Wellenlösungen in Evolutionsgleichungen
Sommersemester 2016
Übungsblatt 8

Dr. Denny Otten
M.Sc. Christian Döding

Ausgabe: Dienstag, 28.06.2016, 12:30 Uhr
Abgabe: Dienstag, 05.07.2016, 12:15 Uhr
Besprechung: Dienstag, 12.07.2016, 14:15-15:45 Uhr

Exercise 10 (Euklidische Äquivarianz der Navier-Stokes Gleichung)**.**
Die dreidimensionale Navier-Stokes Gleichung für inkompressible Strömungen lässt sich wie folgt schreiben

$$\text{(NSE)}\qquad \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{R}\Delta u - u_x u - p_x^T \\ \operatorname{tr}(u_x) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $u : \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld, $p : \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ das Druckfeld, $R > 0$ die Reynoldszahl und $u_x \in \mathbb{R}^{3,3}$ die totale Ableitung nach x mit der Spur $\operatorname{tr}(u_x) = \operatorname{div} u$. Man zeige, dass diese Evolutionsgleichung äquivariant unter der folgenden Aktion der Euklidischen Gruppe $SE(3)$ ist:

$$\left[a(\gamma)\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}\right](x,t) = \begin{pmatrix} Qu \\ p \end{pmatrix}(Q^T(x-b),t) \quad \text{für} \quad \gamma = \begin{pmatrix} Q & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(3).$$

Exercise 11 (Eigenwerte der Linearisierung an einer rotierenden Welle)**.** Dreh- und Spiegelungsmatrizen im $\mathbb{R}^2$ seien wie folgt definiert

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad S_\theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Sei $u(x,t) = v_\star(R_{-\omega t}x), x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ eine mit der Geschwindigkeit $\omega \neq 0$ und dem Profil $v_\star \in C_b^3(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ rotierende Wellenlösung des Reaktionsdiffusions-Systems

$$u_t = \Delta u + f(u), \quad x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0, \quad u(x,t) \in \mathbb{R}^m, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m).$$

Wie in der Vorlesung ist dann $v_\star$ stationäre Lösung des mitbewegten Systems

$$\text{(1)}\qquad v_t = \Delta v + v_x S_\omega x + f(v), \quad x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0.$$

Man rechne nach, dass der durch Linearisierung an $v_\star$ entstehende lineare Differentialoperator

$$\mathcal{L}v = \Delta v + v_x S_\omega x + Df(v_\star)v, \quad v \in C_b^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$$

die Eigenwerte 0 und $\pm i\omega$ mit zugehörigen Eigenfunktionen $v_{\star,x}S_1 x$ und $D_1 v_\star \pm i D_2 v_\star$ besitzt.
Hinweis: Man differenziere die zu (1) gehörige stationäre Gleichung nach x_1 und nach x_2.