## Inhalt

## Vorwort

Wer Mathematik erlernen will, muß sich mit Mathematik aktiv beschäftigen, muß sich selbständig an Problemen und Aufgaben versuchen und seine Erfahrungen und Gedanken mit anderen austauschen. Wer Mathematik erlernen will, muß Mathematik entdecken und den Mut haben, Fehler zu machen.

Mathematik ist kein einmal gefundenes, abstraktes Gebäude, das in starrer Weise gewußt werden kann und nur auf Anwendung wartet. Vielmehr ist Mathematik eine präzise Methode zur Problemlösung. Mathematik wird von niemandem auf Anhieb gewußt, sondern entwickelt sich anhand der Anforderungen. Überprüfen, Verwerfen oder Beibehalten neuer Einsichten und Ansätze gehören ebenso zur Mathematik wie die exakte Formulierung der gewonnenen Erkenntnisse.

Im Rahmen des Faches Wirtschaftsmathematik wird an ausgewählten Beispielen und Problemstellungen die zur Beschreibung und Lösung erforderliche Mathematik erarbeitet. Die mathematischen Modelle sind vielfältig und gehen von Matrizenrechnung über funktionale Abhängigkeiten, lineare Gleichungssysteme bis hin zu Elementen der Differentialrechnung.

Für den Unterricht sind ein einfaches *Tafelwerk*, wie es in der Abiturstufe benutzt wird, und ein *Taschenrechner* von Nutzen.

Ergänzend zu den Unterrichtsmaterialien kann folgende *Literatur* empfohlen werden:

- S. Gottwald et al. (Hrsg.): Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1995.
- E. Zeidler et al. (Hrsg.): Teubner-Taschenbuch der Mathematik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1996.
- B. Luderer und U. Würker: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 5. Aufl. 2003.
- B. Luderer et al.: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik. Beispiele – Aufgaben – Formeln. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 3. Aufl. 2002.
- M. Adelmeyer und E. Warmuth: Finanzmathematik für Einsteiger. Vieweg Verlag, Braunschweig, 2003.

Im Buchhandel und den Bibliotheken sind eine Vielzahl weiterer Titel zur Wirtschaftsmathematik zu finden, ebenso in der Literaturliste am Ende dieses Skriptums.

Um sich Funktionen zu veranschaulichen, numerische Berechnungen durchzuführen oder Gleichungssysteme zu lösen, gibt es *Computerprogramme* – von kostenlos bis kostenpflichtig:

Kostenlose Freeware und kostengünstige Shareware (beachte Lizenzbedingungen)

- TurboPlot `www.turboplot.de` (Die IBS besitzt eine Schullizenz.)
- MATHPROF `www.mathprof.de`
- EasyFunktion `home.t-online.de/home/mgreither/EF4.htm`
- Kurvenprofi `www.kurvenprofi.de`
- FunkyPlot `www.funkyplot.de`

sowie

- SCILAB `www.scilab.org`
  (... für wissenschaftliche und technische Berechnungen aller Art; eine kostenlose Alternative zu MATLAB)

und die kostenpflichtigen Programme (gegebenenfalls mit kostenlosen Testversionen)

- MATLAB
- MAPLE
- MATHEMATICA
- Derive
- MuPad

Wer noch mehr über Mathematik erfahren möchte, findet viele Informationen im *Internet*:

- Mathematikum in Gießen `www.mathematikum.de`
- Internet-Portal der Deutschen Mathematiker-Vereinigung `www.mathematik.de`
- Mathematik zum Anfassen `www.math.de`

*Viel Erfolg und Freude mit der Wirtschaftsmathematik!*

*Berlin, im Mai 2004* *Etienne Emmrich*

# 1 Strompreise und lineare Funktionen

## 1.1 Ökonomisches Problem: Bester Stromtarif

In einer Stadt bietet der örtliche Stromanbieter zwei Tarife an: In dem Tarif A beträgt die monatliche Grundgebühr 4.59 EUR und je verbrauchte Kilowattstunde (kWh) sind 17.19 Cent zu zahlen. Bei dem Tarif B sind 9.99 EUR/Monat und ein Verbrauchspreis von 14.92 Cent/kWh zu zahlen. Bei einem anderen Stromanbieter sind 4.08 EUR/Monat und 16.99 Cent/kWh zu zahlen (Tarif C).

Für den Verbraucher stellt sich die Frage, welchen Tarif er (bei sonst gleichen Bedingungen) wählen soll. Selbstverständlich hängt diese Frage vom tatsächlichen Verbrauch ab, der im vorhinein nur geschätzt werden kann.

Für einen Ein-Personen-Haushalt können wir von einem durchschnittlichen Jahresverbrauch von 1500 kWh ausgehen. Dann folgt für die Jahreskosten

Tarif A: $12 \times 4.59$ EUR + 1500 kWh $\times$ 0.1719 EUR/kWh = 312.93 EUR
Tarif B: $12 \times 9.99$ EUR + 1500 kWh $\times$ 0.1492 EUR/kWh = 343.68 EUR
Tarif C: $12 \times 4.08$ EUR + 1500 kWh $\times$ 0.1699 EUR/kWh = 303.81 EUR

Offenbar ist Tarif C bei einem Jahresverbrauch von 1500 kWh der günstigste.

In analoger Weise können wir so für jeden beliebigen Verbrauch entscheiden, welcher Tarif am günstigsten ist. So zeigt sich, daß bei einem Jahresverbrauch von 5000 kWh Tarif B gewählt werden sollte.

Bezeichnen $x$ den jährlichen Verbrauch in kWh, $a$ die Verbrauchskosten in EUR/kWh und $b$ die jährliche Grundgebühr in EUR, so berechnen sich die jährlichen Kosten $y$ in EUR als

$$y = ax + b\,.$$

Für die verschiedenen Tarife gilt

$$y_A = 0.1719x + 55.08\,, \quad y_B = 0.1492x + 119.88\,, \quad y_C = 0.1699x + 48.96\,.$$

Diese Berechnungsvorschriften geben den jeweiligen Zusammenhang zwischen Verbrauch $x$ und Kosten $y$ wieder. Wir können diese linearen Funktionen graphisch darstellen (siehe Abb. 1).

Aus dem Bild können wir nun für jeden beliebigen Verbrauch $x$ die jährlichen Kosten $y$ nach dem jeweiligen Tarif ablesen (unter Beachtung des Ablesefehlers). Wir erkennen zudem, daß bis zu einem gewissen Verbrauch (etwa 3400 kWh) Tarif C der günstigste ist, dann aber Tarif B günstiger wird.

Wir wollen nun diesen kritischen Verbrauchswert berechnen. Es ist offenbar der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden zu bestimmen. Gesucht ist also jene Stelle $x_{BC}$, für die $y_B$ und $y_C$ den gleichen Wert annehmen:

$$\begin{aligned}
y_B(x_{BC}) &= y_C(x_{BC}) \\
0.1492x_{BC} + 119.88 &= 0.1699x_{BC} + 48.96 && |-48.96 \\
0.1492x_{BC} + 70.92 &= 0.1699x_{BC} && |-0.1492x_{BC} \\
70.92 &= 0.0207x_{BC} \\
0.0207x_{BC} &= 70.92 && |:0.0207 \\
x_{BC} &= 3426.0869\ldots \approx 3426
\end{aligned}$$

Die Rechnung zeigt, daß bis zu einem Jahresverbrauch von ungefähr 3426 kWh Tarif C, danach aber Tarif B günstiger ist.

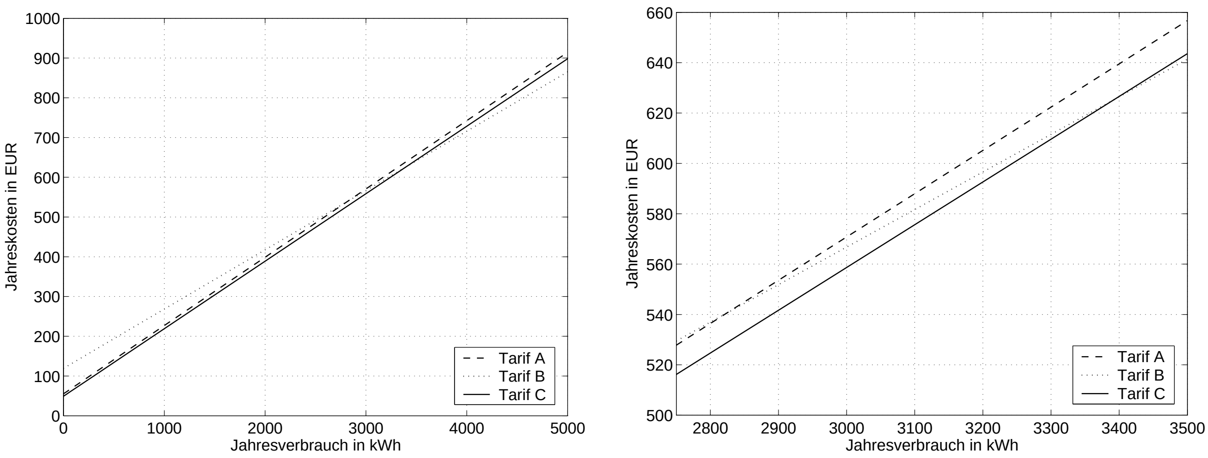



Abbildung 1: Zusammenhang zwischen Stromverbrauch und -kosten

**Aufgabe 1.1.** Recherchiere (z. B. im Internet) mindestens drei verschiedene Stromtarife und vergleiche diese grafisch. Bestimme rechnerisch, bis zu welchem Verbrauch welcher Tarif günstiger ist.

## 1.2 Mathematischer Exkurs: Funktionsbegriff und lineare Funktionen

Der Begriff der Funktion ist grundlegend in der modernen Mathematik:

**Definition.** *Seien* $X$*,* $Y$ *zwei nichtleere Mengen. Unter einer* Funktion *oder* Abbildung $f : X \to Y$ *wird eine Zuordnung verstanden, die jedem Element* $x$ *aus* $X$ *genau ein Element* $y$ *aus* $Y$ *zuordnet:* $x \mapsto y = f(x)$*. Dabei ist* $x$ *das Argument und* $y = f(x)$ *das Bild von* $x$ *unter der Abbildung* $f$*.*

Für die exakte Beschreibung einer Funktion sind sowohl die Zuordnungsvorschrift als auch die Menge $X$ anzugeben.

**Beispiel.** In seinem berühmten Gedicht *Voyelles* ordnete Arthur Rimbaud jedem Vokal eine Farbe zu: „A noir, E blanc, I rouge, U vert, O bleu“. Es sind $X = \{A, E, I, O, U\}$, $Y = \{\text{noir}, \text{blanc}, \text{rouge}, \text{vert}, \text{bleu}\}$. Die Zuordnung kann durch eine Wertetabelle dargestellt werden:

| Vokal | A | E | I | O | U |
|---|---|---|---|---|---|
| Farbe | noir | blanc | rouge | bleu | vert |

**Beispiel.** Wird jeder reellen Zahl $x$ ihr Quadrat $y = x^2$ zugeordnet, so kann die Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem (benannt nach dem französischen Philosophen und Mathematiker René Descartes) dargestellt werden (siehe Abb. 2).

Seien $a$ und $b$ zwei gegebene reelle Zahlen (z. B. $a = 2$ und $b = -1$). Wird jeder reellen Zahl $x$ die Zahl $y = ax + b$ (in unserem Beispiel $y = 2x - 1$) zugeordnet, so sprechen wir von einer *linearen Funktion.* Für unser Beispiel können wir exemplarisch einige Werte in einer Wertetabelle zusammenstellen:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $1.5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = 2x - 1$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ |

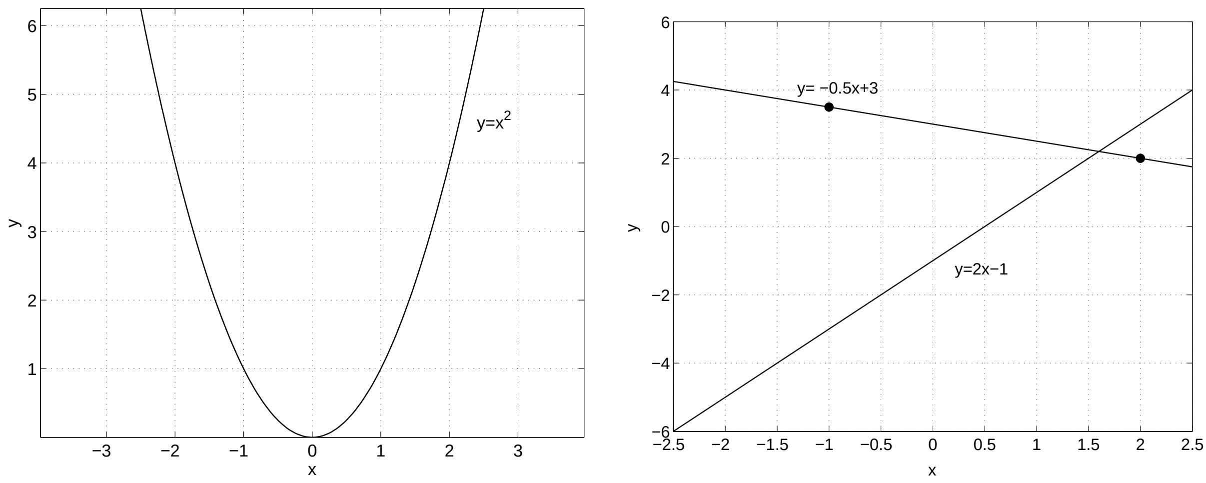



Abbildung 2: Quadratische (links) und lineare (rechts) Funktionen

Der Graph (das Bild) einer linearen Funktion ist eine Gerade, zu dessen Bestimmung es genügt, zwei Punkte dieser Geraden zu kennen (siehe Abb. 2).

In der linearen Funktion $y = ax + b$ heißt die Zahl $a$ Anstieg und bestimmt den Winkel der Geraden zur $x$-Achse. Die Zahl $b$ heißt Absolutglied und bestimmt die Verschiebung der Geraden auf der $y$-Achse.

Für die Nullstelle $x_N$ der linearen Funktion $y = ax + b$ gilt

$$ax_N + b = 0$$

und mithin

$$x_N = -\frac{b}{a}\,.$$

In unserem Beispiel ist $x_N = 0.5$.

Soll aus zwei gegebenen Punkten, etwa $(2; 2)$ und $(-1; 3.5)$, jene lineare Funktion $y = ax + b$ bestimmt werden, deren Graph die durch die beiden Punkte beschriebene Gerade ist, so ist das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 2 \\ -a + b &= 3.5 \end{aligned}$$

Subtrahieren wir von der ersten Gleichung die zweite, so erhalten wir $3a = -1.5$ und es folgt $a = -0.5$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $-1 + b = 2$, also $b = 3$. Die gesuchte Funktion lautet daher $y = -\frac{1}{2}x + 3$ (siehe Abb. 2).

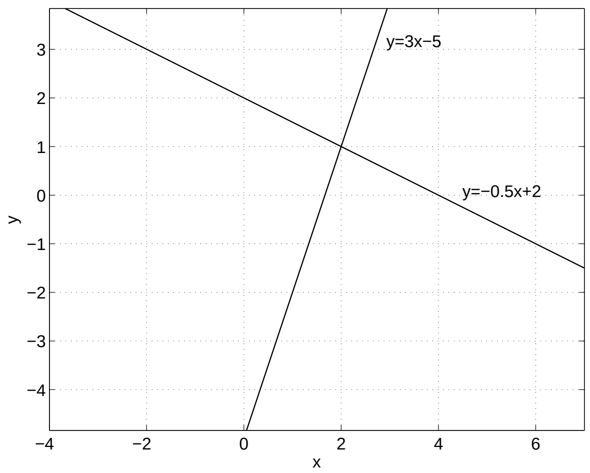
Ist der Schnittpunkt $(x_S; y_S)$ zweier Geraden gesucht, die durch die linearen Funktionen $y_1 = 3x - 5$ und $y_2 = -\frac{1}{2}x + 2$ beschrieben seien, so ist wegen $y_1 = y_2$ folgende lineare Gleichung zu lösen:

$$3x_S - 5 = -\frac{1}{2}x_S + 2\,.$$

Addition von $\frac{1}{2}x_S$ und Addition von 5 führen auf

$$3.5x_S = 7\,,$$

woraus $x_S = 2$ folgt. Einsetzen in eine der beiden Funktionen liefert $y_S = 1$ (siehe Abb. 3).



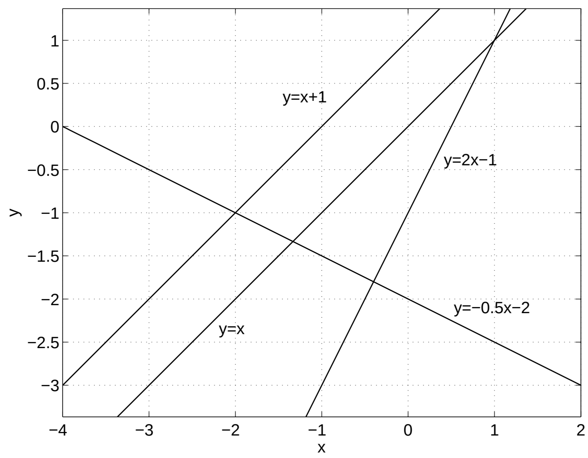




Abbildung 3: Schnittpunkt zweier linearer Funktionen. Parallele und senkrechte Geraden

Betrachten wir das Bild der sogenannten *identischen Funktion* $y = x$, so liegen offenbar alle Geraden, die durch Funktionen der Gestalt $y = x + b$ mit beliebiger reeller Zahl $b$ beschrieben werden können, parallel (siehe Abb. 3). Allgemein beschreiben alle linearen Funktionen $y = ax+b$, die sich nur im Absolutglied $b$, nicht aber im Anstieg $a$ unterscheiden, zueinander parallele Geraden.

Betrachten wir die durch $y = 2x - 1$ beschriebene Gerade, so beschreiben alle Funktionen der Gestalt $y = -\frac{1}{2}x+b$ mit beliebigem $b$ senkrecht stehende Geraden. Allgemein stehen zwei durch die linearen Funktionen $y_1 = a_1x + b_1$ und $y_2 = a_2x + b_2$ beschriebenen Geraden senkrecht aufeinander, sofern $a_1a_2 = -1$ gilt (siehe Abb. 3).

**Aufgabe 1.2.** Zeichne die Funktionen $y = 2x + 3$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$ und $y = \frac{1}{3}x - 1$. Bestimme die jeweiligen Nullstellen und sämtliche Schnittpunkte. Nenne jeweils einige Funktionen, die senkrecht bzw. parallel verlaufende Geraden beschreiben, und zeichne diese.

**Aufgabe 1.3.** Zeichne die beiden Geraden, die durch die Punkte $(-5; -10)$ und $(2; 4)$ bzw. $(0; 1)$ und $(2; 5)$ gehen. Welche linearen Funktionen entsprechen diesen beiden Geraden?

# 2 Produktionsplanung, Marktforschung, Matrizen und Vektoren

## 2.1 Ökonomisches Problem I: Produktionsplanung

Das folgende Problem ist [10] entnommen. Ein Unternehmen stellt drei verschiedene Endprodukte her. Dazu benötigt es zwei verschiedene Arten von Bauelementen und vier verschiedene Arten von Einzelteilen. Wir wollen die Endprodukte mit $E_1$, $E_2$, $E_3$, die Bauelemente mit $B_1$, $B_2$ und die Einzelteile mit $R_1, \ldots, R_4$ bezeichnen.

Zur Herstellung eines Stückes des Endprodukts $E_1$ werden ein Stück von $B_1$, zwei Stücke von $B_2$ und ein Einzelteil $R_2$ benötigt. Für die Herstellung eines Stückes von $E_2$ wird je ein Stück der beiden Bauteile benötigt. Das Endprodukt $E_3$ wird aus je einem Stück der beiden Bauteile und drei Einzelteilen $R_2$ gefertigt.

Für die Herstellung eines Stückes des Bauteiles $B_1$ werden zwei Einzelteile $R_1$, drei $R_2$, zwei $R_3$ und ein $R_4$ benötigt. Ein Bauteil $B_2$ wird aus einem $R_1$, zwei $R_2$, zwei $R_3$ und einem $R_4$ gefertigt.

Es sollen nun 50 Stück des Endproduktes $E_1$, 40 von $E_2$ und 30 von $E_3$ sowie für Reparaturzwecke 20 Bauteile $B_1$, zehn Bauteile $B_2$ und zehn Einzelteile $R_2$ für einen Vertragspartner produziert werden. Wie viele Einzelteile $R_1, \ldots, R_4$ muß das Unternehmen daür vorrätig haben?

Um diese und weitere Fragen beantworten zu können, sollen die zur Verfügung stehenden Informationen zunächst übersichtlicher in der Gestalt von *Matrizen* dargestellt werden:

$$\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline R_1 & 2 & 1 \\ R_2 & 3 & 2 \\ R_3 & 2 & 2 \\ R_4 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline B_1 & 1 & 1 & 1 \\ B_2 & 2 & 1 & 1 \\ R_2 & 1 & 0 & 3 \end{array} \tag{2.1}$$

Die erste *Matrix* gibt wieder, wie viele Einzelteile welcher Art zur Herstellung je eines Stückes der Bauteile benötigt werden. Die zweite *Matrix* spiegelt die Verflechtung der Produktion der Endprodukte wieder.

Die Analyse wird dadurch erschwert, daß $R_2$ sowohl zur Herstellung der Bauteile benötigt wird, die ja nur ein Zwischenprodukt darstellen, als auch direkt zur Herstellung der Endprodukte. Außerdem sollen an den Abnehmer nicht nur Endprodukte geliefert werden, sondern auch Einzelteile und Zwischenprodukte.

Um zunächst die Stückzahl von $B_1$, $B_2$ und $R_2$ für die geforderte Stückzahl von Endprodukten zu ermitteln, müssen wir nur die Einträge ersten Spalte der zweiten Matrix in (2.1) mit 50, die der zweiten Spalte mit 40 und die der dritten Spalte mit 30 multiplizieren und anschließend in den Zeilen addieren:

$$\begin{array}{c|l} & \\ \hline B_1 & 1 \cdot 50 + 1 \cdot 40 + 1 \cdot 30 = 120 \\ B_2 & 2 \cdot 50 + 1 \cdot 40 + 1 \cdot 30 = 170 \\ R_2 & 1 \cdot 50 + 0 \cdot 40 + 3 \cdot 30 = 140 \end{array}$$

In gleicher Weise ermitteln wir nun die für die Produktion der 120 Bauteile $B_1$ und 170 Bauteile $B_2$ erforderlichen Stückzahlen von $R_1, \ldots, R_4$:

| | |
|---|---|
| $R_1$ | $2 \cdot 120 + 1 \cdot 170 = 410$ |
| $R_2$ | $3 \cdot 120 + 2 \cdot 170 = 700$ |
| $R_3$ | $2 \cdot 120 + 2 \cdot 170 = 580$ |
| $R_4$ | $1 \cdot 120 + 1 \cdot 170 = 290$ |

Für die Herstellung von 50 $E_1$, 40 $E_2$ und 30 $E_3$ werden demnach 410 $R_1$, $700 + 140 = 840$ $R_2$, 580 $R_3$ und 290 $R_4$ benötigt.

Zu diesen Werten gelangen wir noch auf eine andere Weise: Hierzu gehen wir zunächst der Frage nach, wieviel von $R_1, \ldots, R_4$ für die Produktion von je einem Stück der Endprodukte $E_1$, $E_2$, $E_3$ benötigt wird. Dazu müssen wir offenbar die beiden Matrizen aus (2.1) geeignet miteinander verketten. Die kleine Schwierigkeit mit dem doppelten Auftreten von $R_2$ können wir leicht beseitigen, indem wir die erste Matrix in (2.1) um eine weitere Spalte (deren Bedeutung sofort einsichtig ist) wie folgt ergänzen:

| | $B_1$ | $B_2$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | 2 | 1 | 0 |
| $R_2$ | 3 | 2 | 1 |
| $R_3$ | 2 | 2 | 0 |
| $R_4$ | 1 | 1 | 0 |

| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|---|
| $B_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $B_2$ | 2 | 1 | 1 |
| $R_2$ | 1 | 0 | 3 |

(2.2)

*Nun hat die erste Matrix genauso viele Spalten, wie die zweite Matrix an Zeilen besitzt.* In anderen Worten: Die Zahl der *Outputs* bei der ersten Matrix ist gleich der Zahl der *Inputs* bei der zweiten Matrix. Um je ein Stück der Endprodukte herzustellen, benötigen wir offenbar an $R_1, \ldots, R_2$:

| | | | | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $B_1$ | 1 | 1 | 1 |
| | | | $B_2$ | 2 | 1 | 1 |
| | $B_1$ | $B_2$ | $R_2$ | 1 | 0 | 3 |
| $R_1$ | 2 | 1 | 0 | $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$ | $2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0$ | $2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3$ |
| $R_2$ | 3 | 2 | 1 | $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ | $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0$ | $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3$ |
| $R_3$ | 2 | 2 | 0 | $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1$ | $2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0$ | $2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3$ |
| $R_4$ | 1 | 1 | 0 | $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$ | $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0$ | $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3$ |

Dies ergibt den gewünschten Zusammenhang zwischen $R_1, \ldots, R_4$ als *Inputs* und $E_1$, $E_2$, $E_3$

als *Outputs* (wir sprechen auch von einer *Input-Output-Analyse*):

|  | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | 4 | 3 | 3 |
| $R_2$ | 8 | 5 | 8 |
| $R_3$ | 6 | 4 | 4 |
| $R_4$ | 3 | 2 | 2 |

(2.3)

Sollen nun 50 $E_1$, 40 $E_2$ und 30 $E_3$ hergestellt werden, so müssen wir wieder wie folgt rechnen und gelangen zu dem uns schon bekannten Ergebnis:

| | |
|---|---|
| $R_1$ | $4 \cdot 50 + 3 \cdot 40 + 3 \cdot 30 = 410$ |
| $R_2$ | $8 \cdot 50 + 5 \cdot 40 + 8 \cdot 30 = 840$ |
| $R_3$ | $6 \cdot 50 + 4 \cdot 40 + 4 \cdot 30 = 580$ |
| $R_4$ | $3 \cdot 50 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 30 = 290$ |

Für die außerdem zu liefernden 20 $B_1$ und 10 $B_2$ werden (wie sich in gleicher Weise berechnen läßt) noch 50 $R_1$, 80 $R_2$, 60 $R_3$ und 30 $R_4$ benötigt. Für die gesamte Lieferung muß das Unternehmen also 460 $R_1$, 930 $R_2$, 640 $R_3$ und 320 $R_4$ vorrätig haben.

Um nicht bei jeder Änderung des Lieferauftrags die vorstehende Rechnung erneut anstellen zu müssen, ist es günstig, die *Gesamtaufwandsmatrix* aufzustellen. In dieser sollen $R_1, \ldots, R_4$ als Inputs und die zu liefernden $E_1$, $E_2$, $E_3$, $B_1$, $B_2$, $R_2$ als Outputs auftreten. Wir bekommen diese Matrix leicht aus den Matrizen aus (2.2) und (2.3):

|  | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $B_1$ | $B_2$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $R_2$ | 8 | 5 | 8 | 3 | 2 | 1 |
| $R_3$ | 6 | 4 | 4 | 2 | 2 | 0 |
| $R_4$ | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 |

(2.4)

Zu unserem schon bekannten Ergebnis gelangen wir nun direkt:

| | |
|---|---|
| $R_1$ | $4 \cdot 50 + 3 \cdot 40 + 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 10 = 460$ |
| $R_2$ | $8 \cdot 50 + 5 \cdot 40 + 8 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = 930$ |
| $R_3$ | $6 \cdot 50 + 4 \cdot 40 + 4 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 0 \cdot 10 = 640$ |
| $R_4$ | $3 \cdot 50 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 10 = 320$ |

Vermittels der Matrizenrechnung, die im folgenden Abschnitt dargestellt wird, können wir die vorstehenden Rechnungen nicht nur übersichtlicher gestalten, sondern auch verallgemeinern.

## 2.2 Mathematischer Exkurs: Matrizenrechnung

**Definition.** *Unter einer $m \times n$–*Matrix *verstehen wir eine Anordnung von $m \times n$ Zahlen in einem rechteckigen Schema mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten.*

Wir bezeichnen Matrizen in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben. So ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -3 \\ -2 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

eine $4 \times 3$–Matrix. Allgemein schreiben wir

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Der erste Index steht für die Zeile, der zweite für die Spalte.

Hat eine Matrix genauso viele Zeilen wie Spalten, so sprechen wir von einer *quadratischen* Matrix. Die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ nennen wir sodann Diagonalelemente und sprechen auch von der Hauptdiagonalen.

Eine Matrix mit nur einer Spalte bzw. Zeile nennen wir auch (Spalten- bzw. Zeilen-) Vektor.

**Beispiel.**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad (4 \quad 0 \quad -3 \quad 5).$$

In der Regel bezeichnen wir Vektoren mit kleinen lateinischen Buchstaben und meinen einen Spaltenvektor:

$$a = (a_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten (bei quadratischen Matrizen also durch Spiegeln an der Hauptdiagonalen) erhalten wir die sogenannte *transponierte* Matrix, die wir mit einem hochgestellten T bezeichnen.

**Beispiel.**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{\mathsf{T}} = (-5 \quad 4 \quad 0).$$

Schreiben wir $(2,3,4)^\mathsf{T}$, so ist demzufolge der Spaltenvektor mit den Komponenten 2, 3 und 4 gemeint. (Um Mißverständnisse zu vermeiden, trennen wir gelegentlich die einzelnen Komponenten eines Zeilenvektors durch ein Komma oder Semikolon.)

Offenbar gilt für eine Matrix $A = (a_{ij})$ stets $A^\mathsf{T} = (a_{ji})$. Unter einer *symmetrischen* Matrix verstehen wir eine Matrix $A$ mit $A^\mathsf{T} = A$.

**Beispiel.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Es können nur quadratische Matrizen symmetrisch sein.

Mit Matrizen können wir nun auf recht einfache Weise rechnen. Zunächst aber halten wir fest, daß zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ dann und nur dann *gleich* sind, wenn sie vom selben Typ sind (also die gleiche Zahl von Zeilen und Spalten besitzen) und sämtliche Elemente gleich sind: $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$.

Unter der *Summe* oder *Differenz* zweier Matrizen vom selben Typ verstehen wir jene Matrix, die entsteht, wenn wir die einzelnen Elemente addieren bzw. subtrahieren.

**Beispiel.**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0.2 & 5 \\ 4 & -0.8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0.2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

So wie bei der Addition (analog bei der Subtraktion) von Null zu einer anderen Zahl, diese unverändert bleibt, bleibt eine Matrix $A$ unverändert, wenn zu ihr die Nullmatrix, die nur aus Nullen besteht, addiert wird.

Wir können eine Matrix auch mit einer Zahl multiplizieren, indem wir jeden Eintrag der Matrix mit dieser Zahl multiplizieren.

**Beispiel.**

$$2.5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.5 & -7.5 & 10 \\ -5 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}.$$

**Satz.** *Seien $A$, $B$ und $C$ beliebige Matrizen vom selben Typ und seien $\lambda$ und $\mu$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gelten die folgenden* Rechengesetze*:*

$$\begin{aligned} A + B &= B + A && \textit{Kommutativität} \\ (A + B) + C &= A + (B + C) && \textit{Assoziativität} \\ \lambda \cdot (A + B) &= \lambda \cdot A + \lambda \cdot B && \textit{Distributivität} \\ (\lambda + \mu) \cdot A &= \lambda \cdot A + \mu \cdot B && \textit{Distributivität} \\ (A \pm B)^\mathsf{T} &= A^\mathsf{T} \pm B^\mathsf{T} \end{aligned}$$

Wir kommen nun zur *Matrixmultiplikation*, die wir schon kennen: Wir haben sie bereits im vorhergehenden Abschnitt angewandt, ohne sie so zu nennen.

**Definition.** *Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ zwei beliebige Matrizen, wobei $A$ genauso viele Spalten besitzen möge, wie $B$ an Zeilen hat. Dann verstehen wir unter dem Produkt $C = A \cdot B = (c_{ij})$ die Matrix mit den Einträgen*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}\,,$$

*wobei $r$ die Zahl der Spalten von $A$ bzw. Zeilen von $B$ sei. Die Produktmatrix $C$ hat so viele Zeilen wie $A$ und so viele Spalten wie $B$.*

**Beispiel.** Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $A$ eine $2 \times 3$– und $B$ eine $3 \times 4$–Matrix. Das Produkt $A \cdot B$ wird daher eine $2 \times 4$–Matrix sein. Wir berechnen diese nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{ccc|cccc}
 & & & 0 & 2 & 0 & 5 \\
 & & & 3 & -3 & 2 & 1 \\
 & & & 2 & 4 & -4 & 2 \\
\hline
1 & -1 & 2 & 1\cdot 0 - 1\cdot 3 + 2\cdot 2 & 1\cdot 2 - 1\cdot(-3) + 2\cdot 4 & 1\cdot 0 - 1\cdot 2 + 2\cdot(-4) & 1\cdot 5 - 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\
4 & 0 & 2.5 & 4\cdot 0 + 0\cdot 3 + 2.5\cdot 2 & 4\cdot 2 + 0\cdot(-3) + 2.5\cdot 4 & 4\cdot 0 + 0\cdot 2 + 2.5\cdot(-4) & 4\cdot 5 + 0\cdot 1 + 2.5\cdot 2
\end{array}$$

Es folgt also

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 13 & -10 & 8 \\ 5 & 18 & -10 & 25 \end{pmatrix}.$$

Es zeigt sich, daß die Reihenfolge bei der Multiplikation von Matrizen eine entscheidene Rolle spielt: In unserem vorstehenden Beispiel können wir das Produkt $B \cdot A$ nicht bilden, denn $B$ hat vier Spalten, $A$ dagegen zwei Zeilen. Selbst wenn – wie dies bei quadratischen Matrizen von gleicher Ordnung (mit gleich vielen Zeilen bzw. Spalten) der Fall ist – sowohl $A \cdot B$ als auch $B \cdot A$ gebildet werden können, so gilt im allgemeinen doch $A \cdot B \neq B \cdot A$.

**Beispiel.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 16 & 26 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 19 & 28 \end{pmatrix} = B \cdot A\,.$$

So wie bei der Multiplikation einer beliebigen Zahl mit der Eins die Zahl unverändert bleibt, bleibt auch eine Matrix, die mit der quadratischen *Einheitsmatrix*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

multipliziert wird, unverändert: $I \cdot A = A \cdot I$. (Die Bezeichnung $I$ kommt von Identität.)

**Satz.** *Für die Multiplikation von Matrizen gelten folgende* Rechengesetze*:*

$$
\begin{aligned}
(A \cdot B) \cdot C &= A \cdot (B \cdot C) && \textit{Assoziativität} \\
(A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C && \textit{Distributivität} \\
(A \cdot B)^{\mathsf{T}} &= B^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}
\end{aligned}
$$

Einen Spezialfall der Multiplikation von Matrizen stellt die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor dar:

**Beispiel.** Seien

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Dann gilt offenbar

$$
\begin{array}{rr|ll}
 & & 10 & \\
 & & -10 & \\
\hline
1 & 2 & 1 \cdot 10 + 2 \cdot (-10) & = -10 \\
3 & 4 & 3 \cdot 10 + 4 \cdot (-10) & = -10 \\
5 & 6 & 5 \cdot 10 + 6 \cdot (-10) & = -10
\end{array}
\qquad A \cdot b =
$$

Außerdem folgt

$$
c^{\mathsf{T}} \cdot A = \quad
\begin{array}{rrr|cc}
 & & & 1 & 2 \\
 & & & 3 & 4 \\
 & & & 5 & 6 \\
\hline
1 & -1 & 1 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6
\end{array}
= (3 \quad 4)\,.
$$

Dies können wir sofort für das Problem aus dem vorstehenden Abschnitt anwenden, sollen etwa die Gesamtkosten berechnet werden, die dem Unternehmen für die beschriebene Lieferung entstehen. Dazu mögen die Stückkosten 5 EUR für $R_1$, 4 EUR für $R_2$, 20 EUR für $R_3$ und 3 EUR für $R_4$ betragen. Ausgehend von der Gesamtaufwandsmatrix aus (2.4) gilt nun

$$
(5 \quad 4 \quad 20 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \\ 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = (5 \quad 4 \quad 20 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 460 \\ 930 \\ 640 \\ 320 \end{pmatrix} = 19780\,.
$$

Die Gesamtkosten betragen also 19780 EUR.

Interessant ist hier die Anwendung des Assoziativgesetzes der Multiplikation, denn multiplizieren wir zuerst den Vektor der Stückkosten für $R_1, \ldots, R_4$ mit der Gesamtaufwandsmatrix, so erhalten wir $(181, 121, 133, 65, 56, 4)$ und müssen diesen Zeilenvektor (dessen Komponenten die Produktionskosten in EUR für $E_1$, $E_2$, $E_3$, $B_1$, $B_2$, $R_2$ sind) nun nur noch mit dem Vektor der jeweiligen Lieferanforderungen multiplizieren, um die Gesamtkosten zu erhalten.

**Aufgabe 2.1.** Identifiziere die einzelnen Rechenschritte im vorhergehenden Abschnitt als Multiplikationen von Matrizen bzw. Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor.

**Aufgabe 2.2.** Seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Bestimme – soweit möglich –

$$A + C\,,\ A + 2 \cdot D\,,\ 4 \cdot (A - D)\,,\ A \cdot B\,,\ B \cdot A\,,\ A \cdot D\,,\ B \cdot C^{\mathsf{T}}\,,\ (A^{\mathsf{T}} + C) \cdot D\,.$$

**Aufgabe 2.3.** Bestimme die unbekannten Zahlen $\alpha$, $\beta$ so, daß

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \beta & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2.4.** (aus [16]) Einem Betrieb stehen zwei Rohstoffe zur Verfügung, mit denen er zwei Endprodukte produziert. Aus den beiden Rohstoffen werden zunächst drei verschiedene Zwischenprodukte hergestellt: Für eine Einheit des ersten Zwischenprodukts werden zwei Einheiten des ersten und fünf des zweiten Rohstoffes benötigt. Für das zweite Zwischenprodukt sind drei Einheiten des ersten und vier Einheiten des zweiten Rohstoffes vonnöten. Das dritte Zwischenprodukt wird aus fünf Einheiten des ersten und einer Einheit des zweiten Rohstoffes hergestellt.

Das eine Endprodukt bedarf zu seiner Herstellung sechs Einheiten des ersten, eine Einheit des zweiten und drei Einheiten des dritten Zwischenprodukts. Das andere Endprodukt wird aus vier Einheiten des zweiten und zwei Einheiten des dritten Zwischenprodukts gefertigt.

Welche Rohstoffmengen werden benötigt, um 1000 Einheiten des ersten und 2000 Einheiten des zweiten Endprodukts herzustellen? Wie schlagen sich die Rohstoffkosten auf die Zwischen- und Endprodukte nieder, wenn der erste Rohstoff 3 EUR je Einheit, der zweite 5 EUR je Einheit kostet? Stelle auch die Gesamtaufwandsmatrix auf.

**Aufgabe 2.5.** (aus [10]) In einem Imbiß werden Kartoffelpuffer in drei Geschmacksrichtungen angeboten, die aus zwei Sorten Rohmasse sowie zusätzlich aus saurer Sahne und Zwiebeln hergestellt werden. Die Rohmasse wiederum besteht aus Kartoffeln, saurer Sahne, Zwiebeln und Eiern.

Je Kelle der ersten bzw. zweiten Rohmasse bedarf es 100 g bzw. 90 g Kartoffeln, 15 ml bzw. 10 ml saurer Sahne, keiner bzw. 5 g Zwiebeln und einem bzw. einem halben Ei.

Für eine Portion Kartoffelpuffer der ersten Geschmacksrichtung bedarf es zweier Kellen der ersten und einer Kelle der zweiten Rohmasse. Die Kartoffelpuffer der zweiten Geschmacksrichtung werden je Portion aus einer Kelle der ersten und zwei Kellen der zweiten Rohmasse sowie 20 ml saurer Sahne hergestellt. Die dritte Sorte wird wie die erste hergestellt, aber noch mit 15 g Zwiebeln verfeinert.

Wöchentlich werden 200 Portionen der ersten, 260 der zweiten und 230 der dritten Sorte verkauft. Welche Mengen an Kartoffeln etc. muß der Imbißbesitzer vorhalten? Wir wollen annehmen, daß 5 kg Kartoffeln 3.50 EUR, 1 kg Zwiebeln 1.50 EUR, 1 l saure Sahne 2.00 EUR und 50 Eier 8.00 EUR kosten. Welche Warenkosten sind dann wöchentlich zu erwarten? Für welchen Preis sollten die einzelnen Sorten Kartoffelpuffer verkauft werden, damit der Umsatz etwa viermal so hoch ist wie der Wareneinsatz?

### 2.3 Ökonomisches Problem II: Marktforschung

Das folgende Problem ist an [13] angelehnt. Auf einem Markt mögen drei Produzenten $P_1$, $P_2$ und $P_3$ miteinander konkurrieren. Zu einem Zeitpunkt $t_0$ haben sie einen Marktanteil von 60%, 30% bzw. 10%. Wir sind an der Entwicklung der Marktanteile über einen gewissen Zeitraum hinweg interessiert. Aus statistischen Erhebungen ist die folgende *Matrix der Käuferfluktuationen* (auch *Übergangsmatrix* genannt) bekannt:

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Die Einträge $a_{ij}$ der Matrix $A$ geben dabei den Anteil der Kunden des Produzenten $P_i$ zu einem gewissen Zeitpunkt $t_k$ wieder, die zum nächsten Zeitpunkt $t_{k+1}$ vom Produzenten $P_j$ kaufen. So besagt der Eintrag $a_{33} = 0.2$, daß 20% dem Produzenten $P_3$ absolut treu bleiben. Der Eintrag $a_{23} = 0.0$ dagegen besagt, daß keiner der Kunden des Produzenten $P_2$ je zum Produzenten $P_3$ wechseln wird.

Wir gehen hier vereinfachend von einem zeithomogenen Modell aus, indem $a_{ij}$ weder vom konkreten Zeitpunkt noch von der Vergangenheit abhängt. Derartige Prozesse heißen auch *homogene Markoffsche Ketten* und sind Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Unter der Annahme, daß zu einem gewissen Zeitpunkt jeweils genau von einem Produzenten gekauft wird, gilt für alle $i = 1, 2, 3$

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = 1\,.$$

Hat nun $P_1$ zur Zeit $t_0$ einen Marktanteil von 60% $= 0.6$, so werden hiervon zum nächsten Zeitpunkt $a_{11} = 0.6 = 60\%$ dem Produzenten $P_1$ treu bleiben, das sind $0.6 \cdot 0.6 = 0.36 = 36\%$ aller Käufer. Wegen $a_{21} = 0.1 = 10\%$ wechseln $0.3 \cdot 0.1 = 0.03 = 3\%$ der Kunden von $P_2$ jetzt zum Produzenten $P_1$. Wegen $a_{31} = 0.4 = 40\%$ wechseln weitere $0.1 \cdot 0.4 = 0.04 = 4\%$ der Kunden, die vorher bei $P_3$ gekauft haben, ebenfalls zum Produzenten $P_1$. Insgesamt hat damit $P_1$ zum neuen Zeitpunkt nur noch einen Marktanteil von 36% + 3% + 4% = 43%.

Ausgehend vom Zeilenvektor $p(t_0) = (0.6, 0.3, 0.1)$ der Marktanteile zum Zeitpunkt $t_0$ ergeben sich für den Zeitpunpkt $t_1$ die neuen Marktanteile offenbar als

$$p(t_1) = p(t_0) \cdot A = (0.6 \quad 0.3 \quad 0.1) \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} = (0.43 \quad 0.37 \quad 0.20)\,.$$

Für den Zeitpunkt $t_2$ betragen demnach die Marktanteile

$$p(t_2) = p(t_1) \cdot A = (0.43 \quad 0.37 \quad 0.20) \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} = (0.375 \quad 0.456 \quad 0.169)\,.$$

Doch dieses sukzessive Berechnen ist nicht gerade vorteilhaft, zumal, wenn für $p(t_0)$ andere Werte angesetzt werden sollen. Allerdings gilt

$$p(t_2) = p(t_1) \cdot A = p(t_0) \cdot A \cdot A = p(t_0) \cdot A^2$$

und – wie man sich leicht vorzustellen und auch zu beweisen vermag –

$$p(t_n) = p(t_0) \cdot A^n\,, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Dabei ist unter $A^n$ wie üblich das Produkt

$$\underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n \text{ mal}}$$

zu verstehen, wobei $A^0 = I$ gesetzt wird.

**Aufgabe 2.6.** Bestimme die Marktanteile zu den Zeitpunkten $t_4$ und $t_6$.
Bestimme die Marktanteile zu allen Zeitpunkten, wenn die anfänglichen Marktanteile 8/31, 20/31 bzw. 3/31 betragen.
Bestimme (mit einem geeigneten Computerprogramm) $A^{20}$, $A^{100}$, $A^{500}$ und äußere eine Vermutung darüber, wie sich die Marktanteile über einen großen Zeitraum hinweg entwickeln.

**Aufgabe 2.7.** Ein fleißiger Mitarbeiter möchte in einem Unternehmen Karriere machen und die Karriereleiter mit drei Stufen hinaufsteigen. Dabei erklimmt er, stehend auf der $i$-ten Stufe ($i = 0, 1, 2, 3$; die 0. Stufe entspricht dem untersten Stand), mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) die nächste Stufe, mit der Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ aber fällt er die gesamte Leiter wieder herunter. Ist er auf der obersten, also dritten Stufe angelangt, so verbleibt er dort.
Veranschauliche das Problem durch ein Diagramm und gib die Übergangsmatrix an.
Wie ist der Karriereverlauf in den ersten 5 Schritten, wenn $\alpha = 0.4 = 40\%$, $\alpha = 0.5 = 50\%$, $\alpha = 0.6 = 60\%$ bzw. $\alpha = 1 = 100\%$ ist?

# 3 Diätplan, Leontief-Modell und lineare Gleichungssysteme

## 3.1 Ökonomisches Problem I: Diätplan

An einer Klinik sollen diätetische Mahlzeiten zubereitet werden, die eine vorgegebene Menge an Kilocalorien, Fetten, Kohlehydraten usw. besitzen sollen.

Der Einfachheit wollen wir annehmen, daß eine Mahlzeit aus Milch, Reis und Gemüsen zusammengestellt werden kann. Dabei haben 100 g Milch 50 kcal, 5 g Kohlehydrate und 1.5 g Fett. Auf 100 g Reis entfallen 350 kcal, 75 g Kohlehydrate und 2 g Fett. Der durchschnittliche Brennwert von 100 g Gemüse beträgt 20 kcal. Außerdem sind in 100 g Gemüse 2 g Kohlehydrate und 0.2 g Fett enthalten. Wieviel Gramm Milch, Reis und Gemüse darf die Mahlzeit nun besitzen, wenn sie einen Brennwert von exakt 1050 kcal, 185 g Kohlehydrate und 12.5 g Fett besitzen soll?

Wir wollen mit $x_1$, $x_2$ bzw. $x_3$ die Mengen von Milch, Reis bzw. Gemüse (jeweils gemessen in 100 g) bezeichnen. Dann soll gelten:

$$\begin{array}{rcll} 50\ x_1 + 350x_2 + 20\ x_3 &=& 1050 & \text{Brennwert in kcal je 100g} \\ 5\ x_1 + 75x_2 + 2\ x_3 &=& 185 & \text{Kohlehydrate in g je 100g} \\ 1.5x_1 + 2x_2 + 0.2x_3 &=& 12.5 & \text{Fett in g je 100g} \end{array} \tag{3.1}$$

Dies ist ein *lineares Gleichungssystem* mit drei Gleichungen und drei Unbekannten $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Es ist üblich, lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen und Vektoren zu schreiben. Seien hierzu

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 350 & 20 \\ 5 & 75 & 2 \\ 1.5 & 2 & 0.2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1050 \\ 185 \\ 12.5 \end{pmatrix}.$$

Dann können wir für (3.1) auch kurz

$$A \cdot x = b$$

schreiben, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathsf{T}}$ der Vektor der zu bestimmenden Größen sei. Wir nennen $A$ auch *Koeffizientenmatrix* und $b$ *rechte Seite*.

Doch wie lösen wir nun ein lineares Gleichungssystem? Ein mögliches Vorgehen besteht darin, eine Gleichung nach einer Unbekannten aufzulösen und in die anderen Gleichungen einzusetzen. So können wir Schritt für Schritt die Unbekannten eliminieren und erhalten (leider nicht immer) zum Schluß eine Gleichung zur Bestimmung einer Unbekannten. Aus dieser können wir sodann sukzessive die anderen Unbekannten berechnen.

Wir wollen die erste Gleichung aus (3.1) nach $x_1$ auflösen:

$$x_1 = \frac{1}{50}(1050 - 350x_2 - 20x_3) = 21 - 7x_2 - 0.4x_3\,. \tag{3.2}$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert sodann

$$5 \cdot (21 - 7x_2 - 0.4x_3) + 75x_2 + 2x_3 = 185\,,$$

woraus nach einigem Sortieren

$$40x_2 = 80$$

folgt. Daß hier $x_3$ nicht mehr auftritt, ist dem konkreten Beispiel geschuldet und nicht die Regel. Auflösen nach $x_2$ liefert sofort

$$x_2 = 2\,.$$

Einsetzen von (3.2) in die dritte Gleichung aus (3.1) führt auf

$$1.5 \cdot (21 - 7x_2 - 0.4x_3) + 2x_2 + 0.2x_3 = 12.5$$

bzw.

$$-8.5x_2 - 0.4x_3 = -19\,.$$

Setzen wir hier noch $x_2 = 2$ ein, so erhalten wir

$$-17 - 0.4x_3 = -19$$

bzw.

$$-0.4x_3 = -2\,.$$

Mithin gilt $x_3 = 5$.

Aus (3.2) folgt nun

$$x_1 = 21 - 7 \cdot 2 - 0.4 \cdot 5 = 5\,.$$

Das Gleichungssystem (3.1) besitzt demnach genau eine Lösung, nämlich $x = (5, 2, 5)^\mathsf{T}$, d. h. es dürfen 500 g Milch, 200 g Reis und 500 g Gemüse für die Mahlzeit verwendet werden.

### 3.2 Mathematischer Exkurs: Lineare Gleichungssysteme

Ist ein lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit einer quadratischen Matrix $A$ vorgelegt, so sieht man oft als Lösung

$$x = A^{-1} \cdot b\,.$$

Dabei versteht man unter $A^{-1}$ die sogenannte *inverse Matrix*. Das ist jene Matrix, für die

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

gilt. Für die Inverse des Produkts zweier Matrizen gilt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

**Beispiel.** Die zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix ist durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 \\ 0.25 & 0.125 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Jedoch gibt es nicht zu jeder Matrix $A$ eine inverse Matrix.

**Beispiel.** Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

besitzt keine inverse Matrix. Denn angenommen $B = (b_{ij})$ sei die inverse Matrix. Dann muß wegen $A \cdot B = I$ gelten

$$\begin{aligned} b_{11} + 2b_{21} &= 1\,, \quad & b_{12} + 2b_{22} &= 0\,, \\ 2b_{11} + 4b_{21} &= 0\,, \quad & 2b_{12} + 4b_{22} &= 0\,. \end{aligned}$$

Dividieren wir die in der zweiten Zeile stehenden Gleichungen durch 2, so sehen wir sofort, daß diese im Widerspruch zu den Gleichungen in der ersten Zeile stehen.

Selbst wenn es eine inverse Matrix gibt, so ist die Lösungsdarstellung $x = A^{-1}b$ für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ oft nur von theoretischem Interesse. Denn ist die quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ von der Ordnung $n$, so erfordert die Berechnung der inversen Matrix $A^{-1} = (b_{ij})$ die Lösung der $n$ Gleichungssysteme

$$A \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ b_{3n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Zahl der für die Lösung eines Gleichungssystems von der Ordnung $n$ (also mit $n$ Unbekannten und einer $n \times n$–Koeefizientenmatrix) erforderlichen Rechenoperationen ist i. allg. von der Größenordnung $n^3$. Für ein Gleichungssystem mit 1000 Unbekannten sind also etwa $10^9$ Rechenoperationen nötig. Soll dagegen die Inverse der Koeffizientenmatrix bestimmt werden, so sind sogar $10^{12}$ Rechenoperationen erforderlich.

Wir wollen lineare Gleichungssysteme – auch mit rechteckiger Koeffizientenmatrix – deshalb direkt lösen und nicht auf die inverse Matrix zurückgreifen.

Zuvor aber sei bemerkt, daß ein lineares Gleichungssystem entweder

- keine Lösung oder
- genau eine Lösung oder
- unendlich viele Lösungen

besitzen kann.

**Beispiel.** Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= -1 \end{aligned}$$

ist nicht lösbar, denn es kann eine Größe (hier $x + y$) nicht zugleich 1 und $-1$ sein. Dies ist ein Widerspruch in sich.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

besitzt genau eine Lösung, nämlich $(x, y) = (1, 2)$. Aus der ersten Gleichung folgt unmittelbar $y = 2x$. Mithin besagt die zweite Gleichung, daß $3x = 3$, also $x = 1$ gilt. Dann aber ist $y = 2$. Eine andere Lösung kann es nicht geben.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + y &= 5 \\ 6x \quad + 2z &= 10 \end{aligned}$$

besitzt unendlich viele Lösungen. Zunächst folgt aus der ersten Gleichung $y = x + z$. Dann aber besagt die zweite Gleichung, daß $3x + z = 5$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit Zwei, so erhalten wir die dritte Gleichung, die uns also keine neue Erkenntnis liefert. Mit $(x, y, z) = (1, 3, 2)$ ist eine Lösung gegeben. Aber auch jeder Vektor der Gestalt $(x, 5-2x, 5-3x)$ (z. B. $(0, 5, 5)$) ist Lösung des Gleichungssystems, wobei wir $x$ frei wählen können.

Im vorigen Abschnitt haben wir bereits an einem Beispiel ein mögliches Vorgehen zur Lösung eines linearen Gleichungssystems beschrieben. Es besteht nun die Aufgabe, einen allgemeinen Algorithmus anzugeben. Dies wird der nach Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) benannte *Gauß-Algorithmus* sein.

Wir halten zunächst fest, daß

- das Vertauschen zweier Gleichungen,
- das Addieren einer Gleichung zu einer anderen,
- die Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl

die Menge der Lösungen des linearen Gleichungssystems unverändert läßt, denn alle diese Operationen sind umkehrbar.

Das Ziel besteht nun darin, die oben genannten elementaren Umformungen so anzuwenden, als daß wir zu einem äquivalenten Gleichungssystem gelangen, aus dem wir leicht ablesen können,

- ob das Gleichungssystem lösbar ist,
- falls es lösbar ist, ob es eine oder unendlich viele Lösungen gibt und
- wie sämtliche Lösungen lauten.

Wir demonstrieren den Gauß-Algorithmus zunächst an einem Beispiel.:

**Beispiel.** Wir wollen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 16 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 15 \\ x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 &= 11 \end{aligned}$$

lösen. Um die Sache übersichtlicher zu gestalten, schreiben wir dies in der kurzen Form

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & 5 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 1 & 8 & 12 \\ 2 & 2 & 6 & 5 & 15 \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 11 \end{array}$$

Ziel ist es, ab der zweiten Gleichung $x_1$ zu eliminieren, d. h. unterhalb des bereits in einen Kasten gesetzten *Pivotelements* (frz. *le pivot* = Türangel, Hauptstütze, Dreh- und Angelpunkt) Nullen zu erzeugen. Dazu nehmen wir folgende Operationen vor:

$$\begin{array}{cccc|c||l} \boxed{2} & 1 & 5 & 3 & 16 & \\ 4 & 2 & 1 & 8 & 12 & -\frac{4}{2} \times \text{erste Zeile} \\ 2 & 2 & 6 & 5 & 15 & -\frac{2}{2} \times \text{erste Zeile} \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 11 & -\frac{1}{2} \times \text{erste Zeile} \end{array}$$

Es folgt

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & \boxed{0} & -9 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \end{array}$$

Nun wollen wir wie eben verfahren und unterhalb der zweiten Gleichung die Variable $x_2$ eliminieren. Doch leider steht in der zweiten Zeile und zweiten Spalte bereits eine Null. Deshalb müssen wir die zweite mit der dritten (oder auch der vierten) Gleichung tauschen:

$$\begin{array}{cccc|c||l} 2 & 1 & 5 & 3 & 16 & \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & -9 & 2 & -20 & \text{bleibt unverändert} \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 & -\frac{2}{1} \times \text{zweite Zeile} \end{array}$$

Es folgt

$$\begin{array}{cccc|c||l} 2 & 1 & 5 & 3 & 16 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & \boxed{-9} & 2 & -20 & \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 5 & -\frac{-1}{-9} \times \text{dritte Zeile} \end{array}$$

und schließlich

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 2 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{65}{9} & \frac{65}{9} \end{array}$$

Aus der letzten Zeile folgt sofort $x_4 = -1$. Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein, so folgt $-9x_3 - 2 = -20$, also $x_3 = 2$. Aus der zweiten Gleichung folgt dann $x_2 = -1$ und aus der ersten $x_1 = 5$. Eine Probe bestätigt unsere Lösung $(5, -1, 2, -1)$.

Gehen wir von dem allgemeinen (womöglich rechteckigen) System

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

aus, welches aus $m$ Gleichungen mit $n$ Unbekannten besteht.

Wir wollen annehmen, daß $x_1$ in dem System wirklich vorkommt, also in der ersten Spalte wenigstens eine der Zahlen $a_{i1}$ ungleich Null ist. Andernfalls numerieren wir die Unbekannten um.

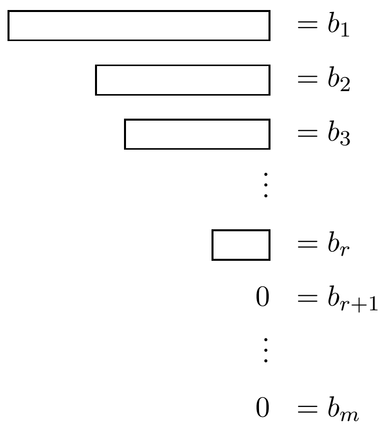
Wir wollen weiterhin annehmen, daß $a_{11} \neq 0$. Andernfalls tauschen wir die erste mit einer der nachfolgenden Zeilen. Nach unserer ersten Annahme muß es mindestens eine Zeile geben, in der $x_1$ vorkommt.

Jetzt subtrahieren wir von der zweiten Gleichung das $a_{21}/a_{11}$-fache der ersten Gleichung, von der dritten Gleichung das $a_{31}/a_{11}$-fache der ersten Gleichung usf. Wir erhalten so ein neues, zum usrprünglichen System äquivalentes System, in dem $x_1$ nur noch in der ersten Gleichung vorkommt.

Jetzt betrachten wir lediglich die Gleichungen ab der zweiten Zeile; die erste Gleichung bleibt unverändert. Wir verfahren wie eben und gelangen so zu einem System, in dem $x_2$ nur noch in der zweiten Gleichung auftritt. Allerdings könnte es sein, daß $x_2$ schon gar nicht mehr auftaucht. Dann gehen wir gleich zu jener Unbekannten über, die in dem System noch vorkommt und den kleinsten Index hat.

Wir setzen das ganze Verfahren solange fort, bis in den nachfolgenden Gleichungen keine Unbekannten mehr auftreten oder es keine nachfolgenden Gleichungen mehr gibt.

Wir gelangen so zu der sogenannten *Zeilenstufenform*, die etwa folgende Gestalt haben könnte:




Dabei ist $r$ der Index jener Zeile, in der mindestens eine Variable noch vorkommt, in der also nicht alle Einträge gleich Null sind.

Für das Lösungsverhalten beobachten wir nun folgendes:

- Gilt $r < m$ und ist mindestens eine der Zahlen $b_{r+1}, b_{r+2}, \dots\ b_m$ ungleich Null, so erhalten wir einen Widerspruch und das System ist *nicht lösbar*.
- Gilt $b_{r+1} = b_{r+2} = \cdots = b_m = 0$ oder $r = m$, so ist das System *lösbar*, und zwar
  - *eindeutig*, wenn außerdem $r = n$. Denn dann sind alle Stufen von der Breite 1. Wir können die Lösung, beginnend mit der letzten Variablen aus der letzten Gleichung, berechnen.
  - mit *unendlich vielen Lösungen*, wenn $r < n$. Denn dann gibt es mindestens eine größere Stufe (nicht nur von der Breite 1) und es gibt mindestens eine Variable, die in keiner Zeile am Zeilenanfang steht. Derartige Variablen (es sind genau $n - r$) können wir frei wählen. Die anderen Variablen berechnen wir in Abhängigkeit dieser freien Variablen.

**Aufgabe 3.1.** Schreibe die beiden nachstehenden linearen Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Form und bestimme, wenn möglich, alle Lösungen:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -7\,, \\ 8y + 2z &= 10\,, \\ -x + y - z &= -4\,, \\ -x \qquad + z &= 6\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a + b - c \qquad &= 1\,, \\ 3a - b - 2c + d &= 2\,, \\ a + 3b \qquad - d &= 3\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.2.** Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

**Aufgabe 3.3.** (aus [16]) Wie ist $\alpha$ zu wählen, damit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + \alpha x_3 &= 4 \end{aligned}$$

genau eine Lösung besitzt? Gib die Lösung in Abhängigkeit von $\alpha$ an.

## 3.3 Ökonomisches Problem II: Leontief-Modell und Input-Ouput-Analyse

Bereits mit seiner Dissertation „Die Wirtschaft als Kreislauf“, die er 1928 in Berlin verteidigte, legte Wassily Leontief (1906 in Petersburg geboren, 1999 in New York gestorben) die Grundlagen der *Input-Output-Analyse*. Für diese erhielt Leontief 1973 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

Ein Wirtschaftssystem sei in die produzierenden (endogenen) Sektoren $P_1$, $P_2$, … , $P_n$ und den nichtproduzierenden Endverbraucher (exogener Sektor) $E$ eingeteilt. Selbstverständlich könnte es auch mehrere Sektoren von Endverbrauchern geben. Die produzierenden Sektoren beliefern sich untereinander. Die Menge der Einheiten (zumeist schon in Ab-Werk-Preisen angegeben), die Produzent $P_j$ von $P_i$ erhält, sei mit $p_{ij}$ bezeichnet:

$$P_i \xrightarrow{p_{ij}} P_j \,.$$

Unter $p_{ii}$ wird der Eigenverbrauch von $P_i$ verstanden. Insgesamt produziert $P_i$ die Menge $p_i$ (Output), wovon die Menge $q_i$ für den Endverbraucher bestimmt sind.

Schließlich können noch Primärinputs (Ressourcen, Arbeitsleistungen aus dem exogenen Sektor, Importe) $R_1$, $R_2$, … $R_m$ berücksichtigt werden. Mit $r_{ij}$ ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) bezeichnen wir jene Menge von Ressourcen $R_i$, die $P_j$ erhält:

$$R_i \xrightarrow{r_{ij}} P_j \,.$$

Die Gesamtmenge der Ressourcen $R_i$ sei mit $r_i$ bezeichnet.

Wir gelangen so zur *Input-Output-Tabelle*:

| | an | endogene Sektoren | | | | | exogener S. | Gesamt- |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| von | | $P_1$ | $\dots$ | $P_j$ | $\dots$ | $P_n$ | $E$ | output |
| endo- | $P_1$ | $p_{11}$ | $\dots$ | $p_{1j}$ | $\dots$ | $p_{1n}$ | $q_1$ | $p_1$ |
| gene | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $P_i$ | $p_{i1}$ | $\dots$ | $p_{ij}$ | $\dots$ | $p_{in}$ | $q_i$ | $p_i$ |
| Sek- | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| toren | $P_n$ | $p_{n1}$ | $\dots$ | $p_{nj}$ | $\dots$ | $p_{nn}$ | $q_n$ | $p_n$ |
| Pri- | $R_1$ | $r_{11}$ | $\dots$ | $r_{1j}$ | $\dots$ | $r_{1n}$ | | |
| mär- | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | |
| | $R_i$ | $r_{i1}$ | $\dots$ | $r_{ij}$ | $\dots$ | $r_{in}$ | | |
| in- | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | |
| puts | $R_m$ | $r_{m1}$ | $\dots$ | $r_{mj}$ | $\dots$ | $r_{mn}$ | | |

Offenbar gilt für alle $i = 1, 2, \dots, n$ die *Input-Output-Bilanz*

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots p_{in} + q_i = p_i \,. \tag{3.3}$$

Es bezeichne nun $a_{ij}$ die zur Produktion einer Einheit von $P_j$ erforderliche Produktion von $P_i$. Dann gilt

$$p_{ij} = a_{ij} \cdot p_j \,.$$

Fassen wir die die Einträge $a_{ij}$ in der Matrix $A = (a_{ij})$, die Gesamtproduktionen in dem Vektor $p = (p_1, \dots, p_n)^\mathsf{T}$ und die den Endverbrauchern zuzuführenden Mengen in dem Vektor $q = (q_1, \dots, q_n)^\mathsf{T}$ zusammen. Mit (3.3) folgt dann

$$A \cdot p + q = p$$

bzw.

$$(I - A) \cdot p = q \,. \tag{3.4}$$

Das System (3.4), welches die Verflechtung zwischen den Gesamtproduktionen der einzelnen Sektoren und dem für den Endverbraucher bestimmten Absatz wiedergibt, heißt auch *Leontief-Modell*. Sind die für den Endverbraucher bestimmten Mengen $q$ bekannt, so können wir aus dem linearen Gleichungssystem (3.4) die zu produzierenden Mengen $p$ berechnen. Oftmals findet man auch

$$p = (I - A)^{-1} \cdot q\,.$$

Dies setzt natürlich voraus, daß die inverse Matrix existiert, d. h. das Gleichungssystem (3.4) eindeutig lösbar ist. Ohnehin ist es – wegen des hohen Aufwands – nicht zu empfehlen, die Inverse zu berechnen, es sei denn $p$ soll für verschiedene $q$ bestimmt werden.

Um die Verflechtung vollständig wiederzugeben, bedarf es noch der Analyse der Verflechtung zwischen den Primärinputs und den Produzenten. Zunächst beobachten wir die Bilanz

$$r_{i1} + r_{i2} + \cdots + r_{in} = r_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{3.5}$$

Bezeichnen wir mit $b_{ij}$ die Menge an Ressourcen $R_i$, die $P_j$ für die Produktion von einer Einheit benötigt, so gilt

$$r_{ij} = b_{ij} \cdot p_j\,.$$

Es folgt daher aus (3.5)

$$B \cdot p = r\,, \tag{3.6}$$

wobei $B = (b_{ij})$ (beachte, daß $B$ in der Regel rechteckig ist, da i. allg. $m \neq n$) und $r = (r_1, r_2, \ldots r_m)^\top$. Es ist nicht zu erwarten, daß aus vorgegebenem $r$ eindeutig ein $p$ berechnet werden kann. Dies steht in Einklang mit der Erfahrung, daß dieselben Mengen von Ressourcen $r$ zu verschiedenen Produktionen $p$ führen können.

Die Beziehungen (3.4) und (3.6) ermöglichen die Berechnung der Primärinputs $r$ aus der Endnachfrage $q$. Ist die Matrix $I - A$ invertierbar, so gilt

$$r = B \cdot p = B \cdot (I - A)^{-1} \cdot q\,.$$

Die soeben dargestellte Input-Output-Analyse bzw. das Leontief-Modell kann sowohl bei volkswirtschaftlichen als auch bei betriebswirtschaftlichen Betrachtungen Anwendung finden. Lediglich die Bedeutung der Sektoren etc. wird eine andere sein. Input-Output-Tabellen für die Volkswirtschaft in Deutschland führt das Statistische Bundesamt in Wiesbaden.

**Beispiel.** In [17] findet sich die Input-Output-Tabelle für das Jahr 1995 zu Herstellungspreisen mit gütermäßiger Aufgliederung der Importe. Wir geben die Tabelle hier nur gekürzt wieder; alle Einträge sind in Mrd. DM:

| Verwendung | Input der Produktionsbereiche | | | Letzte | Gesamte |
|---|---|---|---|---|---|
| Aufkommen | Bereich 1) | Bereich 2) | Bereich 3) | Verwendung von Gütern | |
| Bereich 1) | 2.6 | 67.4 | 6.1 | 41.1 | 117.2 |
| Bereich 2) | 21.5 | 1049.8 | 303.2 | 1857.9 | 3232.4 |
| Bereich 3) | 17.5 | 460.5 | 1170.7 | 2111.8 | 3760.5 |
| Abgaben 4) | −4.2 | 3.2 | 1.7 | | |
| Arbeitnehmerentgelt | 18.0 | 731.5 | 1193.3 | | |
| Abschreibungen etc. | 28.4 | 263.1 | 941.5 | | |

Bereich 1) Land- und Forstwirtschaft, Fischerei
Bereich 2) Produzierendes Gewerbe
Bereich 3) Dienstleistungen
Abgaben 4) Sonstige Produktionsabgaben abzüglich sonstige Subventionen

In unserer Notation haben wir

$$p = \begin{pmatrix} 117.2 \\ 3232.4 \\ 3760.5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 41.1 \\ 1857.9 \\ 2111.8 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1942.8 \\ 1233.0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2.6}{117.2} & \frac{67.4}{3232.4} & \frac{6.1}{3760.5} \\ \frac{21.5}{117.2} & \frac{1049.8}{3232.4} & \frac{303.2}{3760.5} \\ \frac{17.5}{117.2} & \frac{460.5}{3232.4} & \frac{1170.7}{3760.5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.0222 & 0.0209 & 0.0016 \\ 0.1834 & 0.3248 & 0.0806 \\ 0.1493 & 0.1425 & 0.3113 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{4.2}{117.2} & \frac{3.2}{3232.4} & \frac{1.7}{3760.5} \\ \frac{18.0}{117.2} & \frac{731.5}{3232.4} & \frac{1193.3}{3760.5} \\ \frac{28.4}{117.2} & \frac{263.1}{3232.4} & \frac{941.5}{3760.5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.0358 & 0.0010 & 0.0005 \\ 0.1536 & 0.2263 & 0.3173 \\ 0.2423 & 0.0814 & 0.2504 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun prüfen, ob die Beziehungen (3.4) und (3.6) erfüllt sind. Tatsächlich gilt

$$(I - A) \cdot p \approx \begin{pmatrix} 41.1 \\ 1857.9 \\ 2111.7 \end{pmatrix} \approx q\,, \quad B \cdot p \approx \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1942.8 \\ 1233.0 \end{pmatrix} = r\,.$$

Es sollen nun die erforderlichen Gesamtproduktionen und Primärinputs berechnet werden, wenn die letzte Verwendung von Gütern (Konsum, Exporte, etc.) aus Land- und Forstwirtschaft 100 Mrd. DM, jene aus dem produzierenden Gewerbe 1500 Mrd. DM und jene aus Dienstleistungen 3000 Mrd. DM beträgt. Wir müssen also aus dem linearen Gleichungssystem (3.4) den Vektor $p$ bestimmen, wobei $A$ wie oben und $q = (100, 1500, 3000)^\mathsf{T}$ gegeben sind. Mit dem Gaußschen Algorithmus folgt $p = (171.6, 2863.4, 4985.7)^\mathsf{T}$. Aus (3.6) berechnen wir dann $r = (-1.1, 2256.5, 1522.9)^\mathsf{T}$.

**Aufgabe 3.4.** Beschaffe (etwa per Internet vom Statistischen Bundesamt) eine reale Input-Output-Tabelle und überprüfe (zumindest auszugsweise), ob die dortigen Angaben mit dem Leontief-Modell in Einklang stehen.

**Aufgabe 3.5.** (In Anlehnung an [10].) In einer Cafeteria werden belegte Brötchen, Kaffee und Eis angeboten. Leider verzehren die Betreiber selbst gern ihre Produkte, nämlich etwa jedes zehnte Brötchen, nach je 25 Kugeln Eis nochmal ein Brötchen, jeweils nach dem Verkauf von 20 Brötchen etwa eine Kugel Eis und außerdem jede 50. Kugel Eis. Stelle die Matrix $A$ aus dem Leontief-Modell auf und berechne die erforderliche tägliche Gesamtproduktion, wenn pro Tag eine Nachfrage von 55 Brötchen, 200 Tassen Kaffee und 150 Kugeln Eis besteht.

**Aufgabe 3.6.** (aus [10]) Ein Betrieb benötigt für die Herstellung der drei Produkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ die Ausgangsmaterialien $A_1$, $A_2$, $A_3$, und zwar zwei Mengeneinheiten (ME) von $A_1$, drei von $A_2$ und eine von $A_3$ für die Produktion einer ME von $P_1$, je eine ME von $A_1$ bzw. $A_3$

für die Produktion einer ME von $P_2$ sowie vier ME von $A_1$ und je zwei von $A_2$ bzw. $A_3$ für die Produktion einer ME von $P_3$. Außerdem tritt ein Eigenverbrauch auf (z. B. durch den Produktionsprozeß, durch Ausschuß, durch Eigenverbrauch im eigentlichen Sinne etc.). Für die Produktion je einer ME von $P_1$ werden 1/4 einer ME von $P_1$, 1/4 ME von $P_2$ und 1/3 ME von $P_3$ benötigt. Bei der Produktion je einer ME von $P_2$ werden 1/4 ME von $P_2$ selbst verbraucht. Bei der Produktion je einer ME von $P_3$ wird eine halbe ME selbst verbraucht.

Welche Mengen an Ausgangsstoffen sind erforderlich für insgesamt 40 ME von $P_1$, 40 ME von $P_2$ und 30 ME von $P_3$? Wieviel der Produktion steht für den Absatz zur Verfügung?

**Aufgabe 3.7.** (In Anlehnung an [10].) Für die Herstellung einer ME der chemischen Substanz $C_1$ werden 0.1 ME derselben und 0.2 ME der chemischen Substanz $C_2$ benötigt. Für die Herstellung einer ME von $C_2$ werden 0.2 ME von $C_2$ selbst verbraucht. Für den laufenden Monat wurden 1800 ME von $C_1$ und 200 ME von $C_2$ bestellt. Wie hoch muß die Gesamtproduktion sein?

Wir wollen weiterhin annehmen, daß die Herstellung bestimmte Rohstoffe $R_1$, $R_2$, $R_3$ erfordert, und zwar für die Herstellung von je 10 ME von $C_1$ eine ME von $R_1$, zwei von $R_2$ und fünf von $R_3$. Die Produktion von je 10 ME von $C_2$ erfordert vier ME von $R_1$ und 3 ME von $R_3$. Welche Rohstoffmengen werden für den laufenden Monat benötigt?

# 4 Funktionen in der Ökonomie

## 4.1 Ökonomisches Problem: Nachfrage, Preis & Co.

Der Zusammenhang zwischen fundamentalen wirtschaftlichen Größen wie Menge, Preis, Einkommen, Kosten, Nachfrage usf. wird, zumindest näherungsweise, durch mathematische Funktionen beschrieben.

Oft hängen diese Funktionen nicht nur von einer sondern von vielen Variablen ab. Ob die Beschreibung durch eine gewählte mathematische Funktion sinnvoll ist, ob sie (in einem gewissen Bereich) zuverlässige Aussagen und Vorhersagen ermöglicht, ist eine Frage der mathematischen Modellierung. Mathematische Modellierung findet immer im Wechselspiel von konkreter Anwendung (hier: Teilproblem der Ökonomie) und Mathematik statt.

In der Ökonomie sind es insbesondere folgende Zusammenhänge, die von Interesse sind:

**Nachfragefunktion** Die Menge eines Gutes, die von einem (oder mehreren) Konsumenten benötigt wird, die Nachfrage, hängt von der Bevölkerungszahl, vom Einkommen, vom Vermögen, vom Preis des Gutes, vom Preis anderer Güter, vom betrachteten Zeitintervall, von der Jahreszeit, von der Qualität des Gutes, von Geschmack und Farbe des Gutes usf. ab. Einige der Variablen sind nicht oder nur schwer quantifizierbar. Halten wir – bis auf den Preis $x$ des Gutes – alle diese Variablen fest (und fassen sie als Parameter auf), so ist die Nachfrage $y$ eine Funktion im Preis $x$.

$$\begin{aligned} \text{Nachfrage} &= f(\text{Preis}) \\ y &= f(x)\,, \quad \text{z. B. } y = ax + b \end{aligned}$$

Der konkrete Verlauf einer Nachfragefunktion hängt vom konkreten Problem ab. In der Regel kann die Funktion nicht exakt angegeben werden, sondern wird aus empirischen Daten näherungsweise ermittelt (etwa mit der Fehlerquadratmethode). Dabei wird ein Ansatz (eine Funktionsklasse wie Polynome oder Exponentialfunktionen) gewählt, der den beobachteten und zu modellierenden qualitativen Eigenschaften entspricht.

So wird eine Nachfragefunktion monoton fallend sein, denn mit wachsendem Preis wird die Nachfrage zurückgehen. Auch wird es einen Preis geben, bei dem die Nachfrage gleich Null ist (Nullstelle der Funktion). Im einfachsten Fall können wir dieses Verhalten durch eine lineare Funktion $y = ax + b$ beschreiben, wobei $a < 0$ (monoton fallend). Außerdem ist $b > 0$ zu fordern, damit für positives $x$ überhaupt eine Nachfrage existiert ($y > 0$).

In Teilen der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur wird bei der Nachfragefunktion nicht $y$ über $x$ abgetragen, sondern umgekehrt $x$ über $y$. Aus mathematischer Sicht wird also die Umkehrfunktion $x = \frac{y-b}{a}$ dargestellt, die die Abhängigkeit des Preises von der Nachfrage wiedergibt (obwohl der Preis die unabhängige Variable sein soll).

**Produktionsfunktion** Die von einem Gut produzierte Menge hängt von der eingesetzten Arbeitszeit, von der Rohstoffmenge usf. ab. Oft wird es ein Sättigungsniveau geben, das eine absolute Grenze für die Produktion darstellt; eine Produktionssteigerung darüberhinaus ist nicht möglich.

$$\begin{aligned} \text{Output} &= f(\text{Input}) \\ y &= f(x)\,, \quad \text{z. B. } y = \frac{ax}{x+b} = a - \frac{ab}{x+b} \end{aligned}$$

**Kostenfunktion** Die in Geldeinheiten gemessenen (Stück-) Kosten $y$ hängen von der produzierten Menge ab. Die Kostenfunktion wird in der Regel monoton wachsend sein.

$$\begin{aligned} \text{Kosten} &= f(\text{Produktion}) \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

**Angebotsfunktion** Die Menge eines Gutes, die ein Unternehmen bereit ist anzubieten, hängt vom Preis ab, den das Unternehmen für das Gut erhält.

$$\begin{aligned} \text{Angebot} &= f(\text{Preis}) \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

**Konsumfunktion** Betrachtet man eine Volkswirtschaft, so hängt der Verbrauch (Verzehr von Gütern und Dienstleistungen) durch den Haushaltssektor vom Volkseinkommen ab.

$$\begin{aligned} \text{Konsum} &= f(\text{Einkommen}) \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

**Investitionsfunktion** Die Menge der Investitionen (gemessen in Geldeinheiten) kann als Funktion vom aktuellen Zinssatz angesehen werden.

$$\begin{aligned} \text{Investitionen} &= f(\text{Zinssatz}) \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

Stets ist es wichtig, vorher Einheiten festzulegen, in denen $x$ und $y$ gemessen werden sollen. Für die Auswahl der Funktion (aus einer bestimmten Klasse) sind außerdem grundlegende wirtschaftliche Gesetze zu berücksichtigten, die qualitative Zusammenhänge widerspiegeln.

So besagt das *Gesetz vom abnehmenden Ertragszuwachs*, daß ab einer bestimmten Inputmenge die Outputmenge kaum mehr wächst. Dagegen besagt das *Gesetz vom zunehmenden Kostenzuwachs*, daß ab einer bestimmten Produktionsmenge jede zusätzliche Outputeinheit (jede zusätzliche Produktion) immer größere, zusätzliche Kosten verursacht.

Schließlich ist darauf hinzuweisen, daß oftmals eine andere, dem Sachverhalt angepaßte Bezeichnung als $y = f(x)$ gewählt wird.

Den Anwender interessieren häufig die Grenzkosten, der Grenznutzen, die Grenzproduktion usf. Wir werden sehen, daß die *Grenzfunktion* nichts anderes als die erste Ableitung der Funktion ist.

**Aufgabe 4.1.** Die auf das zu versteuernde Jahreseinkommen zu entrichtende Einkommenssteuer berechnet sich nach einer im Gesetz beschriebenen mathematischen Funktion. Beschreibe diese formelmäßig und skizziere sie für geeignete Intervalle.

**Aufgabe 4.2.** Wiederhole die Kenntnisse über das Monotonie- und Kurvenverhalten von Funktionen: monoton wachsend *vs.* monoton fallend, (lokale und globale) Extrema, konvex *vs.* konkav, Wendepunkt.

## 4.2 Mathematischer Exkurs: Ableitungen und Elastizität

**Definition.** *Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle $\hat{x}$ ihres Definitionsbereiches* differenzierbar*, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}$$

*existiert, wobei* $\Delta x \neq 0$ *und* $\hat{x} + \Delta x$ *im Definitionsbereich liege. Der Grenzwert heißt* erste Ableitung von $f$ an der Stelle $\hat{x}$ *oder auch Differentialquotient, in Zeichen:*

$$y'(\hat{x}) \text{ bzw. } f'(\hat{x}) \quad \text{oder auch} \quad \frac{dy}{dx}_{|x=\hat{x}} \text{ bzw. } \frac{df}{dx}_{|x=\hat{x}} .$$

Die erste Ableitung (der Differentialquotient) ist demnach der Limes der *Differenzenquotienten.* Geometrisch entspricht der Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\hat{x}+\Delta x)-f(\hat{x})}{\Delta x}$ dem Anstieg der Sekante, die durch die Punkte $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ und $(\hat{x}+\Delta x, f(\hat{x}+\Delta x))$ geht. Die erste Ableitung $\frac{dy}{dx}$ dagegen ist gleich dem Anstieg der Tangente an $f$ im Punkt $(\hat{x}, f(\hat{x}))$.

Stellen wir uns vor, wir ändern das Argument $x$. Der Differenzenquotient gibt dann den Quotienten aus der Änderung der Funktionswerte und der Änderung der Argumente an. Demzufolge beschreibt die Ableitung einer Funktion ihr Änderungsverhalten, wenn wir eine (infinitesimal) kleine Änderung in $x$ vornehmen.

Berechnen wir für alle Stellen $x$ die jeweilige Ableitung, so erhalten wir eine neue Funktion.

**Beispiel.** Sei $y = f(x) = x^2$. Mit binomischer Formel sehen wir, daß

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2 .$$

Nähert sich $\Delta x$ nun 0, d. h. konvergiert $x_2$ gegen $x_1$, so folgt

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1 + x_1 = 2x_1 .$$

Die quadratische Funktion $y = f(x) = x^2$ besitzt überall eine Ableitung, nämlich $y' = f'(x) = 2x$.

Nicht jede Funktion besitzt in jedem Punkt eine Ableitung. So ist die Funktion $y = |x|$ in $x = 0$ nicht differenzierbar. Denn nähern wir uns von links der Stelle $x = 0$, so fällt die Betragsfunktion und der Anstieg ist überall $-1$. Dagegen ist die Betragsfunktion für alle Argumente, die rechts von $x = 0$ liegen, monoton wachsend mit dem konstanten Anstieg 1. Es gilt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x_2| - |x_1|}{x_2 - x_1} = \begin{cases} -1 & \text{für } x_1, x_2 < 0 , \\ \dfrac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} & \text{für } x_1 < 0 < x_2 , \\ -\dfrac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} & \text{für } x_2 < 0 < x_1 , \\ 1 & \text{für } x_1, x_2 > 0 . \end{cases}$$

Daher kann der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

nicht existieren.

Für das Ableiten gelten insbesondere folgende Regeln, wobei $a, b$ beliebige reelle Zahlen und $u, v$

beliebige Funktionen seien:

| Funktion | Ableitung | |
|---|---|---|
| $ax+b$ | $a$ | |
| $x^a$ | $ax^{a-1}$ | |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | |
| $a^x = \mathrm{e}^{\ln a \cdot x}$ | $\ln a \cdot a^x$ | |
| $\sin x$ | $\cos x$ | |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | |
| $u+v$ | $u'+v'$ | (Summenregel) |
| $u \cdot v$ | $u'v+uv'$ | (Produktregel) |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ | (Quotientenregel) |
| $u(v(x))$ | $u'(v(x)) \cdot v'(x)$ | (Kettenregel) |

**Aufgabe 4.3.** Berechne die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f(x) = 2x^3 - 4x\,, \quad g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 2x}{\ln x}\,, \quad h(x) = \sqrt{x}\,, \quad \ell(x) = \sin\left(\mathrm{e}^{4x+1} \cdot 2x^{-0.5}\right)\,.$$

**Aufgabe 4.4.** Beweise unter Benutzung der Definition der Ableitung, daß die Ableitung von $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ die Funktion $f$ selbst ist.

Höhere Ableitungen werden sukzessive definiert: So ist $f''(\hat{x})$, also die zweite Ableitung von $f$ an der Stelle $\hat{x}$, nichts anderes als die erste Ableitung von $f'$ an der Stelle $\hat{x}$.

**Aufgabe 4.5.** Sei die Funktion $f$ hinreichend oft stetig differenzierbar. Wie können das Monotonie- und Kurvenverhalten sowie Extrema und Wendepunkte mit Hilfe von Ableitungen charakterisiert werden?

Beschreibe $y = f(x)$ die Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge. Wird nun die Produktion von $x_1$ Stück um $\Delta x$ ein wenig auf $x_2 = x_1 + \Delta x$ erhöht, so ändern sich die Kosten von $y_1 = f(x_1)$ auf

$$y_2 = f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) \approx f(x_1) + f'(x_1) \cdot \Delta x\,, \tag{4.1}$$

also um

$$\Delta y \approx f'(x_1) \cdot \Delta x\,.$$

Man sagt deshalb, $f'$ sei die *Grenzfunktion*. Für die relative Änderung gilt dementsprechend

$$\frac{\Delta y}{y_1} \approx \frac{f'(x_1) \cdot x_1}{f(x_1)} \cdot \frac{\Delta x}{x_1}\,. \tag{4.2}$$

Allerdings haben wir noch zu klären, warum die Beziehung (4.1) überhaupt gilt. Wir können sagen, daß sie leicht aus der Definition der Ableitung folgt. Denn wenn $\Delta x$ klein ist, dann muß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ doch bereits in der Nähe von $f'(x_1) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ liegen. Genauer ist (4.1) eine Folgerung aus dem *Satz von Taylor*, der wiederum eine Verallgemeinerung des aus der Schule

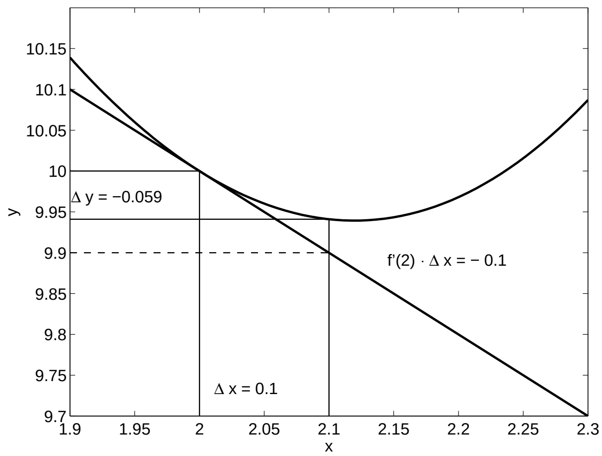



Abbildung 4: Ableitung und Beziehung (4.1)

bekannten *Mittelwertsatzes der Differentialrechung* ist. Auf beide Sätze wollen wir hier nicht näher eingehen. Stattdessen geben wir in Abb. 4 eine einfache geometrische Deutung von (4.1). Dargestellt ist die Funktion $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 20$ im Intervall $[1.9, 2.3]$. Es gilt

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5\,,\ f(2) = 10\,,\ f'(2) = -1\,.$$

Die Tangente im Punkt $(2, f(2))$ wird durch die Gerade

$$y_T = f'(2) \cdot (x-2) + f(2) = -1 \cdot (x-2) + 10 = -x + 12$$

beschrieben. Mit $x_1 = 2$ und $x_2 = 2.1$ folgt

$$\Delta y = f(2.1) - f(2) = -0.059\,.$$

Andererseits gilt

$$f'(2) \cdot \Delta x = -1 \cdot 0.1 = -0.1$$

und somit

$$\Delta y = -0.059 \approx -0.1 = f'(x_1) \cdot \Delta x\,.$$

**Definition.** *Sei die Funktion $y = f(x)$ gegeben und an der Stelle $\hat{x}$ ihres Definitionsbereiches differenzierbar. Gelte ferner $f(\hat{x}) \neq 0$. Dann heißt*

$$\varepsilon_{f,x}(\hat{x}) := f'(\hat{x}) \cdot \frac{\hat{x}}{f(\hat{x})} = \frac{dy}{dx}_{|x=\hat{x}} \cdot \frac{\hat{x}}{\hat{y}}$$

Elastizität von $f$ (bzw. $y$) bezüglich $x$ an der Stelle $\hat{x}$ *oder auch* $x$-Elastizität von $f$ an der Stelle $\hat{x}$.

Wegen (4.2) gilt

$$\frac{\Delta y}{y_1} \approx \varepsilon_{f,x}(x_1)\,\frac{\Delta x}{x_1}\,,$$

so daß $\varepsilon_{f,x}$ ungefähr angibt, wie stark sich die *relative Änderung* in $x$ relativ auf $y$ auswirkt.

Mit anderen Worten, die Elastizität gibt ungefähr die prozentuale Änderung in $y$ an, wenn $x$ um 1% geändert wird: Es werde $x_1$ um 1% geändert, so daß $x_2 = x_1 + 0.01x_1$. Dann folgt

$$y_2 = f(x_2) = f(x_1 + 0.01x_1) \approx f(x_1) + 0.01x_1 \cdot f'(x_1) = y_1 + 0.01x_1 \cdot f'(x_1)\,.$$

Die prozentuale Änderung in $y$ ist daher

$$100 \cdot \frac{y_2 - y_1}{y_1} \approx 100 \cdot \frac{0.01x_1 \cdot f'(x_1)}{f(x_1)} = \varepsilon_{f,x}(x_1)\,.$$

**Beispiel.** Sei $f(x) \equiv c = const.$ Dann ist $\varepsilon_{f,x} \equiv 0$.

Sei $f(x) = bx^a$. Dann ist $f'(x) = abx^{a-1}$ und es folgt

$$\varepsilon_{f,x}(x) = abx^{a-1}\frac{x}{bx^a} = a\,.$$

**Aufgabe 4.6.** Bestimme die Elastizitäten für $f(x) = ax$, $g(x) = \frac{a}{x}$, $h(x) = ax + b$, $\ell(x) = be^{ax}$.

Hinsichtlich der Größe der Elastizität unterscheidet man folgende Fälle:

| | |
|---|---|
| **elastisch:** | $\lvert\varepsilon_{f,x}\rvert > 1$, also $\varepsilon_{f,x} < -1$ oder $\varepsilon_{f,x} > 1$, |
| **fließend:** | $\lvert\varepsilon_{f,x}\rvert = 1$, also $\varepsilon_{f,x} = -1$ oder $\varepsilon_{f,x} = 1$, |
| **unelastisch:** | $\lvert\varepsilon_{f,x}\rvert < 1$, also $-1 < \varepsilon_{f,x} < 1$. |

Ist etwa die Nachfragefunktion unelastisch (die *Preiselastizität* der Nachfrage ist betragsmäßig kleiner Eins), so bedeutet dies, daß eine Preisänderung nur eine geringe Auswirkung auf die Nachfrage hat. Dies ist bei Gütern der Fall, für die fast jeder Preis gezahlt würde, weil sie (lebens-) wichtig sind, z. B. Medikamente.

Ist die Nachfragefunktion dagegen elastisch, so bedeutet dies, daß schon eine kleine relative Änderung des Preises eine große relative Änderung in der Nachfrage bewirken kann. Dies ist etwa bei Genußmitteln oder bei Gütern, die von vielen Herstellern auf den Markt gebracht werden, zu beobachten.

**Aufgabe 4.7.** Betrachte die Nachfragefunktion $y = -0.2x + 10$, die den Zusammenhang zwischen dem Preis $x$ und der Nachfrage $y$ beschreibt. Skizziere die Funktion. Wann ist (näherungsweise) die relative Nachfrageänderung kleiner als die relative Preisänderung, wann also wirkt sich eine Preisänderung kaum auf die Nachfrage aus? In welchem Preisbereich dagegen wirkt sich eine Preisänderung wesentlich auf die Nachfrage aus?

Gelegentlich spricht man auch von der *Preisflexibilität* der Nachfrage. Diese drückt aus, wie stark der Preis auf die Nachfrage reagiert. Es ist nichts anderes als die Elastizität der Umkehrfunktion der Nachfragefunktion, also die Nachfrageelastizität des Preises. Deshalb gilt

$$\text{Preisflexibilität} = \frac{1}{\text{Preiselastizität}}\,.$$

Sei $y = f(x)$ eine invertierbare Funktion. Die Umkehrfunktion sei $x = g(y) = g(f(x))$. Mit der Kettenregel gilt

$$1 = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(y) \cdot f'(x)\,,$$

so daß die Ableitung der Umkehrfunktion $g$ gegeben ist durch

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Für die Elastizität von $g = g(y)$ bezüglich $y$ (also der Flexibilität von $x$ bezüglich $y = f(x)$) gilt

$$\varepsilon_{g,y} = \frac{g'(y)}{g(y)} \cdot y = \frac{1}{f'(x) \cdot g(y)} \cdot y = \frac{1}{f'(x) \cdot x} \cdot f(x) = \frac{1}{\varepsilon_{f,x}}\,.$$

**Aufgabe 4.8.** (aus [10]) Der mittlere Verbrauch $y$ von Süßwaren einer Familie in Abhängigkeit vom monatlichen Familieneinkommen $x$ (beide Größen gemessen in EUR/Monat) werde durch die folgende Funktion beschrieben:

$$y = f(x) = 63.41 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1963}{x}+0.59}\,.$$

a) Skizziere die Funktion. Welchem Wert strebt der Süßigkeitenverbrauch zu, wenn das Familieneinkommen unbeschränkt wächst? Gegen welchen Wert strebt der Verbrauch bei gegen Null sinkendem Einkommen?

b) Berechne die Elastizität von $f$ bezüglich $x$.

c) In welchem Wert werden Süßigkeiten verbraucht, wenn das monatliche Einkommen 4500 EUR beträgt?

d) Berechne unter Benutzung der Elastizität, um wieviel Prozent sich näherungsweise der Süßwarenverbrauch ändert, wenn sich das Einkommen aus c) um 2 % erhöht.

**Aufgabe 4.9.** (aus [10]) Gegeben sei die Funktion $P = f(i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{(1+i)^k}$, die den Barwert $P$ eines Zahlungsstromes in Abhängigkeit von der Marktrendite beschreibt, wobei $Z_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) und $n$ feste Größen seien.

a) Berechne die erste Ableitung der Funktion.

b) Wie ändert sich näherungsweise $P$, wenn sich $i$ um $\Delta i$ ändert?

c) Berechne die Elastizität der Funktion $f$ bezüglich $i$ an der Stelle $\hat{\imath} = 5\%$, wenn $n = 3$, $Z_1 = 6$, $Z_2 = 6$, $Z_3 = 106$. Interpretiere das Ergebnis.

# 5 Trends, Korrelationen, Parameteridentifikation und Fehlerquadratmethode

## 5.1 Ökonomisches Problem: Trends und Korrelationen

(In Anlehnung an [10].) Die monatlichen Absatzzahlen (in Mill. EUR) einer Unternehmung haben sich in den vergangenen Monaten wie folgt entwickelt:

| Monat | Januar | Februar | März | April | Mai |
|---|---|---|---|---|---|
| Absatz | 40,4 | 32,9 | 25,7 | 19,3 | 14,8 |

Es stellt sich nun die Frage, ob und wie aus diesen (Meß-) Daten (siehe Abb. 5) ein Trend für die nächsten Monate vorhergesagt werden kann. Dafür müßte eine *Gesetzmäßigkeit* bekannt sein,

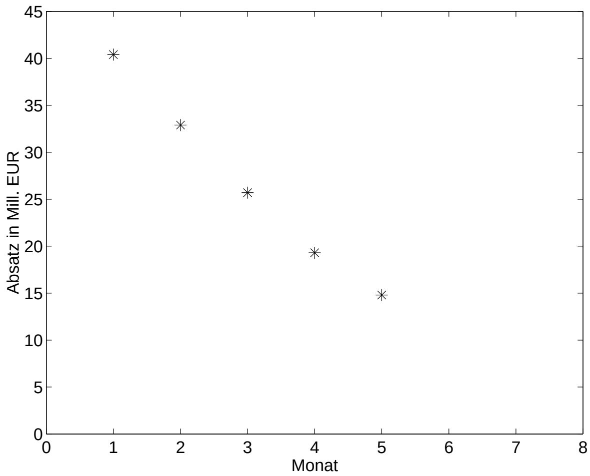



Abbildung 5: Absatzentwicklung

also eine Funktion, die die Abhängigkeit der Absatzzahlen vom Monat wiedergibt. Diese wird es nicht geben bzw. sie hängt von zu vielen (auch zufälligen) Parametern ab. Deshalb ist eine *Extrapolation* nur in einem kleinen Bereich möglich und auch nur unter der Annahme einer gewissen Absatzfunktion. Diese Annahme kann falsch sein, weshalb eben auch die Trendvorhersage falsch sein kann.

Oft stellt sich die Frage, ob zwei Merkmale (z. B. Körpergröße und Körpergewicht oder Absatzzahlen für verschiedene Produkte) etwas miteinander zu tun haben, vielleicht voneinander abhängen. Wir sprechen dann von Korrelation. Auch dies werden wir im folgenden untersuchen.

Schließlich folgen, gerade in der Wirtschaft, nicht alle (Absatz-, Kosten- usf.) Verläufe einem linearen Trend. Betrachten wir etwa die Fertigungskosten für ein Produkt, so werden diese sich im Laufe der Zeit verringern, denn die technologische Erfahrung wächst. Jedoch werden die Kosten eine gewisse untere Schranke nicht unterschreiten können.

## 5.2 Mathematischer Exkurs I: Fehlerquadratmethode und Ausgleichsgerade

Gegeben seien die Meß- oder Wertepaare $(x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$, z. B.

$$(2; 0.3) \qquad (4; 0.3) \qquad (6; 2.5) \qquad (8; 2.9).$$

Dabei können durchaus zu ein und derselben Meßstelle verschiedene Meßwerte aufgenommen werden Gesucht ist ein linearer Zusammenhang zwischen $x$ und $y$. Genauer nehmen wir an, daß die Größe $y$ in linearer Weise von der Größe $x$ abhängt, so daß

$$y = ax + b$$

gilt, wobei $a$ und $b$ zu bestimmen sind. Man sagt auch, die Parameter $a$, $b$ seien zu identifizieren.

Es ist klar, daß durch die Punkte $(x_i, y_i)$ keine Gerade zu legen sein wird. Vielmehr wird eine Gerade zu bestimmen sein, die in einem gewissen Sinne optimal liegt und die Meßwerte ausgleicht.

Der Fehler zwischen den gegebenen Meßdaten und dem vermeintlich exakten linearen Zusammenhang ist durch den Vektor

$$\begin{pmatrix} y(x_1) - y_1 \\ y(x_2) - y_2 \\ \vdots \\ y(x_m) - y_m \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir wollen den Zusammenhang $y = ax + b$, also die beiden noch unbekannten Parameter $a$ und $b$ derart bestimmen, als daß – in einem gewissen Sinne – der Fehler minimal ist. Hier gibt es nun verschiedene Ansätze, die allesamt darauf hinauslaufen, den Fehler in einer ganz bestimmten *Norm* zu messen und so die Länge des Fehlervektors zu beschreiben. So finden sich die Ansätze von

- Gauß mit der Forderung
$$\sum_{i=1}^{m} (y(x_i) - y_i)^2 \to \min;$$
- Legendre mit der Forderung
$$\sum_{i=1}^{m} |y(x_i) - y_i| \to \min;$$
- Tschebyscheff mit der Forderung
$$\max_{i=1,\ldots,m} |y(x_i) - y_i| \to \min.$$

Wir wollen uns nur mit dem Ansatz von Gauß befassen und sprechen dann von der *Methode der kleinsten Quadrate* (engl.: Least squares method).

Die Summe der Fehlerquadrate hängt offenbar von den Parametern $a$ und $b$ ab, ist also selbst eine Funktion $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b)$ in $a$, $b$. Einsetzen des linearen Zusammenhangs führt nämlich auf

$$\mathcal{F}(a, b) = \sum_{i=1}^{m} (ax_i + b - y_i)^2 \to \min.$$

Suchen wir das Extremum einer Funktion, so bestimmen wir all jene Stellen, an denen die Ableitung gleich Null ist (notwendige Bedingung) und prüfen danach das Vorzeichen der zweiten Ableitung an diesen Stellen (hinreichende Bedingung). Doch hier haben wir eine Besonderheit: Die Funktion $\mathcal{F}$ hängt nicht nur von einer, sondern von zwei Größen ab. So gibt es auch zwei erste Ableitungen, nach $a$ und nach $b$. Wir bezeichnen diese sogenannten *partiellen Ableitungen* mit

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b}.$$

Soll die Ableitung nach $a$ berechnet werden, so geschieht dies wie üblich, wobei man $b$ als Konstante ansieht. Entsprechendes gilt für die Ableitung nach $b$. Es folgen (ohne daß wir hierauf näher eingehen wollen) die notwendigen Bedingungen für das Vorliegen eines Extremums

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(ax_i + b - y_i)\,x_i = 0\,,$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(ax_i + b - y_i) = 0\,.$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich das *lineare Gleichungssystem*

$$a\sum_{i=1}^{m} x_i + bm = \sum_{i=1}^{m} y_i \tag{5.1a}$$
$$a\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i\,, \tag{5.1b}$$

aus dem die beiden Parameter $a$ und $b$ zu bestimmen sind.

Da $a$ und $b$ nur quadratisch in $\mathcal{F}$ eingehen, sind die notwendigen Bedingungen hier sogar hinreichend. Die Funktion $\mathcal{F}$ nimmt tatsächlich ihr Minimum in $a$ und $b$ an, wenn diese nur dem Gleichungssystem (5.1) genügen. Unter der Bedingung (5.1) sind der lineare Zusammenhang und mithin die *Ausgleichsgerade* eindeutig bestimmt.

Für unser Beispiel gilt:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i \cdot y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0.3 | 4 | 0.6 |
| 2 | 4 | 0.3 | 16 | 1.2 |
| 3 | 6 | 2.5 | 36 | 15.0 |
| $m = 4$ | 8 | 2.9 | 64 | 23.2 |
| $\sum$ | 20 | 6.0 | 120 | 40.0 |

Zu lösen ist daher das lineare Gleichungssystem

$$20a + 4b = 6$$
$$120a + 20b = 40$$

Dividieren wir die zweite Gleichung durch 5 und ziehen die erste Gleichung ab, so folgt $4a = 2$, d. h. $a = 0.5$. Dann folgt aus der ersten Gleichung $4b = 6 - 10 = -4$, also $b = -1$. In Abb. 6 sind sowohl die Meßdaten als auch die Ausgleichsgerade $y = 0.5x - 1$ zu sehen.

**Aufgabe 5.1.** Bestimme für das in Abschnitt 5.1 zitierte Unternehmen die unter der Annahme einer linearen Trendentwicklung zu erwartenden Absatzzahlen der nächsten Monate.

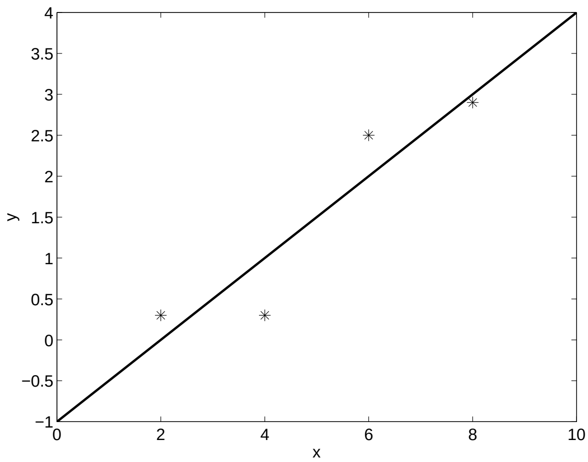



Abbildung 6: Meßdaten und lineare Funktion $y = 0.5x - 1$

**Aufgabe 5.2.** Bei einer Untersuchung wurden folgende Meßdaten aufgenommen:

$$(5; 1.5) \qquad (10; -0.75) \qquad (15; -1) \qquad (20; -1.75)\,.$$

Es wird ein linearer Zusammenhang vermutet. Bestimme diesen mit Hilfe der Fehlerquadratmethode.

Hängt $y$ linear von $x$ ab, so können wir umgekehrt auch sagen, $x$ hänge linear von $y$ ab, so daß wir

$$x = cy + d$$

ansetzen können. Die Parameter $c$ und $d$ sind nun aus der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{m} (x(y_i) - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (cy_i + d - x_i)^2 \to \ \min$$

zu bestimmen, welche auf das lineare Gleichungssystem

$$c\sum_{i=1}^{m} y_i + dm = \sum_{i=1}^{m} x_i$$
$$c\sum_{i=1}^{m} y_i^2 + d\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

führt.

Nach Lösen dieses Gleichungssystems erhalten wir so eine zweite Gerade

$$y = \frac{1}{c}x - \frac{d}{c}\,.$$

Doch für welche der beiden Geraden $y = ax + b$ oder $y = \frac{x-d}{c}$ sollen wir uns entscheiden? Die Antwort auf diese Frage richtet sich danach, welche Größe ($x$ oder $y$) fehlerbehaftet ist, also gemessen wird, und welche Größe als Unabhängige angesehen werden kann.

Sind beide Größen nur empirische Größen, so werden wir in aller Regel danach fragen, ob beide Größen miteinander korrelieren. Wir werden uns im folgenden überlegen, daß zwei Größen umso mehr miteinander korrelieren, desto kleiner der Winkel zwischen den beiden Geraden $y = ax + b$ und $y = \frac{x-d}{c}$ ist.

**Beispiel.** Über einen gewissen Zeitraum hinweg wurden die folgenden Absatzzahlen (in Tausend Stück) $x_i$ und $y_i$ für zwei verschiedene Produkte verzeichnet:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.3 | 3.5 | 1.69 | 12.25 | 4.55 |
| 2 | 1.2 | 3.9 | 1.44 | 15.21 | 4.68 |
| 3 | 0.7 | 2.0 | 0.49 | 4.00 | 1.40 |
| 4 | 0.3 | 1.0 | 0.09 | 1.00 | 0.30 |
| $m=5$ | 0.5 | 1.6 | 0.25 | 2.56 | 0.80 |
| $\sum$ | 4.0 | 12 | 3.96 | 35.02 | 11.73 |

Nehmen wir an, daß $y$ linear von $x$ abhängt, also $y = ax+b$, so ist nach der Fehlerquadratmethode das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4a + 5b &= 12 \\ 3.96a + 4b &= 11.73 \end{aligned}$$

zu lösen. Es folgt $y \approx 2.80x + 0.16$. Nehmen wir an, daß $x$ linear von $y$ abhängt, also $x = cy + d$, so ist

$$\begin{aligned} 12c + 5d &= 4 \\ 35.02c + 12d &= 11.73 \end{aligned}$$

zu lösen und wir erhalten $x \approx 0.34y - 0.02$, woraus $y \approx 2.92x + 0.06$ folgt (siehe Abb. 7). Der

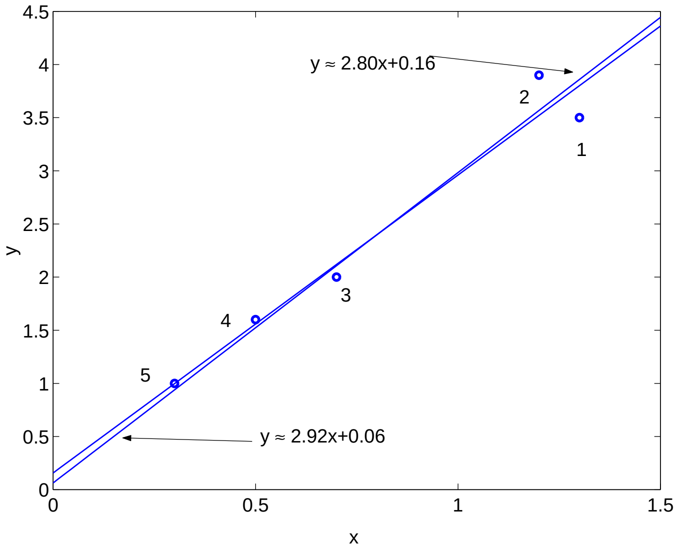



Abbildung 7: Ausgleichsgeraden

Winkel zwischen beiden Geraden ist sehr klein, was für eine hohe Korrelation spricht.

Um ein Maß für die Korrelation zweier Größen herzuleiten, wollen wir zunächst einige Kenngrößen aus der mathematischen Statistik einführen:

Unter dem *empirischen Mittel* oder auch arithmetischen Mittwelwert der Größen $x_1, \ldots, x_m$ verstehen wir den Wert

$$\bar{x} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i \,.$$

Entsprechend ist $\bar{y}$ definiert. Die *empirische Standardabweichung* ist als

$$\sigma_x := \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2}$$

definiert. Sie ist ein Maß für das Abweichen der Meßdaten $x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ vom Mittelwert $\bar{x}$. Das Quadrat $\sigma_x^2$ wird als *empirische Varianz* bezeichnet.

**Bemerkung.** Man mag verwundert sein, daß in der Definition von $\sigma_x$ durch $m-1$ und nicht durch $m$ geteilt wird. Doch dies erfährt eine weitreichende und tiefgehende Begründung in der Schätztheorie: Die obige Definition sichert, daß die empirische Standardabweichung eine sogenannte erwartungstreue Schätzung für die theoretische Standardabweichung der als normalverteilten Zufallsgröße $x$ ist. Für eine große Zahl von Meßwerten ist der Unterschied zwischen $1/(m-1)$ und $1/m$ gering, für kleines $m$ dagegen macht er sich deutlich bemerkbar.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} \left(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2\right) = \frac{1}{m-1} \left( \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{m} x_i + m\bar{x}^2 \right) \\
&= \frac{1}{m-1} \left( \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 2m\bar{x}^2 + m\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{m-1} \left( \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{x}^2 \right).
\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für $\sigma_y$.

Wir definieren außerdem noch die *empirische Kovarianz* von $x$ und $y$:

$$\mathrm{cov}_{x,y} := \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \;.$$

Offenbar gilt

$$\mathrm{cov}_{x,y} = \mathrm{cov}_{y,x} \,, \quad \mathrm{cov}_{x,x} = \sigma_x^2 \,, \quad \mathrm{cov}_{y,y} = \sigma_y^2 \,.$$

Nach einer Reihe elementarer Umformungen können wir die Ausgleichsgerade $y = ax + b$ auch als

$$y = \frac{\mathrm{cov}_{x,y}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x}) + \bar{y}$$

schreiben, woraus

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = \frac{\mathrm{cov}_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$$

folgt. Wir nennen

$$\tilde{x} := \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \,, \quad \tilde{y} := \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$$

die *standardisierten Größen* und

$$\rho_{x,y} := \frac{\mathrm{cov}_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

den Korrelationskoeffizienten. Es gilt $-1 \leq \rho_{x,y} \leq 1$. Es folgt nun

$$\tilde{y} = \rho_{x,y}\tilde{x}\,.$$

Für die zweite Gerade $x = cy + d$ bzw. $y = \frac{x-d}{c}$ ergibt sich

$$\tilde{x} = \rho_{x,y}\tilde{y} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{y} = \frac{1}{\rho_{x,y}}\tilde{x}\,.$$

Wir sagen, *zwei Größen korrelieren miteinander, wenn*

$$|\rho_{x,y}| \approx 1\,.$$

Denn dann ist der Winkel zwischen den beiden Geraden $\tilde{y} = \rho_{x,y}\tilde{x}$ und $\tilde{x} = \rho_{x,y}\tilde{y}$ nahezu Null. Eine solche Interpretation ist allerdings nur bei hinreichend großer Zahl $m$ von Daten statthaft. Ist $\rho_{x,y} = 0$, so stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander und die Größen $x$ und $y$ korrelieren *nicht* miteinander, sie sind voneinander unabhängig.

Seien $\phi$ bzw. $\psi$ der Winkel der Geraden $y = ax + b$ bzw. $y = \frac{x-d}{c}$ zur $x$-Achse. Dann gilt für den Winkel $\gamma := \phi - \psi$ zwischen den beiden Geraden:

$$\tan\gamma = \tan(\phi - \psi) = \frac{\tan\phi - \tan\psi}{1 + \tan\phi \cdot \tan\psi} = \frac{a - \frac{1}{c}}{1 + a \cdot \frac{1}{c}} = \frac{ac - 1}{a + c} = \frac{\rho_{x,y}^2 - 1}{\mathrm{cov}_{x,y}} \left( \frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} \right)^{-1}\,.$$

Für den Winkel $\tilde{\gamma}$ zwischen den „standardisierten Geraden“ gilt

$$\tan\tilde{\gamma} = \frac{\rho_{x,y}^2 - 1}{2\rho_{x,y}}\,.$$

**Aufgabe 5.3.** Bestimme den Korrelationskoeffizienten und die beiden Ausgleichsgeraden für

| $x_i$ | 3 | 7 | 11 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3 | 5 | 7 | 6 | 9 |

.

## 5.3 Mathematischer Exkurs II: Fehlerquadratmethode bei nichtlinearen Ansätzen

Oftmals kann der funktionale Zusammenhang zwischen zwei Größen $x$ und $y$ nicht durch eine Gerade angenähert werden. Vielmehr liegt ein nichtlinearer Zusammenhang vor, der z. B. durch eine

- quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$;
- hyperbolische Funktion $y = b - \frac{a}{x}$;
- Potenzfunktion $y = b \cdot x^a$;
- Exponentialfunktion $y = b \cdot a^x = b \cdot \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$;
- logistische Funktion $y = \frac{a}{1+b\mathrm{e}^{-cx}}$

beschrieben werden kann.

**Aufgabe 5.4.** Zeichne die obigen Funktionen für verschiedene Parameter $a$, $b$, $c$.

Sind Meßdaten $(x_i, y_i)$ gegeben, so wollen wir die Parameter $a, b, c$ entsprechend der Fehlerquadratmethode bestimmen.

Für den quadratischen Ansatz folgt

$$\mathcal{F}(a,b,c) = \sum_{i=1}^{m} \big(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\big)^2 \to \ \min .$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{m} x_i + cm &= \sum_{i=1}^{m} y_i \\ a\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{m} x_i &= \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{m} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{m} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 y_i\,, \end{aligned}$$

aus dem die Unbekannten $a$, $b$, $c$ bestimmt werden können.

**Beispiel.** Für die Absatzzahlen aus Abschnitt 5.1 folgt

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i^3$ | $x_i^4$ | $x_i y_i$ | $x_i^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 40.4 | 1 | 1 | 1 | 40.4 | 40.4 |
| 2 | 2 | 32.9 | 4 | 8 | 16 | 65.8 | 131.6 |
| 3 | 3 | 25.7 | 9 | 27 | 81 | 77.1 | 231.3 |
| 4 | 4 | 19.3 | 16 | 64 | 256 | 77.2 | 308.8 |
| 5 | 5 | 14.8 | 25 | 125 | 625 | 74.0 | 370.0 |
| $\sum$ | 15 | 133.1 | 55 | 225 | 979 | 334.5 | 1082.1 |

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 55a + 15b + 5c &= 133.1 \\ 225a + 55b + 15c &= 334.5 \\ 979a + 225b + 55c &= 1082.1 \end{aligned}$$

ergibt $a \approx 0.4857$, $b \approx -9.3943$ und $c \approx 49.4600$. In Abb. 8 sind die Daten als auch die Ausgleichsparabel

$$y \approx 0.4857x^2 - 9.3943x + 49.4600$$

dargestellt. Schenkt man dem quadratischen Trend Glauben, so wird das Unternehmen etwa im Oktober die Talsohle erreicht habe; danach geht es wieder aufwärts.

Beim hyperbolischen Ansatz $y = b - \frac{a}{x}$ gilt

$$\mathcal{F}(a,b) = \sum_{i=1}^{m} \left(b - \frac{a}{x_i} - y_i\right)^2 \to \ \min$$

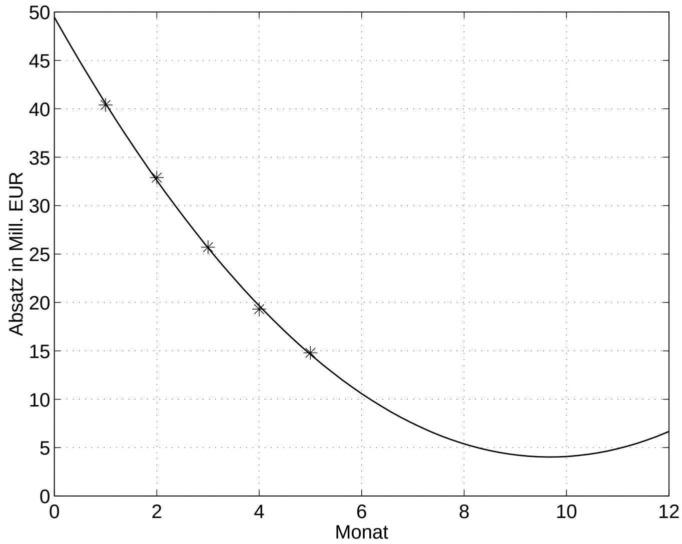



Abbildung 8: Absatzzahlen und quadratisches Ausgleichspolynom

und es ist das lineare Gleichungssystem

$$-a\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i}+bm=\sum_{i=1}^{m}y_i$$
$$a\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i^2}-b\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i}=-\sum_{i=1}^{m}\frac{y_i}{x_i}$$

zu lösen.

**Aufgabe 5.5.** (aus [10]) Der Bücherbestand einer Universitätsbibliothek (in Tausend Bestandseinheiten) entwickelte sich wie folgt:

| 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |
|---|---|---|---|---|
| 200 | 260 | 310 | 360 | 400 |

Bestimme die Ausgleichsgerade, -parabel und -hyperbel, verwende also für die Fehlerquadratmethode einen linearen, quadratischen und hyperbolischen Ansatz. Zeichne die Daten als auch die berechneten Kurven.

Liegt ein Zusammenhang der Gestalt

$$y=b\cdot x^a$$

vor, so führt Logarithmieren auf

$$\ln y=a\ln x+\ln b\,.$$

Dies entspricht dem linearen Zusammenhang

$$\eta=a\xi+\beta\,,\quad \eta=\ln y\,,\ \xi=\ln x\,,\ \beta=\ln b\,.$$

Die Parameter $a$ und $\beta$ können wir vermittels der Fehlerquadratmethode aus den Daten $(\xi_i,\eta_i)$ mit $\xi_i=\ln x_i$ und $\eta_i=\ln y_i$ bestimmen.

**Beispiel.** In einem Unternehmen konnte seit Beginn einer Produktion die Herstellungszeit deutlich verringert werden:

| Jahr | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 |
|---|---|---|---|---|---|
| Stückzahl | 10 000 | 12 000 | 11 000 | 15 000 | 14 000 |
| Arbeitszeit je 1000 Stk. in Std. | 100 | 90 | 85 | 84 | 83 |

Beachte, daß die Verringerung der Arbeitszeit von der seit Produktionsbeginn produzierten Stückzahl abhängt, die $x$-Werte also kumulativ anzugeben sind:

| Jahr | $x_i$ | $y_i$ | $\xi_i = \ln x_i$ | $\eta_i = \ln y_i$ | $\xi_i^2$ | $\xi_i \eta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1998 | 10000 | 100 | 9.2103 | 4.6052 | 84.8304 | 42.4152 |
| 1999 | 22000 | 90 | 9.9988 | 4.4998 | 99.9760 | 44.9927 |
| 2000 | 33000 | 85 | 10.4043 | 4.4427 | 108.2487 | 46.2225 |
| 2001 | 48000 | 84 | 10.7790 | 4.4308 | 116.1859 | 47.7596 |
| 2002 | 62000 | 83 | 11.0349 | 4.4188 | 121.7688 | 48.7614 |
| $\sum$ | 175000 | 442 | 51.4272 | 22.3973 | 531.0097 | 230.1514 |

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 51.4272a + 5\beta &= 22.3973 \\ 531.0097a + 51.4272\beta &= 230.1514 \end{aligned}$$

(zur Bestimmung der Ausgleichsgeraden $\eta = a\xi + \beta$) lautet $a \approx -0.1044$ und $\beta \approx 5.5533$, d. h. $b = \mathrm{e}^\beta \approx 258.0866$. Die Daten als auch die Trendfunktion

$$y \approx 258.0866 \cdot x^{-0.1044}$$

sind in Abb. 9 dargestellt.

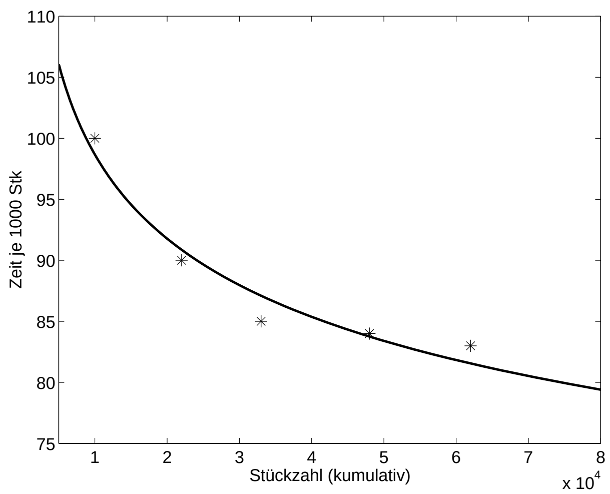



Abbildung 9: Anpassung an Potenzfunktion

**Aufgabe 5.6.** Für die Daten aus vorstehendem Beispiel berechne man die Ausgleichshyperbel.

Liegt ein exponentieller Zusammenhang der Gestalt

$$y = b \cdot a^x$$

vor, so führt Logarithmieren auf

$$\ln y = \ln a \cdot x + \ln b\,.$$

Dies entspricht dem linearen Zusammenhang

$$\eta = \alpha x + \beta\,, \quad \eta = \ln y\,,\ \alpha = \ln a\,,\ \beta = \ln b\,.$$

Die Parameter $\alpha$, $\beta$ können wir nun vermittels der Fehlerquadratmethode aus den Daten $(x_i, \eta_i)$ mit $\eta_i = \ln y_i$ bestimmen.

Die logistische Funktion beschreibt ein Wachstum, welches im Anfangsstadium exponentiell ist und später eine Sättigung erreicht. Dieses Wachstumsverhalten ist eines der wichtigsten, da es sehr häufig in der Natur zu beobachten ist (z. B. zeitliche Entwicklung von ansteckenden Krankheiten, Bevölkerungswachstum, Wachstum von Sonnenblumen). Gleichwohl wollen wir es hier nicht weiter studieren, da die Fehlerquadratmethode auf ein nichtlineares Gleichungssystem führt, welches wir (noch) nicht lösen können.

## Literatur

[1] M. Adelmeyer und E. Warmuth. *Finanzmathematik für Einsteiger.* Vieweg, Braunschweig, 2003.

[2] M. J. Beckmann und H. P. Künzi. *Mathematik für Ökonomen.* Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[3] J. Bloech. *Lineare Optimierung für Wirtschaftswissenschaftler.* Westdeutscher Verlag, Opladen, 1974.

[4] W. Eichholz. *Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik.* Fachbuchverlag, Leipzig, 1997.

[5] B. Felderer und S. Homburg. *Makroökonomik und neue Makroökonomik.* Springer-Verlag, Berlin, 5. Aufl., 1990.

[6] S. Gottwald et al., Hrsg. *Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1995.

[7] W. Henrichsmeyer, O. Gans und I. Evers. *Einführung in die Volkswirtschaftslehre.* Ulmer, Stuttgart, 8. Auflage, 1988.

[8] J. Herzberger. *Einführung in die Finanzmathematik.* Oldenbourg, München, 1999.

[9] A. Karmann. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.* Oldenbourg, München, 5. Aufl., 2003.

[10] B. Luderer. *Klausurtraining Mathematik und Statistik für Wirtschaftswissenschaftler. Aufgaben – Hinweise – Lösungen.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 2. Aufl., 2003.

[11] B. Luderer, C. Paape und U. Würker. *Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik. Beispiele – Aufgaben – Formeln.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 3. Aufl., 2002.

[12] B. Luderer und U. Würker. *Einstieg in die Wirtschaftsmathematik.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 5. Aufl., 2003.

[13] V. Nollau. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 3. Aufl., 1999.

[14] G. Ose. *Linearoptimierung.* Fachbuchverlag, Leipzig, 1981.

[15] K. Schick. *Mathematik und Wirtschaftswissenschaft.* Diesterweg Salle, Frankfurt a. M., 1971.

[16] G. Schulz. *Mathematik für wirtschaftswissenschaftliche Studiengänge.* Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg, 2. Aufl., 1997.

[17] C. Stahmer, P. Bleses und B. Meyer. *INPUT-OUTPUT-RECHNUNG: Instrumente zur Politikberatung.* Statistisches Bundesamt, Wiesbaden, 2000.

[18] E. Zeidler et al., Hrsg. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1996.