Wellenlösungen in Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2016
Übungsblatt 2

Dr. Denny Otten
M.Sc. Christian Döding

Ausgabe: Dienstag, 26.14.2016, 12:30 Uhr
Abgabe: Dienstag, 03.04.2016, 12:15 Uhr
Besprechung: Dienstag, 10.05.2016, 14:15-15:45 Uhr

Aufgabe 4 (Quintische Nagumo Gleichung)**.**

(a) Zeigen Sie, dass sich die quintische Nagumo Gleichung

$$u_t = Du_{xx} - B\prod_{j=1}^{5}(u-\beta_j), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \tag{1}$$

mit Parametern $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < \beta_5$ und $D, B > 0$ durch geeignete Transformationen in die Normalform

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad f(u) = u(u-b_2)(u-b_3)(u-b_4)(1-u) \tag{2}$$

mit $0 < b_2 < b_3 < b_4 < 1$ bringen lässt.

(b) Geben Sie die zu den wandernden Wellen von (2) der Geschwindigkeit c gehörige gewöhnliche Differentialgleichung (genannt NODE(c)) an. Bestimmen Sie eine Relation zwischen den Nullstellen von f, die es erlaubt einen Verbindungsorbit von 0 zu b_3 und von b_3 zu 1 durch Lösung einer skalaren autonomen Aufgabe zu gewinnen. Können Sie einen solchen Verbindungsorbit explizit bestimmen ?

(c) Geben Sie die stationären Punkte zu NODE(c) an und bestimmen Sie, ob es sich um Senken, Sättel oder Quellen handelt. Benutzen Sie NUMLAB, um das Phasenbild für wenigstens einige Auswahlen der Parameter b_2, b_3, b_4, c zu diskutieren. Zeichnen Sie die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten der Sättel ein und finden Sie jeweils mindestens einen Fall, der einen Verbindungsorbit von 0 zu b_3, von b_3 zu 1 und von 0 zu 1 zeigt.