quad v_0(x) := v_*(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Eine um den Punkt  $x_0$  rotierende Welle  $u_0$  von (2.109) ist daher von der Form (vgl. (2.110))

$$(2.113) \quad u_0(x, t) = v_0(x_0 + \exp(-tS)(x - x_0)), \quad x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0.$$

Hierbei löst  $v_0$  die Gleichung (vgl. (2.111))

$$(2.114) \quad 0 = A \Delta v(x) + v_x(x) S(x - x_0) + f(v(x)), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{rotierende Wellen PDE})$$

Somit erhalten wir aus der Existenz einer rotierenden Welle, die Existenz einer ganzen Familie rotierender Wellen.

Betrachte das **Komplexwertige System** (vgl. (2.93))

$$(2.115) \quad u_t = \alpha \Delta u + g(|u|)u, \quad x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0,$$

wobei

$$\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > 0, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ glatt}, u(x, t) \in \mathbb{C}.$$

Der Operator

$$F(u) = \alpha \Delta u + g(|u|)u$$

erfüllt die Eigenschaft

$$F(e^{i\theta} u) = e^{i\theta} F(u), \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (\text{Oszillationsäquivalenz, Phasenrotationsäquivalenz})$$

Es liegt daher nahe, dass (2.115) **oszillierende Wellen** Lösungen besitzt

$$(2.116) \quad u(x, t) = e^{-i\theta t} v_*(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0.$$

Einsetzen von (2.116) in (2.115) liefert, dass  $v_*$  die folgende Gleichung löst

$$0 = \alpha \Delta v(x) + i\theta v(x) + g(|v(x)|)v(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{oszillierende Wellen PDE})$$

**Beispiel 2.32: (Komplexe Ginzburg-Landau Gleichung)**

Betrachte die **Komplexe Ginzburg-Landau Gleichung**, vgl. Beispiel 2.24

$$(2.117) \quad u_t = \alpha \Delta u + (\mu + \beta |u|^2 + \gamma |u|^4)u, \quad x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, d \geq 2.$$

Für die Parameter

$$\alpha = \frac{1}{2}(1+i), \mu = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{5}{2} + i, \gamma = -1 - \frac{1}{10}i, d \in \{2, 3\}$$

besitzt (2.117) **spinning soliton** Lösungen. Für

$$\alpha = \frac{1}{2}(1+i), \mu = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{13}{5} + i, \gamma = -1 - \frac{1}{10}i, d = 2$$

besitzt (2.117) **rotating spiral wave** Lösungen.

**Beispiel 2.33: ( $\lambda$ - $\omega$  System)**

Betrachte das  **$\lambda$ - $\omega$  System**

$$(2.118) \quad u_t = \alpha \Delta u + (\lambda(|u|) + i\omega(|u|))u, \quad x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, d \geq 2$$

wobei

$$\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > 0, \lambda, \omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



Für die Parameter und Funktionen

$$(2.119) \quad \alpha = 1, \quad \lambda(r) = 1 - r^2, \quad \omega(r) = -r^2, \quad d \in \{2, 3\}$$

besitzt (2.118) **rotating spiral wave** Lösungen, falls  $d=2$ , und **scroll wave** Lösungen, falls  $d=3$ . Für (2.119) ist (2.118) ein Spezialfall von (2.117).

**Bemerkung 2.34:**

(i): Numerische Simulationen der spinning solitons <sup>von (2.117)</sup> ( $d=2$ ) legen nahe, dass das Profil  $v_*: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$(2.120) \quad e^{i\theta} v_*(x) = v_*(R_\theta x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

erfüllt, womit die Darstellung einer rotierenden Welle nicht eindeutig ist

$$u(x, t) = e^{-i\theta t} v_*(x) = v_*(R_{-\theta t} x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0.$$

(ii): Für  $d=3$  besitzen die rotierenden Wellen von (2.117) und (2.118) die Form

$$u(x, t) = v_*(\exp(-tS)x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0$$

für ein  $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $-S = S^T$ . In diesen Beispielen rotieren die Wellen um die  $z$ -Achse

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \exp(-tS) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3. Äquivariante Evolutionsgleichungen, relative Gleichgewichte und Lie-Gruppen

#### 3.1. Das Äquivarianzkonzept und relative Gleichgewichte

**a) Wandernde Wellen:** Betrachte das zu (2.23) gehörende **Anfangswertproblem** (oder: **Cauchy-Problem**)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_t &= Au_{xx} + f(u), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei  $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  invertierbar,  $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Unser Ziel ist die Approximation **wandernder Wellen** von (3.1)

$$u_*(x, t) = v_*(x - ct), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Transformation von (3.1) mittels

$$(3.2) \quad u(x, t) = v(\xi, t) \quad \text{mit } \xi := x - ct$$

in ein **mitbewegtes-Koordinatensystem** liefert

$$(3.3) \quad \begin{aligned} v_t &= Av_{\xi\xi} + cv_\xi + f(v), & \xi \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(\xi, 0) &= u_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da das Profil  $v_*$  die **wandernde-Wellen ODE**

$$(3.4) \quad 0 = Av_{\xi\xi} + cv_\xi + f(v), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

löst, ist  $v_*$  eine **stationäre Lösung** von (3.3). Die nichtlineare Stabilität wandernder Wellen hängt i. Allg. vom Spektrum der **Linearisierung**

$$(3.5) \quad Lw := Aw_{\xi\xi} + cw_\xi + Df(v_*)w, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

ab. Dies erfordert Lösungen  $(\lambda, w)$  des folgenden **Eigenwertproblems** zu finden

$$(3.6) \quad (\lambda I - L)w = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

**b) Oszillierende Wellen:** Betrachte das zu (2.76) gehörende **Cauchy-Problem**

$$(3.7) \quad \begin{aligned} u_t &= \alpha u_{xx} + g(x, |u|)u, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei  $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ . Für die Approximation einer **oszillierenden Welle**

$$u(x, t) = \exp(-i\theta t) v_*(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi)$$

transformieren wir (3.7) mittels

$$(3.8) \quad u(x, t) = \exp(-i\theta t) v(x, t)$$

in ein **mitbewegtes Koordinatensystem** und erhalten

$$(3.9) \quad \begin{aligned} v_t &= \alpha v_{xx} + i\theta v + g(x, |v|)v, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ v(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Da das Profil  $v_*$  die **oszillierende-Wellen ODE**

$$(3.10) \quad 0 = \alpha v_{xx} + i\theta v + g(x, |v|)v, \quad x \in \mathbb{R}$$

löst, ist  $v_*$  eine **stationäre Lösung** von (3.9).

**c) Rotierende Wellen:** Betrachte das zu (2.100) gehörende **Cauchy-Problem**

$$(3.11) \quad \begin{aligned} u_t &= A \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, d \geq 2 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

wobei  $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  mit  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ ,  $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Für die Approximation einer **rotierenden Welle**

$$u(x, t) = v_*(\exp(-tS)x), \quad x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, d \geq 2, S \in \mathbb{R}^{d \times d}, S^T = -S$$

transformieren wir (3.11) mittels

$$(3.12) \quad u(x, t) = v(\xi, t), \quad \xi := \exp(-tS)x$$

in ein **mitrotierendes Koordinatensystem** und erhalten (vgl. Prop. 2.31)

$$(3.13) \quad \begin{aligned} v_t &= A \Delta v + v_x S x + f(v), & x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, d \geq 2, \\ v(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Da das Profil  $v_*$  die **rotierende Wellen ODE**

$$(3.14) \quad 0 = A \Delta v + v_x S x + f(v), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

löst, ist  $v_*$  eine **stationäre Lösung** von (3.13). Das Spektrum des **Linearisierung**

$$(3.15) \quad Lw = A \Delta w + w_x S x + Df(v_*)w, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

gibt Aufschluss über die Stabilität rotierender Wellen und erfordert das Lösen des **Eigenwertproblems**,

$$(3.16) \quad (\lambda I - L)w = 0$$

**Abstrakte Vorgehensweise:** Betrachte eine **allgemeine abstrakte Evolutionsgleichung**

$$(3.17) \quad u_t = F(u), \quad t \geq 0,$$

auf einem geeigneten Funktionenraum  $X$ , wobei

$$(3.18) \quad F: X \supseteq Y \rightarrow X, \quad u \mapsto F(u), \quad Y \subseteq X \text{ dicht (z.B. } Y := D(F)).$$

Für ein

$$(3.19) \quad \Gamma_x \in GL(X), \text{ Untergruppe linearer Homöomorphismen (} \Gamma \in \Gamma_x \text{ linear, stetig, bijektiv \& Umkehrwert } \Gamma^{-1} \text{ stetig)}$$

sei  $F$  **äquvariant bzgl.  $\Gamma_x$** , d.h.

$$(3.20) \quad F(\Gamma u) = \Gamma F(u), \quad u \in Y, \Gamma \in \Gamma_x.$$

Ein **relatives Gleichgewicht** von (3.17) ist eine Lösung  $u: \mathbb{R} \rightarrow Y$  der Form

$$(3.21) \quad u(t) = \Gamma(t)v_*, \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei  $v_* \in Y$  und  $\Gamma: \mathbb{R} \rightarrow \Gamma_x \subseteq GL(X)$  stückweise glatt. Hierbei ist  $GL(X)$  mit der Operatornorm  $\|\cdot\|$  versehen

$$\|g\| := \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\| \leq 1}} \|gv\|_X, \quad g \in GL(X).$$

**Beispiel 3.1: (wandernde Wellen)**

Für (3.1) betrachte die abstrakte Vorgehensweise mit

$$Y = H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m), \quad X = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m), \quad \Gamma_x = \{\Gamma \in GL(X) \mid \exists \gamma \in \mathbb{R} : \Gamma u(\cdot) = u(\cdot - \gamma) \forall u \in X\}$$

$$F(u) = Au_{xx} + f(u), \quad u \in Y \quad (\Gamma_{x,0} \text{ Gruppe})$$

$$[\Gamma u](x) = u(x - \gamma), \quad x \in \mathbb{R}, u \in X, \gamma \in \mathbb{R} \quad (\text{Translationsoperator})$$

Der Operator  $\Gamma: X \rightarrow X$  ist eine **Isometrie** (oder: **längenverhaltend**), d.h.

$$\|\Gamma u\|_{L^2} = \|u(\cdot - \gamma)\|_{L^2} \stackrel{\uparrow}{=} \|u\|_{L^2}, \quad u \in X$$

erfüllt  $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  die Eigenschaft  $f(0) = 0$ , so gilt

$$u \in H^1 \Rightarrow f(u) \in L^2. \quad (\text{vgl. Bsp. 3.})$$

Für

$$[\Gamma(t)v](x) = v(x - \gamma(t)), \quad x \in \mathbb{R}, v \in X, t \geq 0, \gamma(t) \in \mathbb{R},$$

besitzen die **relativen Gleichgewichte** von (3.1) die Form

$$(3.22) \quad u(\cdot, t) = v(\cdot - \gamma(t)), \quad t \geq 0.$$



Da (3.22) eine Lösung von (3.1) ist, gilt

$$0 = Av_{xx} + v_x \gamma_+(t) + f(v), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

Multiplikation mit  $v_x$  und Integration bzgl.  $x$  liefert

$$0 = (v_x, Av_{xx})_{L^2} + (v_x, v_x)_{L^2} \gamma_+(t) + (v_x, f(v))_{L^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

und daher (wegen  $(v_x, v_x)_{L^2} > 0$ , da  $v \neq \text{const}$ )

$$(3.23) \quad \gamma_+(t) = c := - \frac{(v_x, Av_{xx})_{L^2} + (v_x, f(v))_{L^2}}{(v_x, v_x)_{L^2}} \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Gleichung (3.23) besitzt die Lösung

$$\gamma_+(t) = ct + b, \quad t \in \mathbb{R}$$

für ein  $b \in \mathbb{R}$ , so dass das relative Gleichgewicht (3.22) eine wandernde Welle ist

$$u(x, t) = v(x - ct - b) = v_*(x - ct), \quad v_*(\xi) = v(\xi - b), \quad \xi \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

### 3.2. Lie-Gruppen und Mannigfaltigkeiten

#### Definition 3.2: (Topologie, Hausdorff-Raum, Karte, Atlas, Mannigfaltigkeit)

1) Sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{T}$  eine Familie offener Teilmengen aus  $M$ , dann nennen wir  $\mathcal{T}$  eine **Topologie (auf  $M$ )**, falls

(i):  $\emptyset$  und  $M$  sind offene Mengen,

(ii): Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offene Menge,

(iii): Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offene Menge.

In diesem Fall heißt das Tupel  $(M, \mathcal{T})$  (kurz:  $M$ ) **topologischer Raum**.

2) Ein topologischer Raum  $M$  heißt **(topologischer) Hausdorff-Raum**, falls

$$\forall x, y \in M \text{ mit } x \neq y \exists U_x, V_y \subset M \text{ offene Mengen: } U_x \cap V_y = \emptyset.$$

**(Hausdorffsches Trennungaxiom)**

3) Sei  $M$  ein Hausdorff-Raum,  $U \subset M$  offen und  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann heißt  $(U, \varphi)$  eine **Karte (oder: lokale Parametrisierung) auf  $M$** , falls  $\varphi: U \rightarrow V$  ein **Homöomorphismus** ist, d.h.

(i):  $\varphi$  ist bijektiv,

(ii):  $\varphi$  ist stetig,

(iii): Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  existiert und ist stetig.

4) Eine Familie  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$  von Karten  $(U_i, \varphi_i)$  auf  $M$  heißt **Atlas (auf  $M$ )**, falls

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Die Homöomorphismen

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j), \quad i, j \in I, \quad U_i \cap U_j \neq \emptyset$$

heißen **Kartenübergänge (Kartenwechsel oder Koordinatenwechsel) des Atlas**. Zwei Karten  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$  heißen

•  **$C^k$ -Kompatibel (oder verträglich)**  $\Leftrightarrow \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in C^k(\varphi_j(U_i \cap U_j), \varphi_i(U_i \cap U_j))$

•  **$C^\infty$ -Kompatibel (oder verträglich)**  $\Leftrightarrow \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in C^\infty(\text{ " }, \text{ " })$  (d.h.  $\in C^k \forall k \in \mathbb{N}$ )

•  **$C^\omega$ -Kompatibel (oder verträglich)**  $\Leftrightarrow \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  ist (reell) analytisch

5) Sei  $M$  ein Hausdorff-Raum und  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$  ein Atlas auf  $M$  mit Karten  $(U_i, \varphi_i)$  auf  $M$ , dann nennen wir  $(M, \mathcal{A})$  (kurz:  $M$ ) eine

•  **$n$ -dimensionale (reelle)  $C^k$ -Mannigfaltigkeit**  $\Leftrightarrow \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in C^k \quad \forall i, j \in I,$

•  **$n$ -dimensionale (reelle)  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit**  $\Leftrightarrow \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in C^\infty \quad \forall i, j \in I,$

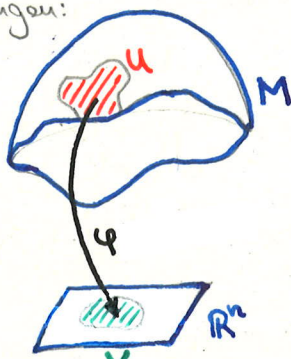
•  **$n$ -dimensionale (reelle)  $C^\omega$ -Mannigfaltigkeit**  $\Leftrightarrow \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  ist (reell) analytisch  $\forall i, j \in I.$

Es gilt

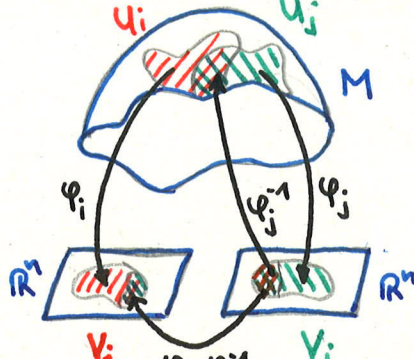
$$M \text{ } C^\omega\text{-Mannigfaltigkeit} \Leftrightarrow M \text{ } C^\infty\text{-Mannigfaltigkeit} \Leftrightarrow M \text{ } C^k\text{-Mannigfaltigkeit}$$



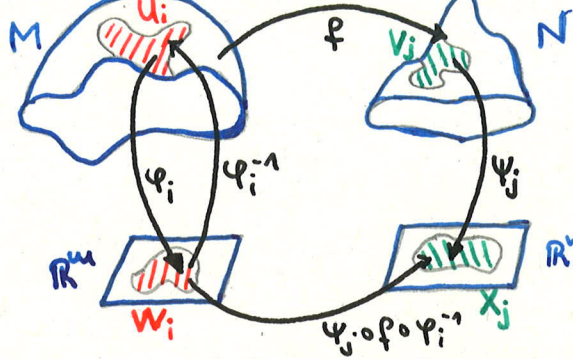
Abbildungen:



(a): Karte  $(U, \varphi)$  auf  $M$



(b): Kartenwechsel



(c): Produktmannigfaltigkeit

**Bemerkung 3.3:**

1. (Karten). Die übliche Notation für das Bild einer Karte  $(U_i, \varphi_i)$  lautet

$$\varphi_i(p) = x(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \quad , \quad p \in U_i$$

Hierbei bezeichnet man  $x_i(p)$  als die **lokalen Koordinaten (an der Stelle p)**.

2. (Glattheit). In Definition 3.2 4) & 5) haben wir  $k \geq 1$  vorausgesetzt. Wegen  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in C^k \quad \forall i, j \in I$  gilt für die Inverse

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in C^k \quad \forall i, j \in I.$$

Somit sind die Kartenübergänge  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  einer  $C^k$ -Mannigfaltigkeit für alle  $i, j \in I$   $C^k$ -Diffeomorphismen.

3. (Topologie). In Definition 3.2 haben wir angenommen, dass auf  $M$  eine Topologie definiert sei, bzgl. der  $M$  Hausdorff ist. Es ist möglich, dies zu vermeiden: Sei  $M$  eine Menge und sei  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$  eine Familie von Tupel  $(U_i, \varphi_i)$ , so dass  $\varphi_i: M \supseteq U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^n$  für jedes  $i \in I$  injektiv ist,  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in C^k$  für alle  $i, j \in I$  und  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Dann lässt sich für  $V \subseteq V_i$  offen durch die Urbilder  $\varphi_i^{-1}(V)$ ,  $i \in I$ , eine Topologie auf  $M$  erzeugen. Es lässt sich zeigen, dass  $M$  bzgl. dieser Topologie ein Hausdorff-Raum ist. Beachte: In einigen Quellen wird lediglich gefordert, dass  $M$  ein topologischer Raum ist.

4. (Banach Mannigfaltigkeiten). Verwendet man das Kalkül der Fréchet-Ableitungen für Abbildungen zwischen Banachräumen, so können wir den Raum  $\mathbb{R}^n$  durch einen Banachraum  $X$  ersetzen. In diesem Fall nennt man  $M$  eine **Banach-Mannigfaltigkeit (über  $X$ )**. Dies ist nützlich, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 3.4:**

Betrachte

$$(3.24) \quad u_t = Au_{xx} + f(u) \quad , \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei  $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  und  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  invertierbar. Gegeben sei eine wandernde Front von (3.24)

$$u_*(x, t) = v_*(x - ct)$$

mit

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v_*(\xi) = v_{\pm} \in \mathbb{R}^m, \quad v_+ \neq v_-.$$

Ein geeigneter Funktionsraum für diese Lösungen ist der affine Raum

$$(3.25) \quad M := \tilde{v} + L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) := \{ \tilde{v} + w \mid w \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \}$$

wobei  $\tilde{v} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  die folgenden Eigenschaften erfüllt

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{v}(\xi) = v_{\pm} \quad , \quad \tilde{v}' \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m).$$

Die Karten  $(U_i, \varphi_i)$  bestehen aus offenen Mengen  $U \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  und Abbildungen

$$\varphi_u: \tilde{v} + U \rightarrow U, \quad \tilde{v} + w \mapsto w.$$

Die zugehörigen Kartenwechsel  $\varphi_{u_1} \circ \varphi_{u_2}^{-1} = I_x$  erfüllen

$$\varphi_{u_1} \circ \varphi_{u_2}^{-1} \in C^\infty(\underbrace{\varphi_{u_1}(U_1 \cap U_2)}_{= \varphi_{u_1}(\tilde{v} + (U_1 \cap U_2))}, L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)).$$

Statt mit der Banach-Mannigfaltigkeit  $M$  aus (3.25) zu arbeiten, könnte man (3.24) auch mittels  $u = \tilde{v} + w$  transformieren, wodurch die Nichtlinearität raumunabhängig wird. Dies zieht Komplikationen bei der Darstellung der Translationsgruppe mit sich.



### Definition 3.5: (Produktmannigfaltigkeit)

Seien  $M$  eine  $m$ -dimensionale (reelle)  $C^k$ -Mannigfaltigkeit mit Atlas  $A := \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$  und  $N$  eine  $n$ -dimensionale (reelle)  $C^k$ -Mannigfaltigkeit mit Atlas  $B := \{(V_j, \psi_j) \mid j \in J\}$  für ein  $K \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ .

1) Eine Funktion  $f: M \rightarrow N$  heißt  **$L$ -mal stetig differenzierbar** (Kurz:  $f \in C^L(M, N)$ ) für ein  $L \in \mathbb{N}$ , mit  $L \leq K$ , falls

- (i):  $f: M \rightarrow N$  ist stetig
- (ii):  $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} \in C^L(\varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)), \mathbb{R}^n) \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J$

2) Der Hausdorff-Raum

$$M \times N := \{(p, q) \mid p \in M, q \in N\}$$

versehen mit der Produkttopologie und dem Atlas  $\mathcal{C} = \{(U_i \times V_j, \varphi_i \otimes \psi_j) \mid i \in I, j \in J\}$  auf  $M \times N$  mit Karten

$$\varphi_i \otimes \psi_j: U_i \times V_j \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad (p, q) \mapsto (\varphi_i(p), \psi_j(q)), \quad i \in I, j \in J$$

auf  $M \times N$  heißt **Produktmannigfaltigkeit**. Diese ist eine  $(m+n)$ -dimensionale (reelle)  $C^k$ -Mannigfaltigkeit.

### Definition 3.6: (Lie-Gruppe)

Eine Gruppe  $(G, \circ)$  heißt **Lie-Gruppe**, falls  $G$  eine endlich-dimensionale (reelle)  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit für die

$$\text{comp: } G \times G \rightarrow G, \quad (g, \delta) \mapsto g \circ \delta \quad \begin{matrix} =: \text{comp}(g, \delta) \\ \text{(Komposition / Multiplikation)} \end{matrix}$$

$$\text{und inv: } G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1} \quad \begin{matrix} =: \text{inv}(g) \\ \text{(Inversion)} \end{matrix}$$

$C^\infty$ -Abbildungen sind.

### Bemerkung 3.7:

1. Anstelle von  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten kann man auch  $C^\omega$ -Mannigfaltigkeiten verwenden, wobei die Koordinatentransformationen zwischen verschiedenen Karten reell-analytisch vorausgesetzt werden müssen (d.h. es existieren lokal konvergente Potenzreihen).

2. Ist  $(G, \circ)$  eine Lie-Gruppe, so folgt aus Definition 3.6, dass  $L_g := \text{comp}(g, \cdot)$

$$L_g: G \rightarrow G, \quad \delta \mapsto g \circ \delta =: L_g(\delta) \quad \text{(Linksmultiplikation)}$$

und  $R_\delta := \text{comp}(\cdot, \delta)$

$$R_\delta: G \rightarrow G, \quad g \mapsto g \circ \delta =: R_\delta(g) \quad \text{(Rechtsmultiplikation)}$$

$C^\infty$ -Abbildungen sind.

### Beispiel 3.8:

Seien  $X$  ein (reeller) endlich-dimensionaler Banachraum und

$$L[X] := \{g: X \rightarrow X \mid g \text{ linear \& beschränkt}\}$$

$$GL[X] := \{g \in L[X] \mid g \text{ invertierbar}\} \quad \text{(Menge linearer Automorphismen)}$$

Diese sind isomorph zu (lassen sich identifizieren durch),  $K := \text{dim}(X)$ ,  $X \cong \mathbb{R}^K$  und

$$L[X] \cong \{A \in \mathbb{R}^{K \times K}\}$$

$$GL[X] \cong \{A \in \mathbb{R}^{K \times K} \mid A \text{ invertierbar}\} =: GL_K(\mathbb{R}) \quad \text{(allgemeine lineare Gruppe vom Grad } K \text{ über dem Körper } \mathbb{R})$$

Für

$$G := GL_K(\mathbb{R})$$

$$\circ: G \times G \rightarrow G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \circ g_2 =: g_1 g_2 \quad \text{(Matrixmultiplikation)}$$

ist  $(G, \circ)$  offensichtlich eine Gruppe. Da  $G$  eine offene Teilmenge von  $L[X]$  ist, vererbt  $G$  die Topologie und differenzierbarkeitsdefinition des endl.-dimensionalen Raums  $L[X]$  der Dimension  $K^2$ . Folglich ist  $G$  eine endlich-dimensionale (reelle)  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Zuhilfenahme, dass  $(G, \circ)$  eine Lie-Gruppe ist, bleibt zu zeigen, dass  $\text{comp}$  und  $\text{inv}$   $C^\infty$ -Abbildungen sind.



**Ableitung von comp:**

Die Komposition (= Matrixmultiplikation)

$$\text{comp} : G \times G \rightarrow G, \quad (g, \delta) \mapsto \text{comp}(g, \delta) := g \circ \delta = g\delta$$

erfüllt für  $h_1, h_2 \in L[X]$

$$\text{comp}(g+h_1, \delta+h_2) = \text{comp}(g, \delta) + h_1\delta + g h_2 + h_1 h_2$$

Wegen  $h_1 h_2 = \mathcal{O}(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2) = \mathcal{O}(\|h\|^2)$  lautet die totale Ableitung  $d\text{comp}(g, \delta) \in L[L[X] \times L[X], L[X]]$

$$[d\text{comp}(g, \delta)](h_1, h_2) = h_1\delta + g h_2$$

denn (vgl. Fréchet-Differenzierbarkeit mit  $h = (h_1, h_2)$ )

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \left\| \text{comp}(g+h_1, \delta+h_2) - \text{comp}(g, \delta) - \underbrace{[d\text{comp}(g, \delta)](h_1, h_2)}_{= h_1\delta + g h_2} \right\| = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \|h_1 h_2\| \leq C \|h\|^2}$$

Insbesondere lauten die partiellen Ableitungen  $dL_g(\delta) \in L[L[X], L[X]]$  und  $dR_\delta(g) \in L[L[X], L[X]]$

$$dL_g(\delta) = L_g \quad \forall \delta \in G$$

$$dR_\delta(g) = R_\delta \quad \forall g \in G$$

Damit sind  $dL_g$  bzw.  $dR_\delta$  konstant in  $\delta$  bzw.  $g$  und die höheren Ableitungen verschwinden. Folglich gilt  $\text{comp} \in C^\infty(G \times G, G)$ .

**Ableitung von inv:**

Für die Inversion

$$\text{inv} : G \rightarrow G, \quad g \mapsto \text{inv}(g) := g^{-1}$$

erhalten wir aus der geometrischen Reihe für kleine  $h \in L[X]$

$$\text{inv}(g+h) = (g+h)^{-1} = (I_x + g^{-1}h)^{-1} g^{-1} = (I_x - g^{-1}h + \mathcal{O}(\|h\|^2)) g^{-1} = \text{inv}(g) - \underbrace{g^{-1}h g^{-1}}_{=[d\text{inv}(g)]h} + \mathcal{O}(\|h\|^2)$$

Daher lautet die totale Ableitung  $d\text{inv}(g) \in L[L[X], L[X]]$  (nach Fréchet)

(3.25\*)  $[d\text{inv}(g)]h = -g^{-1}h g^{-1}, \quad h \in L[X].$

Insbesondere gilt

$$d\text{inv}(g) = -L_{g^{-1}} \circ R_{g^{-1}}$$

und  $\text{inv} \in C^\infty(G, G)$ . Damit ist  $(G, \circ)$  eine Lie-Gruppe.

**3.3. Lie-Gruppen von Matrizen und ihre Lie-Algebren**

**Definition 3.9: (Lineare Gruppe)**

Sei  $X$  ein  $K$ -dimensionaler Banachraum. Eine **Lineare Gruppe**  $G$  ist eine abgeschlossene Untergruppe der **allgemeinen linearen Gruppe**

$$GL[X] := \{g \in L[X] \mid g \text{ invertierbar}\} \cong \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid g \text{ invertierbar}\} =: GL_n(\mathbb{R}) (= GL(\mathbb{R}^n))$$

Verknüpfung:  $\circ$  (Komposition von Funktionen) • (Matrixmultiplikation)

Ist  $\|\cdot\|_X$  eine Norm auf  $X$ , so versehen wir  $L[X]$  mit der **Operatornorm**

$$\|g\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|g x\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0 \\ \|x\|_X = 1}} \frac{\|g x\|_X}{\|x\|_X}, \quad g \in L[X].$$

Da  $X$  endl.-dimensional ist, sind alle Normen auf  $X$  äquivalent zueinander, d.h. sind  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  zwei Normen auf  $X$ , so gilt

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

Analog gilt dies für die Operatornorm des endl.-dimensionalen Raumes  $L[X]$ .

**Beispiel 3.10: (Orthogonale Gruppe)**

Für  $X = \mathbb{R}^d$  seien

$$L[\mathbb{R}^d] = \{g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid g \text{ linear \& beschränkt}\},$$

$$GL[\mathbb{R}^d] = \{g \in L[\mathbb{R}^d] \mid g \text{ invertierbar}\} \cong \{g \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid g \text{ invertierbar}\} =: GL(\mathbb{R}^d).$$

Betrachte die **orthogonale Gruppe**

$$O(\mathbb{R}^d) := \{g \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid g^T g = I_d\}$$



Wegen  $|\det g| = 1$  für  $g \in O(\mathbb{R}^d)$

$$(\det g)^2 = (\det g)(\det g) = (\det g^T)(\det g) = \det(g^T g) = \det I_d = 1, \quad g \in O(\mathbb{R}^d)$$

Können wir  $O(\mathbb{R}^d)$  zerlegen in

$$O(\mathbb{R}^d) = SO(\mathbb{R}^d) \cup SO^-(\mathbb{R}^d),$$

wobei

$$SO(\mathbb{R}^d) := \{g \in O(\mathbb{R}^d) \mid \det g = 1\} = \{g \in \mathbb{R}^{d,d} \mid g^T g = I_d, \det g = 1\}$$

die **spezielle orthogonale Gruppe** und

$$SO^-(\mathbb{R}^d) := \{g \in O(\mathbb{R}^d) \mid \det g = -1\} = \{g \in \mathbb{R}^{d,d} \mid g^T g = I_d, \det g = -1\}$$

ihren Gegenpart bezeichnet.  $O(\mathbb{R}^d)$  und  $SO(\mathbb{R}^d)$  sind lineare Gruppen,  $SO^-(\mathbb{R}^d)$  hingegen nicht, da sie nicht abgeschlossen ist. Für  $d=2$ , enthält die  $SO(\mathbb{R}^2)$  **Rotationen**

$$SO(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in (-\pi, \pi] \right\},$$

während  $SO^-(\mathbb{R}^2)$  **Reflexionen** enthält

$$SO^-(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in (-\pi, \pi] \right\}.$$

Für  $d=2$  ist die Gruppe  $SO(\mathbb{R}^d)$  abelsch, für  $d \geq 3$  ist sie hingegen nicht mehr abelsch.

**Beispiel 3.11: (Euklidische Gruppe)**

Jede affine Transformation  $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die **isometrisch** (oder: **längenerhaltend**) bzgl. der Euklidischen

Norm  $\|p\|_2 = \sqrt{p^T p}$ ,  $p \in \mathbb{R}^d$ , ist, d.h.

$$\|Tp_1 - Tp_2\|_2 = \|p_1 - p_2\|_2 \quad \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d$$

erfüllt, besitzt die Form

$$Tp = Qp + b, \quad Q \in O(\mathbb{R}^d), b \in \mathbb{R}^d.$$

Die Komposition zweier solcher Transformationen lautet

$$(T_1 \circ T_2)p = Q_1(T_2 p) + b_1 = \boxed{Q_1 Q_2} p + \boxed{Q_1 b_2 + b_1}, \quad Q_1, Q_2 \in O(\mathbb{R}^d), b_1, b_2 \in \mathbb{R}^d$$

und liefert die **Gruppenaktion**

$$(3.26) \quad (Q_1, b_1) \circ (Q_2, b_2) = (Q_1 Q_2, Q_1 b_2 + b_1)$$

Diese Transformationen bilden die **Euklidische Gruppe**

$$E(\mathbb{R}^d) := \{(Q, b) \mid Q \in O(\mathbb{R}^d), b \in \mathbb{R}^d\}.$$

Eine Untergruppe bildet die **spezielle Euklidische Gruppe**

$$(3.27) \quad SE(\mathbb{R}^d) := \{(Q, b) \mid Q \in SO(\mathbb{R}^d), b \in \mathbb{R}^d\} =: V_1$$

Da sich die Gruppenaktion (3.26) von der üblichen Verknüpfung des Produktes zweier Gruppen

$$(Q_1, b_1) \circ_2 (Q_2, b_2) = (Q_1 Q_2, b_1 + b_2)$$

unterscheidet, nennt man die Gruppen  $E(\mathbb{R}^d)$  und  $SE(\mathbb{R}^d)$  **semidirekte Produkte** und schreibt

$$E(\mathbb{R}^d) = O(\mathbb{R}^d) \ltimes \mathbb{R}^d, \quad SE(\mathbb{R}^d) = SO(\mathbb{R}^d) \ltimes \mathbb{R}^d.$$

Es ist vorteilhaft die Gruppe  $SE(\mathbb{R}^d)$  als Untergruppe von  $GL(\mathbb{R}^{d+1})$  darzustellen

$$(3.28) \quad SE(\mathbb{R}^d) = \left\{ \begin{pmatrix} Q & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1, d+1} \mid Q \in SO(\mathbb{R}^d), b \in \mathbb{R}^d \right\} =: V_2$$

wobei

$$GL(\mathbb{R}^{d+1}) = \{M \in \mathbb{R}^{d+1, d+1} \mid M \text{ invertierbar}\}$$

die **allgemeine lineare Gruppe** bezeichnet. Da die Matrixmultiplikation

$$(3.29) \quad \begin{pmatrix} Q_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{Q_1 Q_2} & \boxed{Q_1 b_2 + b_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit (3.26) verträglich ist, sind die Darstellungen (3.27) & (3.28) isomorph, d.h.

$$(V_1, \circ) \simeq (V_2, \cdot).$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (3.27) & (3.26) & (3.28) & (3.29) \end{matrix}$$

Zur Konstruktion von Karten auf Lie-Algebren benötigen wir die **Exponentialabbildung**

(3.30)  $\exp: L[X] \rightarrow GL[X], A \mapsto \exp(A) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$

Weiter benötigen wir die lokale Umkehrabbildung dieser Funktion, die durch den Logarithmus gegeben ist. Bekanntlich ist die Exponentialreihe für alle  $A \in L[X]$  absolut konvergent.

**Proposition 3.12:**

Es gelten die folgenden Aussagen

(i)  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ ,  $A \in L[X]$

(ii)  $\exp$  bildet eine Umgebung von  $0 \in L[X]$  homöomorph auf eine Umgebung von  $I_X \in GL[X]$  ab, genauer gelten:

a) Die Reihe  
(3.31)  $\log(B) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (B - I_X)^j$

ist für alle  $B \in L[X]$  mit  $\|B - I_X\| < 1$  absolut konvergent.

b) Für alle  $A \in L[X]$  mit  $\|A\| < \log 2$  gelten

$\|\exp(A) - I_X\| < 1$  und  $\log(\exp(A)) = A$  (d.h.  $\log$  ist Umkehrabbildung von  $\exp$ )

c) Für alle  $B \in L[X]$  mit  $\|B - I_X\| < \frac{\log 2}{1 + \log 2}$  gelten

$\|\log(B)\| < \log 2$  und  $\exp(\log(B)) = B$  (d.h.  $\exp$  ist Umkehrabbildung von  $\log$ )

d) Zu  $B_{\log 2}(0) \subset L[X]$  gibt es ein  $B_{\frac{\log 2}{1 + \log 2}}(I_X) \subset V \subset GL[X]$ , so dass die Abbildung  $\exp: B_{\log 2}(0) \rightarrow V$  homöomorph ist.

**Beweis: (Proposition 3.12)**

Zu (i): Dies ist ein Spezialfall vom Satz von Liouville. Sei  $Y(t)$  eine Fundamentalmatrix von

$y'(t) = A(t)y(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,

dann löst  $d(t) := \det Y(t)$  die Differentialgleichung

$d'(t) = \text{tr}(A(t))d(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$

Zu (ii): a) Aufgrund der Majorante

$\|\log(B)\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (B - I_X)^j \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|B - I_X\|^j$  (geometrische Reihe)

und der (absoluten) Konvergenz der geometrischen Reihe für  $\|B - I_X\| < 1$ , konvergiert die Reihe (3.31) für  $\|B - I_X\| < 1$  nach dem Majorantenkriterium absolut.

b) Für  $A \in L[X]$  mit  $\|A\| < \log 2$  gilt

$\|\exp(A) - I_X\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A\|^j = \exp(\|A\|) - 1 < 1$ .  
 $\underbrace{\exp(\|A\|)}_{< \log 2} - 1 < 1 \implies \exp(\log 2) = 2$

Somit ist  $\log(\exp(A))$  durch (3.31) mit  $B := \exp(A)$  und  $\exp(A)$  aus (3.30) wohldefiniert. Zum Nachweis von  $\log(\exp(A)) = A$  betrachte die Funktionen

$f(B) := \log(I_X + B) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} B^j$ ,  $B \in L[X], \|B\| < 1$

$g(A) := \exp(A) - I_X = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$ ,  $A \in L[X]$ ,

Es gilt

$f$  ist definiert in einer Umgebung von  $f(0_x) = 0_x$  und die Reihe konvergiert dort absolut,  
 $g$  " " " " " "  $g(0_x) = 0_x$  " " " " " " " " " " " " " " " "

Komponentenweise Differentiation liefert daher  $f'(B) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} B^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j B^j = (I_X + B)^{-1}$   $\|B\| < 1$

$g'(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!} A^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j = I_X + g(A)$

Betrachten wir nun die Komposition

$p(A) := f(g(A))$ ,  $A \in L[X]$

so liefert die Kettenregel

$p'(A) = f'(g(A)) g'(A) = (I_X + g(A))^{-1} (I_X + g(A)) = I_X$ .

also  $p(A) = A + C$  für ein  $C \in L[X]$ . Wegen  $g(0_x) = 0_x$  (da  $f(0_x) = 0_x = g(0_x)$ ) erhalten wir  $C = 0$  und somit

womit  $f$  die Umkehrabbildung von  $g$  ist, denn  $A = p(A) = f(g(A)) = \log(I_X + g(A)) = \log(\exp(A))$ ,



c) Für  $B \in L[X]$  mit  $\|B - I_X\| < \frac{\log 2}{1 + \log 2}$  gilt

$$\|\log(B)\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (B - I_X)^j \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|B - I_X\|^j = \|B - I_X\| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \|B - I_X\|^j = \|B - I_X\| \cdot \frac{1}{1 - \|B - I_X\|}$$

$$\|B - I_X\| < \frac{\log 2}{1 + \log 2} < 1$$

(geometrische Reihe)

$$= \|B - I_X\| \cdot \frac{1}{1 - \|B - I_X\|} < \frac{\log 2}{1 - \frac{\log 2}{1 + \log 2}} = \frac{\log 2}{\frac{1 + \log 2 - \log 2}{1 + \log 2}} = \log 2$$

Somit ist  $\exp(\log(B))$  durch (3.30) mit  $A := \log(B)$  und  $\log(B)$  aus (3.31) wohldefiniert. Der Nachweis von  $\exp(\log(B)) = B$  ist etwas schwieriger als in b) und wird ausgelassen.

d) Dies folgt unmittelbar aus b) & c). ■

### Bemerkung 3.13:

1) Der Logarithmus,

Wir zeigen nun für  $X = \mathbb{R}^d$ , dass die **Exponentialfunktion**  
 $\exp: L(\mathbb{R}^d) \rightarrow GL(\mathbb{R}^d), A \mapsto \exp(A) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$

die ~~Matrix~~ **Gruppe der schiefsymmetrischen Matrizen**

$$so(\mathbb{R}^d) := \{S \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid S^T = -S\}$$

auf die **spezielle orthogonale Gruppe**

$$SO(\mathbb{R}^d) = \{g \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid g^T g = I_d, \det g = 1\}$$

abbildet. Für  $d=2$  folgt dies aus

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(S_\theta) \in SO(\mathbb{R}^2), \quad S_\theta := \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Dies lässt sich über die Reihendarstellung für  $\sin, \cos, \exp$  oder durch Diagonalisierung von  $S_\theta$  zeigen. Aus Proposition 3.12 erhalten wir

$$S_\theta = \log(R_\theta), \quad \text{falls } \|S_\theta\|_2 = |\theta| < \log 2.$$

**Proposition 3.14:**

Die Abbildung

$$\exp: so(\mathbb{R}^d) \rightarrow SO(\mathbb{R}^d), \quad S \mapsto \exp(S)$$

ist surjektiv, d.h.

$$(3.34) \quad \forall g \in SO(\mathbb{R}^d) \exists S \in so(\mathbb{R}^d) \text{ mit } \sigma(S) \subseteq i[-\pi, \pi] : g = \exp(S).$$

Erfüllen die Eigenwerte  $\exp(i\theta_j)$  von  $g$  die Bedingung  $\max_{j=1, \dots, d} |\theta_j| < \log 2$ , so gilt (3.34) mit  $S = \log(g)$ .

**Beweis: (Proposition 3.14)**

Offenbar gilt

$$g \in SO(\mathbb{R}^d) \Rightarrow g^T \in SO(\mathbb{R}^d) \Rightarrow g^T g = I_d = g g^T \Rightarrow g \text{ normale Matrix.}$$

Aus dem "normal form theorem" erhalten wir daher zunächst

$$(3.35) \quad \forall g \in SO(\mathbb{R}^d) \exists Q \in O(\mathbb{R}^d) : Q^T g Q = \text{diag}(\underbrace{R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_p}}_{2p}, \underbrace{\pm 1, \dots, \pm 1}_{d-2p}), \quad \theta_j \in (0, \pi)$$

Wegen

$$1 = (\det Q)^2 \det g \stackrel{\det Q = \pm 1}{=} (\det Q^T)(\det g)(\det Q) \stackrel{\det Q = \det Q^T}{=} \det(Q^T g Q) \stackrel{\det(A)\det(B) = \det(AB)}{=} \det(\text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_p}, \pm 1, \dots, \pm 1)) \stackrel{(3.35)}{=} \det(Q^T g Q) = \det(\text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_p}, \pm 1, \dots, \pm 1))$$

$$= \left( \prod_{j=1}^p \det R_{\theta_j} \right) (\pm 1)^{d-2p} \stackrel{\det R_{\theta_j} = 1}{=} (\pm 1)^{d-2p} \stackrel{d-2p = L_+ + L_-}{=} (+1)^{L_+} (-1)^{L_-}$$

$(L_-: \text{Anzahl der } -1\text{'en})$   
 $(L_+: \text{Anzahl der } +1\text{'en})$

ist  $L_+$  gerade. Sammel die 1'en aus (3.35) in Matrizen  $R_0 = I_2$  und die -1'en in Matrizen  $R_\pi = -I_2$ , so lässt sich (3.35) schreiben als

$$(3.36) \quad Q^T g Q = \text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, 1_*) , \quad k := \lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \quad 1_* := \begin{cases} 1, & d \text{ ungerade} \\ \emptyset, & d \text{ gerade} \end{cases}$$

wobei  $\theta_j \in [0, \pi]$  für  $j=1, \dots, k$ . Für

$$\tilde{S} := \text{diag}(S_{\theta_1}, \dots, S_{\theta_k}, 0_*) , \quad 0_* := \begin{cases} 0, & d \text{ ungerade} \\ \emptyset, & d \text{ gerade} \end{cases}$$

erhalten wir daher  $\tilde{S}^T = -\tilde{S}$  und

$$(3.37) \quad Q^T g Q \stackrel{(3.36)}{=} \text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, 1_*) = \text{diag}(\exp(S_{\theta_1}), \dots, \exp(S_{\theta_k}), \exp(0_*)) = \exp(\text{diag}(S_{\theta_1}, \dots, S_{\theta_k}, 0_*)) = \exp(\tilde{S}).$$

Definiere  $S := Q \tilde{S} Q^T$ , so gilt  $S \in so(\mathbb{R}^d)$

$$S^T = (Q \tilde{S} Q^T)^T = Q \tilde{S}^T Q^T = -Q \tilde{S} Q^T = -S$$

und

$$(3.38) \quad \exp(S) = \exp(Q \tilde{S} Q^T) = Q \exp(\tilde{S}) Q^T \stackrel{(3.37)}{=} Q Q^T g Q Q^T = g. \quad Q Q^T = I_d$$

Nach Proposition 3.12 gilt

$$S \stackrel{\text{Prop 3.12}}{=} \log(\exp(S)) \stackrel{(3.38)}{=} \log(g),$$

Falls

$$\log 2 > \|S\|_2 = \|Q \tilde{S} Q^T\|_2 = \|\tilde{S}\|_2 = \max_{j=1, \dots, k} |\theta_j|.$$

Spektrenorm



Wir definieren nun den Tangentialraum einer Lie-Gruppe.

**Definition 3.15: (Tangentialraum, Lie-Algebra)**

Seien  $X$  ein (reeller) endl.-dimensionaler Banachraum und  $G \subseteq GL[X]$  eine lineare Gruppe mit Einselement  $\mathbb{1}$ . Dann definieren wir den **Tangentialraum (von  $G$  am Punkt  $\mathbb{1}$ )** durch

$$(3.39) \quad T_{\mathbb{1}}G := \{(\mathbb{1}, v) \mid \exists \varepsilon > 0 \wedge \exists g \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), G) \text{ mit } g(0) = \mathbb{1} : g'(0) = v \in G\}$$

Die Elemente  $v$  heißen **Tangentialvektoren (an  $\mathbb{1}$ )**. Die Teilmenge

$$(3.40) \quad \mathfrak{g} := \{v \in L[X] \mid (\mathbb{1}, v) \in T_{\mathbb{1}}G\} = T_{\mathbb{1}}G$$

heißt **Lie-Algebra (von  $G$ )**.

**Bemerkung 3.16:**

Der Aufpunkt  $\mathbb{1}$  des Tangentialraums wird in dessen Elementen  $(\mathbb{1}, v)$  mitgeführt. Später betrachten wir Tangentialräume  $T_g G$  an beliebigen Punkten  $g \in G$ .

**Proposition 3.17: (Eigenschaften der Lie-Algebra)**

Seien  $X$  ein (reeller) endl.-dimensionaler Banachraum und  $G \subseteq GL[X]$  eine lineare Gruppe mit Einselement  $\mathbb{1}$ . Dann erfüllt die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  aus (3.40) die folgenden Eigenschaften:

(i):  $\mathfrak{g}$  ist ein Vektorraum (über  $\mathbb{R}$ )

$$(3.41) \quad (ii) : [M_1, M_2] := M_1 M_2 - M_2 M_1 \in \mathfrak{g} \quad \forall M_1, M_2 \in \mathfrak{g} \quad ([\cdot, \cdot]: G \times G \rightarrow G \text{ heißt Kommutator (auf } G))$$

$$(3.42) \quad (iii) : [M_1, M_2] = -[M_2, M_1] \quad \forall M_1, M_2 \in \mathfrak{g} \quad (\text{Schiefssymmetrie})$$

$$(3.43) \quad [[M_1, M_2], M_3] + [[M_2, M_3], M_1] + [[M_3, M_1], M_2] = 0 \quad \forall M_1, M_2, M_3 \in \mathfrak{g} \quad (\text{Jakobi-Identität})$$

**Beweis: (Proposition 3.17)**

Zu (i): Seien  $(\mathbb{1}, M_1), (\mathbb{1}, M_2) \in T_{\mathbb{1}}G$ , d.h.  $M_1, M_2 \in \mathfrak{g}$ , dann gilt für  $j=1,2$ :

$$(3.44) \quad \exists \varepsilon_j > 0 \wedge \exists g_j \in C^1((-\varepsilon_j, \varepsilon_j), G) \text{ mit } g_j(0) = \mathbb{1} : g_j'(0) = M_j \in G$$

Für  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon := \min\{\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}, \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2}\}$  betrachte  $g(t) := g_1(\alpha_1 t) g_2(\alpha_2 t)$ ,  $|t| < \varepsilon$ , dann gilt  $g(0) = \mathbb{1}$  und

$$g'(t) = \alpha_1 g_1'(\alpha_1 t) g_2(\alpha_2 t) + \alpha_2 g_1(\alpha_1 t) g_2'(\alpha_2 t), \quad |t| < \varepsilon,$$

also  $g'(0) = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 \in G$ .

Somit ist  $(\mathbb{1}, \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) \in T_{\mathbb{1}}G$ , also  $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 \in \mathfrak{g}$ .

Zu (ii): Seien  $g_1, g_2$  wie in (3.44). Für festes, kleines  $|\tau|$  betrachte

$$g(t) := g_1(\tau) g_2(t) g_1(\tau)^{-1}, \quad |t| < \varepsilon_2.$$

Dann gilt

$$g(0) = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad g'(0) = g_1(\tau) g_2'(0) g_1(\tau)^{-1} = g_1(\tau) M_2 g_1(\tau)^{-1}$$

Setzen wir  $\lambda(\tau) := g_1(\tau) M_2 g_1(\tau)^{-1}$ , so erhalten wir aus (3.25\*)

$$\lambda'(\tau) = g_1'(\tau) M_2 g_1(\tau)^{-1} - g_1(\tau) M_2 g_1'(\tau) g_1(\tau)^{-1}$$

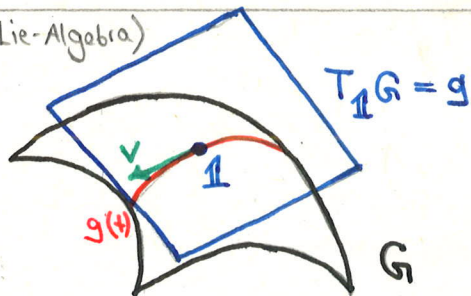
und daher

$$\lambda'(0) = M_1 M_2 - M_2 M_1 \in \mathfrak{g}.$$

Zu (iii): Die erste Gleichung folgt direkt aus (ii). Die zweite Gleichung folgt durch Einsetzen von (3.41) in (3.43)

$$\begin{aligned} & [[M_1, M_2], M_3] + [[M_2, M_3], M_1] + [[M_3, M_1], M_2] \\ &= (M_1 M_2 M_3 - M_2 M_1 M_3) - (M_3 M_1 M_2 - M_3 M_2 M_1) + (M_2 M_3 M_1 - M_3 M_2 M_1) - (M_1 M_2 M_3 - M_1 M_3 M_2) \\ &+ (M_3 M_1 M_2 - M_1 M_3 M_2) - (M_2 M_3 M_1 - M_2 M_1 M_3) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Abbildung: (Tangentialraum, Lie-Algebra)



$v$  Geschwindigkeitsvektor der Kurve  $g(\cdot)$  zuzeit  $G$  differenzierbare Mannigfaltigkeit

### Korollar 3.18:

Die Lie-Algebra der **speziellen orthogonalen Gruppe**  $SO(\mathbb{R}^d)$  ist die additive **Gruppe der schiefsymmetrischen Matrizen**  $so(\mathbb{R}^d)$ , d.h.

$$G = SO(\mathbb{R}^d), \quad \mathfrak{g} = so(\mathbb{R}^d), \quad d \geq 2.$$

### Beweis: (Korollar 3.18)

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $g \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), SO(\mathbb{R}^d))$  mit  $g(0) = I_d =: \mathbb{1}$ . Differentiation von

$$g(t)^T g(t) = I_d$$

bei  $t=0$  liefert

$$0 \stackrel{(PR)}{=} g'(t)^T g(t) + g(t)^T g'(t), \quad 0 = g'(0)^T + g'(0).$$

Somit  $g'(0) \in so(\mathbb{R}^d)$ .

Sei  $S \in so(\mathbb{R}^d)$  und definiere  $g(t) := \exp(tS)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $g(0) = I_d = \mathbb{1}$  und aus  $[S^T, S] = 0$  (da  $S^T = -S$ ) folgt

$$g(t)^T g(t) = \exp(tS)^T \exp(tS) = \exp(tS^T) \exp(tS) \stackrel{[S^T, S]=0}{=} \exp(t(S+S^T)) \stackrel{S^T=-S}{=} \exp(0) = I_d = \mathbb{1}.$$

Weiter gilt nach Prop. 3.12 (i)

$$\det(g(t)) = \det(\exp(tS)) = \exp(\text{tr}(tS)) = \exp(t \underbrace{\text{tr}(S)}_{=0}) = 1.$$

Damit gilt  $g(t) \in SO(\mathbb{R}^d)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , und  $g \in C^1(\mathbb{R}, SO(\mathbb{R}^d))$  mit  $g'(t) = \exp(tS)S$ ,  $v := g'(0) = S$ , also  $v \in \mathfrak{g}$ .

Das folgende Theorem liefert den Grund für die Einführung der Exponentialfunktion.

### Theorem 3.19:

Seien  $X$  ein (reeller) endl.-dimensionaler Banachraum,  $G \subseteq GL[X]$  eine lineare Gruppe mit Einselement  $\mathbb{1}$  und  $\mathfrak{g}$  die Lie-Algebra von  $G$ . Dann gilt

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad A \mapsto \exp(A) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j.$$

**Beweis: (Theorem 3.19, ex)** (ex: wurde in der Vorlesung ausgelassen)

Sei  $n = \dim \mathfrak{g}$  und sei  $\{M_1, \dots, M_n\}$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$ . Wegen  $M_j \in \mathfrak{g}$  gilt nach (3.39), (3.40) für  $j=1, \dots, n$

$$\exists \varepsilon_j > 0 \wedge \exists g_j \in C^1((-\varepsilon_j, \varepsilon_j), G) \text{ mit } g_j(0) = \mathbb{1} : g_j'(0) = M_j.$$

Wir definieren nun die Abbildung

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow G, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto g_1(x_1) \cdots g_n(x_n) =: g(x)$$

und wählen einen Teilraum (Untervektorraum)  $Y$  von  $L[X]$  derart, dass  $L[X] = \mathfrak{g} \oplus Y$ . Nun setzen wir  $g$  wie folgt auf  $\mathbb{R}^n \otimes Y$  fort:

$$f: \mathbb{R}^n \otimes Y \rightarrow L[X], \quad (x, y) \mapsto g(x)(I_x + y).$$

Offensichtlich erfüllt  $f$  die Eigenschaften

- $f(0, 0) = I_x$
- $Df(0, 0)(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j M_j + y, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in Y$  (Nachweis: leichte Rechnung)
- $Df(0, 0)$  ist invertierbar
- $f \in C^0(\mathbb{R}^n \otimes Y, L[X])$  (nach Wahl von  $Y$ )

Nach dem **Satz über implizite Funktionen** gilt daher:

$$\exists U(I_x) \subseteq L[X] \text{ offen} \wedge \exists \text{lokale Inverse } f^{-1} \in C^0(U(I_x), \mathbb{R}^n \otimes Y) : f^{-1}(B) = (f_1^{-1}(B), f_2^{-1}(B)) \in \mathbb{R}^n \otimes Y \quad \forall B \in U(I_x)$$

Insbesondere gilt nach der Definition von  $f$ :

$$f_2^{-1}(g(x + \tau z)(I_x + y)) = y, \quad x, z \in \mathbb{R}^n, y \in Y, \tau \in \mathbb{R} \text{ alle klein.}$$

Differentiation bzgl.  $\tau$  bei  $\tau=0$  liefert:

$$Df_2^{-1}(g(x)(I_x + y))(D_x g(x)z)(I_x + y) = 0, \quad x, z \in \mathbb{R}^n, y \in Y \text{ alle klein.}$$

Da diese Beziehung linear in  $z$  ist, gilt sie sogar für alle  $z \in \mathbb{R}^n$ .

Für  $z \in \mathbb{R}^n$  beschreibt

$$\tau \mapsto g(x + \tau z)g(x)^{-1}$$

eine glatte Kurve in  $G$ , die durch  $\mathbb{1}$  verläuft mit zugehörigem Tangentialvektor



$$A(x)z := \left[ \frac{d}{d\tau} g(x+\tau z)g(x)^{-1} \right]_{\tau=0} = (D_x g(x)z)g(x)^{-1} \in \mathfrak{g}$$

Für  $x=0$  erhalten wir die lineare Abbildung

$$A(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}, \quad A(0)z = D_x g(0)z = \sum_{j=1}^n z_j M_j.$$

Diese Abbildung ist invertierbar, damit ist  $A(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$  nach dem Banach-perturbation theorem auch invertierbar für kleine  $x$ . Es gilt

$$Df_z^{-1}(g(x)(I_x + y))(A(x)z)g(x)(I_x + y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in Y \text{ alle klein, } z \in \mathbb{R}^n$$

Da  $A(x)$  invertierbar ist, ersetzen wir  $A(x)z$  durch ein beliebiges Element  $\mu \in \mathfrak{g}$ . Da  $f$  ein lokales Diffeomorphismus ist, können wir  $g(x)(I_x + y)$  durch ein beliebiges Element  $B \in U(I_x)$  ersetzen. Es folgt

$$Df_z^{-1}(B)\mu = 0, \quad \forall \mu \in \mathfrak{g} \quad \forall B \in U(I_x).$$

Für  $\mu \in \mathfrak{g}$  betrachte die Kurve

$$B : \mathbb{R} \rightarrow L[X], \quad B(\tau) := \exp(\tau\mu),$$

dann erhalten wir

$$0 = Df_z^{-1}(\exp(\tau\mu))\mu = \frac{d}{d\tau} [f_z^{-1}(\exp(\tau\mu))] \mu, \quad |\tau| \text{ klein}$$

und somit

$$f_z^{-1}(\exp(\tau\mu)) = f_z^{-1}(\exp(0\mu)) = f_z^{-1}(I_x) = 0.$$

Nach Definition von  $f$  gilt daher

$$\exp(\tau\mu) = g(f_z^{-1}(\exp(\tau\mu))) \in G \quad \forall \tau \in (-\tau_0, \tau_0) \text{ für ein } \tau_0 > 0.$$

Für ein allgemeines  $\tau \in \mathbb{R}$  wähle  $k \in \mathbb{N}$  derart, dass  $\frac{|\tau|}{k} < \tau_0$ , dann gilt wegen der Funktionalgleichung von  $\exp$

$$\exp(\tau\mu) = \exp\left(k \frac{\tau}{k} \mu\right) = \left(\exp\left(\frac{\tau}{k} \mu\right)\right)^k \in G. \quad \blacksquare$$

### Beispiel 3.20:

Für  $a, b > 0$  und

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (\text{Rotationsmatrix})$$

definiere die lineare Gruppe

$$G_{a,b} = \left\{ M(\tau) = \begin{pmatrix} R_{a\tau} & 0 \\ 0 & R_{b\tau} \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(\mathbb{R}^4).$$

Geometrisch beschreibt diese Gruppe eine Kurve auf dem 2-Torus

$$\Pi^2 = \left\{ \begin{pmatrix} R_{\tau_1} & 0 \\ 0 & R_{\tau_2} \end{pmatrix} : \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

die mit der Geschwindigkeit  $a$  um die eine Achse und Geschwindigkeit  $b$  um die andere Achse rotiert.

Gilt  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ , so ist die Kurve geschlossen, die Lie-Gruppe abgeschlossen und  $G_{a,b}$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\Pi^2$ .

Gilt  $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ , so ist  $G_{a,b}$  dicht in  $\Pi^2$  und jede  $GL(\mathbb{R}^4)$ -Umgebung eines festen Elements  $M(\tau) \in G_{a,b}$  enthält unendlich viele Zweige von  $G_{a,b}$ , die sich auf  $M(\tau)$  anhäufen.  $\blacksquare$

Beachte: Ist die Gruppe  $G$  abgeschlossen, so stimmen die **Gruppentopologie** und die **relative Topologie** von  $G$  in  $L[X]$  überein.

Wir definieren nun eine Topologie und Karten auf einer linearen Gruppe  $G$ . Dies macht aus  $G$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit (sogar eine  $C^\omega$ -Mannigfaltigkeit). Dazu verwenden wir die relative Topologie von  $\mathfrak{g}$  in  $L[X]$  und die Exponentialabbildung zur Parametrisierung.

### Topologie: Definition 3.21:

Sei  $X$  ein (reelles) endl.-dimensionaler Banachraum und  $G$  eine lineare Gruppe.

1): Eine Menge  $U \subseteq G$  heißt **Umgebung (eines Elements  $g \in G$ )**, falls

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(g) := \{ g \exp(\mu) : \mu \in B^{\mathfrak{g}}(0, \varepsilon) \} \subseteq U.$$

Hierbei bezeichnet

$$B^{\mathfrak{g}}(0, \varepsilon) := \{ \mu \in \mathfrak{g} : \|\mu\| < \varepsilon \}$$

die Kugel in  $\mathfrak{g}$  mit Zentrum 0 und Radius  $\varepsilon > 0$ .

2): Eine Menge  $M \subseteq G$  heißt **offen**, falls  $M$  eine Umgebung jedes ihrer Elemente  $g \in M$  ist.

### Bemerkung 3.22:

Es lässt sich zeigen, dass dies eine Topologie auf  $G$  erzeugt, die sogenannte **Gruppentopologie**. Der topologische Raum  $G$  erfüllt zudem das Hausdorffsche Trennungsaxiom und ist folglich ein **Hausdorff-Raum**:

Beweis: Seien  $g_1, g_2 \in G$  mit  $g_1 \neq g_2$ . Es gilt die Abschätzung

$$\|g_1 \exp(\mu_1) - g_2 \exp(\mu_2)\| \geq \|g_1 - g_2\| - \|g_1(1 - \exp(\mu_1))\| - \|g_2(1 - \exp(\mu_2))\| \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{g}.$$

Da  $\exp$  stetig ist, wird die rechte Seite positiv, falls  $\|\mu_1\|$  und  $\|\mu_2\|$  hinreichend klein sind. Damit gilt

$$U_\varepsilon(g_1) \cap U_\varepsilon(g_2) = \emptyset \quad \text{für } \varepsilon > 0 \text{ klein. } \blacksquare$$

### Karten auf $G$ :

Mithilfe der (lokalen)  $\log$ -Funktion aus Prop. 3.12 definieren wir eine Karte auf  $U_\varepsilon(\mathbb{1})$ ,  $\varepsilon < \log 2$ , durch

$$\varphi_{\varepsilon, \mathbb{1}} := \log : U_\varepsilon(\mathbb{1}) \rightarrow B^{\mathfrak{g}}(0, \varepsilon), \quad \gamma = \exp(\mu) \mapsto \log(\gamma) = \mu.$$

Die Karte in der Nähe eines beliebigen Punktes  $g \in G$  ist gegeben durch

$$(3.45) \quad \varphi_{\varepsilon, g} := \varphi_{\varepsilon, \mathbb{1}} \circ L_{g^{-1}} : U_\varepsilon(g) \rightarrow B^{\mathfrak{g}}(0, \varepsilon), \quad \gamma = \exp(\mu) \mapsto \varphi_{\varepsilon, g}(g \exp(\mu)) = \mu$$

### Kartenübergänge:

$$(3.46) \quad \varphi_{\varepsilon_2, g_2} \circ \varphi_{\varepsilon_1, g_1}^{-1} = \varphi_{\varepsilon_2, \mathbb{1}} \circ L_{g_2^{-1}} \circ L_{g_1} \circ \varphi_{\varepsilon_1, \mathbb{1}}^{-1} = \log(g_2^{-1} g_1 \exp(\cdot))$$

Sind  $C^\infty$ -kompatibel auf  $\varphi_{\varepsilon_1, g_1}(U_{\varepsilon_1}(g_1) \cap U_{\varepsilon_2}(g_2)) \subseteq B^{\mathfrak{g}}(0, \varepsilon_1)$  offen. Offensichtlich gilt zudem die Überdeckungseigenschaft

$$G = \bigcup_{\substack{g \in G \\ \varepsilon < \log 2}} U_\varepsilon(g).$$

Wir erhalten:

### Proposition 3.23:

Sei  $X$  ein (reeller) endl.-dimensionaler Banachraum,  $G$  eine lineare Gruppe,  $T$  die von Def. 3.21 erzeugte Topologie auf  $G$ ,  $(U_\varepsilon(g), \varphi_{\varepsilon, g})$  für  $g \in G$  &  $\varepsilon < \log 2$  Karten auf  $G$  entsprechend (3.45) mit Kartenübergängen  $\varphi_{\varepsilon_2, g_2} \circ \varphi_{\varepsilon_1, g_1}^{-1}$  aus (3.46). Dann ist  $(G, \tau)$  (kürz:  $G$ ) eine Lie-Gruppe.

### 3.4. Tangentialabbildungen, Tangentialbündel und Flüsse auf Mannigfaltigkeiten.