Wellenlösungen in Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2016
Übungsblatt 1

Dr. Denny Otten
M.Sc. Christian Döding

Ausgabe: Dienstag, 19.14.2016, 12:30 Uhr
Abgabe: Dienstag, 26.04.2016, 12:15 Uhr
Besprechung: Dienstag, 03.05.2016, 14:15-15:45 Uhr

Aufgabe 1 (Rotierende Wellen)**.**
Gegeben sei eine **Reaktions-Diffusions-Gleichung**

(1) $$u_t = A\triangle u + f(u), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \geqslant 0,\ d \geqslant 2,\ A \in \mathbb{R}^{m,m},\ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ m \geqslant 1.$$

Eine **rotierende Welle** von (1) ist eine spezielle Lösung $u_\star : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ der Form

$$u_\star(x,t) = v_\star(e^{-tS_\star}(x - x_M) + x_M), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \geqslant 0,\ S_\star \in \mathbb{R}^{d,d},\ S_\star^\top = -S_\star,\ x_M \in \mathbb{R}^d$$

mit (**Wellen-**)**Profil** $v_\star : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, **Rotationsgeschwindigkeit**(**-smatrix**) $S_\star$ und einem Punkt x_M, der fix unter der Rotation $e^{-tS_\star}$ ist.
Bestimmen Sie die **Rotierende-Wellen-Gleichung** von (1) mithilfe des **Rotierenden-Wellen-Ansatzes** $u(x,t) = v(e^{-tS}(x - x_M) + x_M)$ und der **Wellenvariablen** $\xi = e^{-tS}(x - x_M) + x_M$.

Aufgabe 2 (Oszillierende Wellen)**.**
Gegeben sei erneute eine **Reaktions-Diffusions-Gleichung**

(2) $$u_t = A\triangle u + f(u), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \geqslant 0,\ d \geqslant 1,\ A \in \mathbb{R}^{m,m},\ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ m \geqslant 2.$$

Eine **oszillierende Welle** von (2) ist eine spezielle Lösung $u_\star : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ der Form

$$u_\star(x,t) = e^{-tS_\star} v_\star(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \geqslant 0,\ S_\star \in \mathbb{R}^{m,m},\ S_\star^\top = -S_\star,$$

mit (**Wellen-**)**Profil** $v_\star : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ und **Oszillationsgeschwindigkeit**(**-smatrix**) $S_\star$.
Bestimmen Sie die **Oszillierende-Wellen-Gleichung** von (2) mithilfe des **Oszillierenden-Wellen-Ansatzes** $u(x,t) = e^{-tS}v(x)$ und der **Wellenvariablen** $\xi = x$.

Aufgabe 3 (Wandernde Wellen)**.**
Gegeben sei das nichtlineare System

(3) $$Mu_{tt} + Bu_t = A\triangle u + f(u), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \geqslant 0,\ M, B, A \in \mathbb{R}^{m,m},\ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ d, m \geqslant 1.$$

Eine **wandernde Welle** von (2) ist eine spezielle Lösung $u_\star : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ der Form

$$u_\star(x,t) = v_\star(x - c_\star t), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \geqslant 0,\ c_\star \in \mathbb{R}^d,$$

mit (**Wellen-**)**Profil** $v_\star : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ und (**Translations-**)**Geschwindigkeitsvektor** $c_\star$.
Bestimmen Sie die **Wandernde-Wellen-Gleichung** von (3) mithilfe des **Wandernden-Wellen-Ansatzes** $u(x,t) = v(x - ct)$ und der **Wellenvariablen** $\xi = x - ct$.