Wellenlösungen in Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2016
Übungsblatt 7

Dr. Denny Otten
M.Sc. Christian Döding

Ausgabe: Dienstag, 21.06.2016, 12:30 Uhr
Abgabe: Dienstag, 28.06.2016, 12:15 Uhr
Besprechung: Dienstag, 05.07.2016, 14:15-15:45 Uhr

Exercise 8 (Äquivarianz bei allgemeinem elliptischen Hauptteil)**.**
Gegeben sei eine Reaktions-Diffusions-Gleichung mit allgemeinem Hauptteil für eine Funktion $u : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\text{(RD)} \qquad u_t = \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} D_i D_j u + f(u), \quad x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0.$$

Die Matrix $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{d,d}$ sei symmetrisch positiv definit. Bestimmen Sie eine zur speziellen Euklidischen Gruppe $SE(d)$ isomorphe Lie-Gruppe G, sodass die Evolutionsgleichung (RD) bezüglich der von ihr erzeugten Transformationen äquivariant ist. Wie definieren Sie demnach eine rotierende Welle für (RD)?
Hinweis: Man führe eine lineare Koordinatentransformation durch, sodass der Hauptteil in (RD) die Form Δu erhält und verwende bekannte Aussagen.

Exercise 9 (Euklidische Transformationen und Matrixexponential)**.**

(a) Man schreibe das Exponential einer Blockmatrix

$$\exp\begin{pmatrix} S & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1,d+1}, \quad S \in \mathbb{R}^{d,d},\, b \in \mathbb{R}^d$$

mit Hilfe von S und b ebenfalls in Blockform.

Hinweis: Löse das $d+1$-dimensionale Differentialgleichungssystem

$$Y' = \begin{pmatrix} S & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y, \quad Y(0) = I_{d+1}.$$

.

(b) Man zeige, dass es zu jeder (eine Euklidische Transformation beschreibenden) Matrix

$$\begin{pmatrix} Q & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q \in \mathbb{R}^{d,d} \text{ orthogonal},\ \det(Q) = 1,\ a \in \mathbb{R}^d$$

eine schiefsymmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{d,d}$ und ein $b \in \mathbb{R}^d$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} Q & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} S & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$