Wellenlösungen in Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2016
Präsenzübungsblatt 1

Dr. Denny Otten
M.Sc. Christian Döding

Besprechung: Dienstag, 26.04.2016, 14:15-15:45 Uhr

Präsenzaufgabe 1 (Nagumo Gleichung).
Gegeben sei die **Nagumo-Gleichung**

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(b-u), \quad x \in \mathbb{R},\, t \geqslant 0$$

mit $0 < b < 1$ und $u = u(x,t) \in \mathbb{R}$.

a) Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(1-u)(u-b) &&, x \in \Omega,\, t \in (0,T], \\ u(\cdot,0) &= u_0 &&, x \in \bar{\Omega},\, t = 0, \\ u_x &= 0 &&, x \in \partial\Omega,\, t \in [0,T], \end{aligned}$$

auf dem räumlichen Gebiet $\Omega = (-50, 50)$ bis zur Endzeit $T = 100$ mit Anfangsfunktion

$$u_0(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\frac{x}{\sqrt{2}})}$$

und Parameter $b = \frac{1}{4}$ numerisch mit Comsol Multiphysics. Für die räumliche Diskretisierung verwenden Sie **lineare Lagrange Elemente** mit **maximaler Elementgröße** $\Delta x = 0.1$. Für die zeitliche Diskretisierung nutzen Sie die **BDF Methode** mit **maximaler Ordung 2**, **intermediate time steps**, **Schrittweite** $\Delta t = 0.1$, **relativer Toleranz** $\mathrm{rtol} = 10^{-3}$ und **absoluter Toleranz** $\mathrm{atol} = 10^{-4}$ mit **unscaled global method**. Die nichtlinearen Gleichungssysteme sollen mit dem Newtonverfahren gelöst werden, d.h. **automatic (Newton)**.

b) Zur Visualisierung der Ergebnisse fertigen Sie einen Plot der Lösung u zu den Zeiten $t = 0, 20, 40, 60, 80, 100$ an. Erzeugen Sie zusätzlich einen (x,t)-Plot, indem die Werte der Lösung u farblich geplottet werden. Zuletzt erstellen Sie ein Movie im gif-Format, dass den zeitlichen Verlauf der Lösung u zeigt. Benutzten Sie dabei eine Anzahl von insgesamt 100 Frames mit 10 fps.

Präsenzaufgabe 2 (FitzHugh-Nagumo System).
Gegeben sei das **FitzHugh-Nagumo System**

$$\begin{pmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,xx} \\ u_{2,xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 - \zeta u_1^3 - u_2 + \alpha \\ \beta(\gamma u_1 - \delta u_2 + \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},\, t \geqslant 0$$

für $D \geqslant 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbb{R}$, $\zeta \neq 0$ und $u_i = u_i(x,t) \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$. Schreibt man

$$u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\, f(u) = \begin{pmatrix} u_1 - \zeta u_1^3 - u_2 + \alpha \\ \beta(\gamma u_1 - \delta u_2 + \varepsilon) \end{pmatrix},$$

so kann das FitzHugh-Nagumo System auch geschrieben werden als

$$u_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} u_{xx} + f(u), \quad x \in \mathbb{R},\, t \geqslant 0.$$

a) Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,xx} \\ u_{2,xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 - \zeta u_1^3 - u_2 + \alpha \\ \beta(\gamma u_1 - \delta u_2 + \varepsilon) \end{pmatrix} && , x \in \Omega,\ t \in (0, T], \\
\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_0^{(1)} \\ u_0^{(2)} \end{pmatrix} && , x \in \bar{\Omega},\ t = 0, \\
\begin{pmatrix} u_{1,x} \\ u_{2,x} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} && , x \in \partial\Omega,\ t \in [0, T],
\end{aligned}$$

auf dem räumlichen Gebiet $\Omega = (-60, 60)$ bis zur Endzeit $T = 80$ und Anfangsfunktion

$$u_0^{(1)}(x) = \begin{cases} u_-^{(1)} & , x < 0 \\ u_+^{(1)} & , x \geqslant 0 \end{cases}, \quad u_0^{(2)}(x) = \begin{cases} u_-^{(2)} & , x < 0 \\ u_+^{(2)} & , x \geqslant 0 \end{cases},$$

mit den asymptotischen Zuständen

$$u_- = \begin{pmatrix} 1.1877 \\ 0.6292 \end{pmatrix}, \quad u_+ = \begin{pmatrix} -1.5644 \\ -0.2881 \end{pmatrix},$$

sowie den Parametern

$$D = \frac{1}{10}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{2}{25}, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3, \quad \varepsilon = \frac{7}{10}, \quad \zeta = \frac{1}{3}$$

numerisch mit Comsol Multiphysics. Für die räumliche Diskretisierung verwenden Sie **lineare Lagrange Elemente** mit **maximaler Elementgröße** $\Delta x = 0.1$. Für die zeitliche Diskretisierung nutzen Sie die **BDF Methode** mit **maximaler Ordung 2**, **intermediate time steps**, **Schrittweite** $\Delta t = 0.1$, **relativer Toleranz** $\mathrm{rtol} = 10^{-3}$ und **absoluter Toleranz** $\mathrm{atol} = 10^{-4}$ mit **unscaled global method**. Die nichtlinearen Gleichungssysteme sollen mit dem Newtonverfahren gelöst werden, d.h. **automatic (Newton)**.

b) Zur Visualisierung der Ergebnisse fertigen Sie jeweils einen Plot der Lösungskomponenten u_1 bzw. u_2 zu den Zeiten $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ an. Erzeugen Sie zusätzlich jeweils einen (x, t)-Plot, indem die Werte der Lösungkomponente u_1 bzw. u_2 farblich geplottet werden. Zuletzt erstellen Sie zwei Movies im gif-Format, die den zeitlichen Verlauf der Lösungskomponenten u_1 bzw. u_2 zeigen. Benutzten Sie dabei eine Anzahl von insgesamt 100 Frames mit 10 fps.