Wellenlösungen in Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2016
Präsenzübungsblatt 3

Dr. Denny Otten
M.Sc. Christian Döding

Besprechung: Dienstag, 14.06.2016, 14:15-15:45 Uhr

Präsenzaufgabe 5 (Kubisch-quintische Ginzburg-Landau Gleichung: Rotierende Wellen).
Betrachten Sie die **kubisch-quintische Ginzburg-Landau Gleichung**

$$u_t = \alpha\triangle u + \delta u + \beta|u|^2 u + \gamma|u|^4 u, \quad x \in \mathbb{R}^2,\, t \geqslant 0 \tag{1}$$

für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ und $u = u(x,t) \in \mathbb{C}$. In a) und b) sollen Sie das zugehörige reelle System von (1) in Comsol Multiphysics implementieren. Dazu zerlegen Sie

$$u = u_1 + iu_2, \quad \alpha = a_1 + ia_2, \quad \beta = b_1 + ib_2, \quad \gamma = c_1 + ic_2$$

mit $u_1, u_2, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und definieren Sie

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

mit $A, B, C \in \mathbb{R}^{2,2}$ und $U = U(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Das zugehörige reelle System von (1) lässt sich dann schreiben als

$$U_t = A\triangle U + \delta U + B|U|^2 U + C|U|^4 U, \quad x \in \mathbb{R}^2,\, t \geqslant 0.$$

a) Nutzen Sie Comsol Multiphysics und implementieren Sie zunächst die **Anfangswertaufgabe**

$$\begin{aligned} U_t &= A\triangle U + \delta U + B|U|^2 U + C|U|^4 U &&, x \in \Omega,\, t \in (0,T], \\ U(0) &= U_0 &&, x \in \bar{\Omega},\, t = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= 0 &&, x \in \partial\Omega,\, t \in [0,T], \end{aligned} \tag{2}$$

auf dem Gebiet $\Omega = B_{10}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 10\}$ für $T = 50$. Legen Sie hierzu globale Parameter für die Größen $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta, \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, und eine lokale Variable für die Anfangsfunktion $U_{0,j}$ an, die unten in Teil b) initialisiert werden. Verwenden Sie für die räumliche Diskretisierung lineare Lagrange Elemente mit maximaler Elementgröße $\triangle x = 0.8$. Nutzen Sie für die zeitliche Diskretisierung das BDF-Verfahren der (maximalen) Ordnung 2 mit Zeitschrittweite $\triangle t = 0.1$, zwischenliegenden Zeitschritten, relativer Toleranz rtol $= 10^{-2}$ und absoluter Toleranz atol $= 10^{-4}$ (mit unscaled global method). Die nichtlinearen Gleichungssysteme sollen mit dem Newtonverfahren gelöst werden, d.h. automatic (Newton).

b) (**Rotierender Soliton**)
Lösen Sie nun das System (2) für die folgenden Parameter und Anfangsdaten:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad \beta = \frac{5}{2} + i, \quad \gamma = -1 - \frac{1}{10}i, \quad \delta = -\frac{1}{2},$$
$$U_{0,1}(x) = \frac{x_1}{5}\exp\left(-\frac{|x|^2}{49}\right), \quad U_{0,2}(x) = \frac{x_2}{5}\exp\left(-\frac{|x|^2}{49}\right).$$

c) Fertigen Sie zur Visualisierung Ihrer Ergebnisse einen 2D-Plot für die Komponenten $U_1, U_2, |U|$ zur Zeit $T = 50$ an (3 Plots). Erzeugen Sie zusätzlich für jede dieser drei Komponenten einen 3D-Plot zur Zeit $T = 50$ (3 Plots). Zuletzt erstellen Sie jeweils ein Movie im gif-Format, dass den zeitlichen Verlauf der Komponente U_1 in 2D und 3D zeigt (2 Movies). Benutzen Sie dabei eine Anzahl von insgesamt 100 Frames mit 10 fps.