Wellenlösungen in Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2016
Präsenzübungsblatt 2

Dr. Denny Otten
M.Sc. Christian Döding

Besprechung: Dienstag, 31.05.2016, 14:15-15:45 Uhr

Präsenzaufgabe 3 (Komplexwertige Gleichungen).
Gegeben sei die **skalare komplexwertige Gleichung**

$$(1) \qquad u_t = \alpha u_{xx} + g(x,|u|)u, \quad x \in \mathbb{R},\, t \geqslant 0,$$

für $\alpha \in \mathbb{C}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ und $u = u(x,t) \in \mathbb{C}$.

a) Zerlegen Sie die komplexen Größen α, g, u in Real- und Imaginärteil

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad g = g_1 + ig_2, \quad u = u_1 + iu_2, \quad \alpha_j, g_j, u_j \in \mathbb{R}$$

und transformieren Sie (1) via $U_1 := u_1$, $U_2 := u_2$ auf in 2-dimensionales reelles System

$$(2) \qquad U_t = AU_{xx} + G(x,|U|)U, \quad x \in \mathbb{R},\, t \geqslant 0,$$

wobei $U = (U_1, U_2)^\top \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ und die Nichtlinearität $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2,2}$ an. Wie lautet die Anfangsbedingung für (2), wenn zusätzlich zu (1) die Bedingung $u(x,0) = u_0(x)$ für ein $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben ist?

b) Bestimmen Sie für die komplexwertige Nichtlinearität

$$(3) \qquad g(x,|u|) = \delta V(x) + \mu + \beta|u|^2 + \gamma|u|^4, \quad \beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C},\, \mu \in \mathbb{R},\, V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

unter Verwendung der Zerlegung

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad \delta = \delta_1 + i\delta_2, \quad \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}$$

die einzelnen Komponenten $G_{ij} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von G für $i,j = 1,2$.

Präsenzaufgabe 4 (Implementierung komplexer Anfangswertaufgaben).
Nutzen Sie Comsol Multiphysics und implementieren Sie zunächst die **Anfangswertaufgabe**

$$(4) \qquad \begin{aligned} U_t &= Au_{xx} + G(x,|U|)U, && x \in \Omega,\, t \in (0,T], \\ U(x,0) &= U_0(x), && x \in \bar{\Omega},\, t = 0, \\ U_x(x,t) &= 0, && x \in \partial\Omega,\, t \in [0,T], \end{aligned}$$

auf dem Gebiet $\Omega = (-20,20)$ für $T = 50$. Hiebei seien A und G wie in Aufgabe 3a) und die Komponenten G_{ij} wie in Aufgaben 3b) zu wählen. Legen Sie hierzu globale Parameter für die Größen $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \mu \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$, und lokale Variablen für die Anfangsfunktion $U_{0,j}$ und das Potential V an, die unten in Teil a)-c) initialisiert werden. Verwenden Sie für die räumliche Diskretisierung lineare Lagrange Elemente mit maximaler Elementgröße $\triangle x = 0.1$. Nutzen Sie für die zeitliche Diskretisierung das BDF-Verfahren der (maximalen) Ordnung 2 mit Zeitschrittweite $\triangle t = 0.1$, zwischenliegenden Zeitschritten, relativer Toleranz rtol $= 10^{-3}$ und absoluter Toleranz atol $= 10^{-5}$ (mit unscaled global method). Die nichtlinearen Gleichungssysteme sollen mit dem Newtonverfahren gelöst werden, d.h. automatic (Newton). Lösen Sie nun Ihr System (4) für die folgenden Parametersätze, Potentiale und Anfangsdaten.

a) Komplexe Ginzburg-Landau Gleichung:
i) **oszillierender Puls**:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3 + i, \quad \gamma = -\frac{11}{4} + i, \quad \delta = 0, \quad \mu = -\frac{1}{10}, \quad V = 0, \quad u_0 = \frac{\frac{5}{2}}{1 + \frac{x^2}{25}}.$$

ii) **wandernde-oszillierende Front**:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3+i, \quad \gamma = -\frac{11}{4}+i, \quad \delta = 0, \quad \mu = -\frac{1}{10}, \quad V = 0, \quad u_0 = \frac{\frac{2}{11}\left(3 + \sqrt{9 + 11\mu}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}.$$

iii) **pulsierender Puls**:

$$\alpha = \frac{2}{25}+\frac{1}{2}i, \quad \beta = \frac{33}{50}+i, \quad \gamma = -\frac{1}{10}-\frac{1}{10}i, \quad \delta = 0, \quad \mu = -\frac{1}{10}, \quad V = 0, \quad u_0 = \mathrm{sech}(x).$$

b) Nichtlineare Schrödingergleichung:
i) **oszillierender Puls**:

$$\alpha = i, \quad \beta = 2i, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \mu = 0, \quad V = 0, \quad u_0 = \mathrm{sech}(x).$$

ii) **wandernder-oszillierender Puls**:

$$\alpha = i, \quad \beta = \frac{1}{2}i, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \mu = 0, \quad V = 0, \quad u_0 = \mathrm{sech}\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(i\frac{x}{2}\right).$$

c) Gross-Pitaevskii-Gleichung:
i) **oszillierender Puls**:

$$\alpha = \frac{1}{2}i, \quad \beta = -i, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -i, \quad \mu = 0, \quad V = \frac{x^2}{2}, \quad u_0 = \pi^{-\frac{1}{4}}\exp(-\frac{x^2}{2}).$$

Fertigen Sie zur Visualisierung Ihrer Ergebnisse einen Plot für die Komponenten $U_1, U_2, |U|$ zu verschiedenen Zeitinstanzen an (insgesamt 3 Plots). Erzeugen Sie zusätzlich für jeden dieser drei Komponenten einen (x,t)-Plot, indem die Funktionswerte farblich geplotted werden (insgesamt 3 Plots). Zuletzt erstellen Sie jeweils ein Movie im gif-Format, dass den zeitlichen Verlauf der Komponenten $U_1, U_2, |U|$ zeigt (insgesamt 3 Movies). Benutzen Sie dabei eine Anzahl von insgesamt 100 Frames mit 10 fps.