TU Berlin, Institut für Mathematik
Seminar Differentialgleichungen im WS 07
Prof. Dr. P. Wittbold

Evolutionsgleichungen mit Gedächtnis

vorgelegt von
Jan Heiland
heiland@math.tu-berlin.de
betreut von Dr. E. Emmrich
19. August 2008

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit geht es um Evolutionsgleichungen, bei denen jede Zustandsänderung in Abhängigkeit von allen früheren Zuständen vonstatten geht. Dazu werden zunächst einige physikalische Phänomene aufgeführt und deren Modellierung mit ebensolchen Gleichungen beschrieben. Es folgt eine Auflistung von Resultaten aus der Analysis solcher Gleichungen. Der Hauptteil besteht aus Satz und Beweis zur eindeutigen Lösbarkeit einer speziellen Klasse derartiger Evolutionsgleichungen in variationeller Formulierung.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Anwendungsbeispiele und Modelle **4**
2.1 Modellierung viskoelastischer Fluide 4
2.2 Wärmeausbreitung in Materialien mit Gedächtnis 7

3 Aussagen zu Evolutionsgleichungen mit Gedächtnis **8**

4 Eindeutige Existenz in einem Spezialfall **10**
4.1 Definitionen, Hilfsresultate und Vorbemerkungen 10
4.2 Problembetrachtung 11
4.3 Lösbarkeit und Eindeutigkeit 12
4.3.1 Variationelle Formulierung 12
4.3.2 Galerkin-Diskretisierung 13
4.3.3 Lösbarkeit des Ersatzproblems 14
4.3.4 A-priori-Abschätzungen und Konvergenz 16

5 Ausblick **20**

1 Einleitung

Als Evolutionsgleichungen werden im Allgemeinen Gleichungen kategorisiert, welche die zeitliche Entwicklung einer physikalischen Größe in einem räumlichen Gebiet beschreiben. Bekannte Vertreter sind die hier vereinfachten Wärmeleitgleichung

$$u_t - \nabla(\mu \nabla u) = f$$

und Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

beide in einem Gebiet Ω mit komplettierenden Anfangs- und Randbedingungen. Die Änderungen u_t und u_{tt} des Zustands hängen in der Beschreibung obiger Gleichung nur von dem aktuellen physikalischen Zustand und dem aktuellen Wert der Inhomogenität f ab. Bei obiger Wellengleichung im Eindimensionalen mit homogenen Dirichletrandbedingungen, also eine eingespannte Saite, ist es naheliegend, dass die Zustandsentwicklung, also wie die Saite sich bewegt, von ihrer aktuellen Position und ihrer aktuellen Geschwindigkeit abhängt. Insbesondere spielt es keine Rolle, ob die Saite schon eine Weile geschwungen hat und dann zum Zeitpunkt τ den Zustand $u(\tau) =: \Gamma$ erreicht, oder ob dieser Zustand Γ für eine zweite gleiche Saite als Anfangsbedingung gesetzt wird. Im folgenden Verlauf stimmen die Zustände der beiden Saiten überein.

Diese Beobachtungen finden sich in der mathematischen Formulierung wieder und scheinen im vereinfachten Rahmen plausibel. Dennoch ist es denkbar, dass die früheren Zustände durchaus eine Rolle spielen. Beim Beispiel der eingespannten Saite ist davon auszugehen, dass das Material zusehends ermüdet, je länger die Saite gespielt wird und je stärker die Auslenkungen sind.

Die hier betrachtete spezielle Form von Evolutionsgleichungen formuliert die Zustandsänderungen physikalischer Größen als abhängig sowohl vom aktuellen Stadium als auch von allen vorhergegangenen. Zum Beispiel in der Form

$$u_t(t) + (Au)(t) + \int_{-\infty}^{t} K(\tau, t, u(\tau))\mathrm{d}\tau = f(t) \ , \ t \in (0, T) \tag{1.1}$$

mit einem Operator $A = A(t)$. Die Abhängigkeit erscheint in der Gleichung als ein Integral über alle Zeiten bis zum aktuellen Zeitpunkt über eine Funktion K, die unter anderem vom Zustand u zur entsprechenden Zeit abhängt. In vielen Fällen gilt $K(t, s, u(s)) = k(t, s)Bu(t)$, mit einem Operator B und einer Kernfunktion $k(t, s)$, die oftmals Faltungscharakter besitzt: $k(t, s) = k(t - s)$.

In den meisten Anwendungsfällen ist es zudem weder sinnvoll noch notwendig über alle Zeiten, also von $-\infty$ an, zu integrieren. Oft kann man davon ausgehen, dass der Einfluss früherer Zustände mit fortschreitender Zeit abnimmt, und an Stelle einer unendlich weit zurückgehenden Entwicklung einen initialen Zustand zur Zeit $t = 0$ annehmen. Das entspricht auch dem Fall, dass die gesamte Vorgeschichte bekannt ist. Somit vereinfacht sich (1.1) zu

$$u_t(t) + (Au)(t) + \int_{0}^{t} K(\tau, t, u(\tau))d\tau = g(t)$$

wobei die Inhomogenität g nun den initialen Zustand beziehungsweise die bekannte Vorgeschichte $\int_{-\infty}^{0} K(\tau, t, u(\tau))\mathrm{d}\tau$ enthält.

Werden aber beispielsweise periodische Entwicklungen beschrieben, ist der vollständige Rückbezug wesentlich.

2 Anwendungsbeispiele und Modelle

Wie oben angemerkt beschreiben Evolutionsgleichungen Zustandsänderungen physikalischer Größen. Die genannten Wärme- und Wellengleichung kommen aus der Modellierung der Wärmeausbreitung in Körpern beziehungsweise von Schwingungen in Saiten, Membranen oder Körpern und werden dort entsprechend auch angewendet.

Evolutionsgleichungen mit Gedächtnis kommen ins Spiel, wo frühere Zustände sich auf die aktuelle Zustandsänderung auswirken. Anwendung finden diese speziellen Evolutionsgleichungen häufig und vorwiegend in der Modellierung des Verhaltens viskoelastischer Materialien unter Spannung und in der Beschreibung der Wärmeausbreitung in Formgedächtnismaterialien.

2.1 Modellierung viskoelastischer Fluide

Das bedeutendste Anwendungsgebiet von gedächtnisbehafteten Evolutionsgleichungen ist die Modellierung sogenannter viskoelastischer Materialien. Obwohl diese betrachteten Stoffe weniger oder mehr die Eigenschaften von festen Materialien und die von Fluiden im allgemeinen Sprachgebrauch in sich vereinen, sei im Folgenden nur von viskoelastischen Fluiden gesprochen.

Elastizität und Viskosität beschreiben das Verhalten von Stoffen unter Deformation. In der Festkörpermechanik werden elastische Körper behandelt, die sich unter äußeren Kräften verformen und danach unmittelbar wieder in ihren Ausgangszustand zurückgehen, sofern die Deformation eine materialabhängige Größenordnung nicht überschreitet. Viskose Stoffe unter Schubspannung widerstehen zunächst und verformen sich dann allmählich, ohne wieder in ihre Ausgangslage zurückzugehen. Somit ist beispielsweise eine Tischplatte, die sich unter Last durchbiegt als elastisch und die von einem Ventilator getriebene Luft als viskos zu betrachten.

Viskoelastisch heißen Stoffe, die sowohl viskose als auch elastische Eigenschaften aufweisen. Als anschauliche Beispiele können Zahnpasta und Honig dienen.

In der Modellierung von Fluiden wird im allgemeinen zwischen Newtonschen und Nicht-Newtonschen Fluiden unterschieden. Vereinfacht gesagt stellen die Newtonschen die viskosen Fluide und die Nicht-Newtonschen alle übrigen dar. Diese Unterscheidung ist essentiell.

Zunächst gelten allgemein die grundlegenden Gleichungen der Fluiddynamik, die den Zustand eines inkompressiblen Fluides mit konstanter Dichte ρ in einem Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^3$ zu einem Zeitintervall $[0, T]$ beschreiben. Die Unbekannte ist hier das Geschwindigkeitsfeld, also eine vektorwertige Funktion u der Variablen

$t \in [0, T]$ und $x \in \Omega$:

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{2.1}$$
$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \cdot u) = \nabla \cdot \Sigma + \rho f \tag{2.2}$$

Die Divergenzfreiheit aus Gleichung (2.1) bedeutet physikalisch die Inkompressibilität des betrachteten Fluides und leitet sich bei konstanter Dichte unmittelbar aus der Forderung der Massenerhaltung ab. Gleichung (2.2) beinhaltet, lax formuliert, die Aussage, dass die Änderung des differentiellen Impulses ρu gleich der Summe der Wirkung der inneren $\nabla \cdot \Sigma$ und äußeren Kräfte ρf ist. Hierbei bezeichnet Σ den Cauchy-Spannungstensor, der die Interaktion der Fluidpartikel beschreibt. Die Beschreibung liegt hier in Eulerkoordinaten vor. Der Zusammenhang, insbesondere der Ableitung, mit den Lagrangekoordinaten und eine genaue Herleitung und Beschreibung der Gleichungen findet sich beispielsweise in [Loj78].

Obige, mit den spezifischen Randbedingungen vervollständigte, und eventuell vereinfachte Gleichungen beschreiben allgemeine inkompressible Strömungsprobleme. Zur Bestimmung einer Lösung muss aber zunächst noch der Spannungstensor, den Materialgesetzen des betrachteten Fluid entsprechend, modelliert werden.

Für den Großteil von Strömungssituationen angewandt und ausreichend ist das Newtonsche Gesetz, nach dem gilt

$$\Sigma = -pI + \sigma, \ \sigma = 2\mu\mathcal{D}(u) \tag{2.3}$$

wobei p der Druck, $\mu = \mu(x, t)$ der Koeffizient der Viskosität und $\mathcal{D}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ der symmetrisierte Gradient der Geschwindigkeit ist. Die Dekomposition $\Sigma = -pI + \sigma$ ist allgemeingültig und beinhaltet, wegen der Eigenschaft $\sigma = 0$, falls $u = 0$, den hydrostatischen Fall.

Gilt für ein Fluid (2.3), dann spricht man von einem Newtonschen Fluid und Σ kann direkt durch $\mathcal{D}(u)$ beziehungsweise ∇u ausgedrückt werden. Unter der Annahme, dass ρ konstant ist, wird (2.2) zur bekannten Navier-Stokes Gleichungen, die zur Modellierung der meisten gängigen Probleme herangezogen wird,

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta u + f$$
$$\nabla \cdot u = 0$$

Hierbei ist $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die sogenannte dynamische Viskosität. Die Navier-Stokes-Gleichung ist eine Evolutionsgleichung zur Beschreibung viskoser Fluide.

Zur Beschreibung viskoelastischer Fluide muss (2.3) durch andere Materialgesetze ersetzt werden. Im Artikel [FCGO02] listen Fernandéz-Cara et al. verschiedene Ansätze für verschiedene Typen viskoelastischer Fluide auf. Beispielhaft sei hier auf das weit verbreitete Modell, das der sogenannten Oldroyd-Fluide, eingegangen. Das Oldroyd-Modell gibt die Zerlegung $\Sigma = -pI + \sigma$ vor, wobei σ der Differentialgleichung

$$\sigma + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}_\alpha \sigma}{\mathcal{D}t} = 2\mu\big(\mathcal{D}(u) + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}(u)}{\mathcal{D}t}\big) \tag{2.4}$$

genügt. Die sogenannte Oldroyd-Ableitung $\mathcal{D}_\alpha$ wird zum Beispiel in [FCGO02] definiert und gilt im mit dem Fluidpartikel mitbewegten, rotierten und verzerrten Koordinatensystem, während die Konstanten λ_1 bzw λ_2 die physikalischen Stoffeigenschaften der Relaxations-Zeit beziehungsweise der Retardations-Zeit ($0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$) beschreiben. Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ liegt ein viskoses Fluid vor und das Oldroyd-Modell geht in das Newtonsche über.

Die herausragende Eigenschaft des Oldroyd-Modells ist, dass es das Gedächtnis der viskoelastischen Fluide im Allgemeinen und der Oldroyd-Fluide im Speziellen modelliert. Das heißt einfach gesagt, dass die zu einer gegebenen Zeit vorherrschenden Spannungen nicht nur vom aktuellen sondern auch von allen vorher angenommenen Zuständen abhängt. Zur Illustration, wie sich das in der beschreibenden Gleichung niederschlägt, wird im Folgenden ein linearisiertes Modell betrachtet.

Dazu wird angenommen, dass ρ konstant und u und σ so klein sind, dass in (2.4) quadratische Terme vernachlässigt werden können. Damit ist das System durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{2.5}$$

$$\rho u_t = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + \rho f \tag{2.6}$$

$$\sigma + \lambda_1 \sigma_t = 2\mu \left(\mathcal{D}(u) + \lambda_2 \mathcal{D}(u)_t\right) \tag{2.7}$$

Das Materialgesetz kann umgeschrieben werden als

$$\sigma = 2\mu \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{D}(u) + \tau \tag{2.8}$$

sofern τ der Differentialgleichung

$$\tau + \lambda_1 \tau' = 2\mu\big(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\big)\mathcal{D}(u) \tag{2.9}$$

genügt. So kann σ als Summe eines "Newtonschen Teils" und einem Spannungstensor τ für den elastischen Teil interpretiert werden. Weitere Umformungen von (2.9) liefern

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{1/\lambda_1}\tau\right) = \frac{2\mu}{\lambda_1}\big(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\big)e^{t/\lambda_1}\mathcal{D}(u)$$

woraus unter der Annahme, dass $\tau|_{t=0} = \tau_0$ in ganz Ω bekannt ist, folgt

$$\tau(x,t) = e^{-t/\lambda_1}\tau_0(x) + \frac{2\mu}{\lambda_1}\big(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\big)\int_0^t e^{-(t-s)/\lambda_1}\mathcal{D}(u)(x,s)\mathrm{d}s$$

Diese Gleichung in (2.8) und (2.6) eingesetzt führt, im Gegensatz zur obigen für Newtonsche Fluide, auf eine Evolutionsgleichung mit Gedächtnis.

2.2 Wärmeausbreitung in Materialien mit Gedächtnis

Ein weiteres Anwendungsfeld ist die Modellierung der Wärmeausbreitung in Materialien, deren Eigenschaften sich über die Zeit unter dem Einfluss der Wärme verändern.

Für die interne Energie eines Körpers, der einen Bereich Ω einnimmt, gilt zunächst allgemein die Formel, dass die Änderung im Ort x zur Zeit t gleich der Produktion h abzüglich der Divergenz des Wärmestroms q ist,

$$\rho e_t = -\text{div } q + h \tag{2.10}$$

Hierbei ist ρ die Dichte und e die spezifische innere Energie, für die das allgemeine Materialgesetz den Zusammenhang mit der Temperatur u, der Wärmekapazität κ und der initialen inneren Energie e_0 herstellt

$$e = e_0 + \kappa u$$

Wird als zweites Materialgesetz auf das Fourier Gesetz, nämlich

$$q = \kappa \nabla u$$

mit dem materialspezifischen Wärmeleitkoeffizienten k zurückgegriffen, ergibt das, in (2.10) eingesetzt, die Wärmeleitgleichung

$$\kappa \rho u_t = \text{div } (k \nabla u) + h, \text{ in } \Omega, \, t > 0$$

Diese einfache Evolutionsgleichung ist in der Modellierung gedächtnisbehafteter Materialien nicht anwendbar. Thomée führt in [Tho, S. 2] ein alternatives Materialgesetz an und verweist auf die bei [GP68] und [Nun71] beschriebene physikalische Interpretation. Setzt man an Stelle des Fourierschen Gesetzes für den Wärmefluss die Beziehung

$$q = -k \nabla u - \int_{-\infty}^{t} \text{div } (b(t,s) \nabla u(s)) \mathrm{d}s, \text{ in } \Omega, \, t > 0 \tag{2.11}$$

in (2.10) ein, erhält man unter der Annahme, dass $u(t)$ bekannt ist für $t \leq 0$ und dass die Kernfunktion von der Gestalt $b(t,s) = b(t-s)$ ist, die Beziehung

$$\kappa \rho u_t = \text{div } (k \nabla u) + \int_{0}^{t} \text{div } (b(t-s) \nabla u(s)) \mathrm{d}s + f(t) \tag{2.12}$$

mit

$$f(t) = h(t) + \int_{-\infty}^{0} \text{div } (b(t-s) \nabla u(s)) \mathrm{d}s$$

Diese Evolutionsgleichung mit Gedächtnis entspricht, unter weiteren Voraussetzungen an b, dem in Abschnitt 4 behandelten Typ.

3 Aussagen zu Evolutionsgleichungen mit Gedächtnis

Betrachtet man beispielhaft die in der Einleitung angeführte allgemeine Evolutionsgleichung mit Gedächtnis

$$u'(t) + A(t)u(t) + \int_{-\infty}^{t} B(\tau, t)u(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t),\ t \in (0, T) \tag{3.1}$$

in ihren Komponenten, wird deutlich, woher die verschiedenen Ansätze zur Analysis solcher Gleichungen stammen, auf denen unter anderem die nachfolgend aufgeführten Aussagen basieren. Gesucht ist in allen Fällen eine abstrakte Funktion $u(t)$, die aus dem Zeitintervall in einen passend gewählten Funktionenraum V abbildet. Die Operatoren $A(t)$ und $B(t, s)$ sind oftmals Differentialoperatoren und bilden Funktionen aus V in einen geeigneten Raum ab.

Ganz allgemein handelt es sich bei (3.1) um eine sogenannte Integrodifferentialgleichung, dementsprechend kommt die Theorie zu Differential- und auch die über Integralgleichungen zum Einsatz. Prüß [Pru93, S. 184] listet eine Reihe von Autoren auf, welche den Integralterm von Gleichungen der Form

$$u'(t) = A(t)u(t) + \int_{s}^{t} B(t, \tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau,\ u(s) = u_0 \in X,\ t \geq s \tag{3.2}$$

als Störung der Evolutionsgleichung $u'(t) = A(t)u(t) + f(t)$ auffassen. Dabei generiert die Operatorfamilie $A(t)$ einen Evolutionsoperator in einem passenden Raum X. $B(t)$ ist $A(t)$ untergeordnet, beispielsweise in dem Sinne, dass $t \mapsto B(t)x$ auf $[0, T]$ messbar ist für alle $x \in D(A)$ und dass gilt $|B(t)x| \leq \phi(t)(|x| + |Ax|)$ f.ü. in $[0, T]$ für ein $\phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$.

Eine andere weitgefasste Theorie – die der Faltungsintegrale – wird anwendbar, wenn in (3.2) $B(t, s) = B(t-s)$ ein sogenannter Faltungskern ist. Resultate zu Gleichungen der Art

$$u' = Au + B * u + f,\ u(0) = u_0 \in X \tag{3.3}$$

mit der Notation $k*u(t) = \int_0^t k(t-s)u(s)\mathrm{d}s$ und unter den gleichen Bedingungen wie oben, finden sich unter anderen in [Pru93, S. 155ff] und [GLS90, S. 324ff].

Auf (3.1) zugeschnittene Ergebnisse wurden mit Hilfe der Eigenschaften sogenannter Volterra-Operatoren erzielt. Der folgende Satz ist formuliert für Gleichungen der Form

$$u' + Au = f \tag{3.4}$$

für Volterra Operatoren A, die einen Funktionenraum $X = L^p(V) \cap L^{p_0}(H)$ mit $1 < p \leq p_0 < \infty$ über einem Gelfand-Dreier $V \subseteq H \subseteq V^*$ in dessen Dualraum $X^* = L^{p^*}(V) \cap L^{p_0^*}(H)$ abbilden. Die Ableitung u' bezüglich $t \in (0, T)$ ist im distributionellen Sinne aufzufassen.

Satz 3.1 *Sei $A \in (X \to X^*)$ ein radialstetiger, monotoner und koerzitiver Volterra-Operator. Dann besitzt die Aufgabe*

$$u' + Au = f,\ u(0) = u_0 \tag{3.5}$$

für beliebige $f \in X^*$ und $u_0 \in H$ genau eine Lösung u. Es ist $u \in \mathcal{W}(0,T) := \{v \in X : v' \in X^*\} \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T];H)$, und die Zuordnung $u_0 \mapsto u$ ist als Abbildung von H in $\mathcal{C}([0,T];H)$ stetig.

Der Beweis dazu findet sich in [GGZ74, S. 201ff]. Der Begriff des Gelfand-Dreiers und der Raum $\mathcal{W}(0,T)$ spielen im folgenden Kapitel eine wesentliche Rolle und werden dort erläutert.

Im Prinzip ließe sich die unten bewiesene Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Evolutionsgleichung unter den speziellen Gegebenheiten über den Satz aus [GGZ74] erhalten. Dazu ist zu zeigen, dass der Operator $Gu(t) = Au(t) + \int_0^t \beta(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$ ein Volterra-Operator mit den geforderten Eigenschaften Radialstetigkeit, Koerzitivität und Monotonie ist.

Genau den in Abschnitt 4 betrachteten Typ von Evolutionsgleichungen mit Gedächtnis behandelt Thomée in seiner Arbeit [Tho] mit den Mitteln der Halbgruppentheorie. Hier wird das abstrakte Anfangswertproblem mit schwach singulärem Kern

$$u'(t) + Au(t) = \int_0^t b(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s + f(t),\ t > 0,\ u(0) = u_0 \tag{3.6}$$

mit einem partiellen Differentialoperator 2. Ordnung $B(t,s)$ mit glatten Koeffizienten, einer skalaren Kernfunktion b mit

$$|b(t)| \le Ct^{-\alpha},\ \alpha \in (0,1)$$

und einem selbstadjungierten, positiven elliptischen Differentialoperator 2. Ordnung A in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ betrachtet. Dabei sei $D(B(\cdot,\cdot)) = D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset H = L_2(\Omega)$.

Satz 3.2 *Es existiere $\delta > 0$ und $0 < \gamma < 1$ derart, dass die rechte Seite der Ungleichung*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_2 + \|u_t(t)\| + \int_0^t (\|u_t(s)\|_2 + \|u_{tt}(s)\|)\,ds \\ \le C(\|u_0\|_{2+\delta} + \|f(0)\|_\delta + \sup s \le t(s^\gamma\|f_t(s)\|_\gamma) \end{aligned} \tag{3.7}$$

endlich ist. Dann hat (3.6) eine eindeutig bestimmte Lösung $u(t)$ mit der durch Ungleichung (3.7) gegebenen Regularität.

4 Eindeutige Existenz in einem Spezialfall

Der betrachtete Spezialfall ist eine Familie von gedächtnisbehafteten Integrodifferentialgleichungen mit einem schwach singulären Kern. Wie in früheren Abschnitten werden auch in diesem Kapitel abstrakte Funktionen behandelt und, im Sinne der besseren Lesbarkeit, stillschweigend mit den konkreten Funktionen identifiziert. In diesem Kapitel wird ein Ansatz verfolgt, der auf der Betrachtung eines Gelfand-Dreiers basiert. Die Beschränkung auf eine Klasse von Kernfunktionen schränkt die Menge möglicher Probleme ein, mit dem Beweis fällt jedoch eine Verfahrensvorschrift zur numerischen Lösung dieser häufig auftretenden Gleichung ab.

4.1 Definitionen, Hilfsresultate und Vorbemerkungen

Folgende Aussagen und Definitionen spielen in der Betrachtung der behandelten Evolutionsgleichung eine wesentliche Rolle und werden im Weiteren als bekannt vorausgesetzt.

Definition 4.1 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ reelle Banach-Räume. X heißt eingebettet in Y, wenn es einen linearen, injektiven Operator $j : X \to Y$ gibt. Ist j stetig, so heißt die Einbettung stetig (geschrieben: $X \hookrightarrow Y$). Eine Einbettung ist kompakt (geschrieben: $X \overset{d}{\hookrightarrow} Y$), wenn $X \hookrightarrow Y$ und jede in X beschränkte Folge $\{x_n\}$ eine in Y konvergente Teilfolge $\{j(x_{n'})\}$ besitzt.*

Das Vorliegen einer stetigen Einbettung ist gleichwertig zur Existenz einer Konstanten $\alpha > 0$ mit

$$\|j(x)\|_Y \leq \alpha \|x\|_X, \forall x \in X \tag{4.1}$$

Diese sogenannte Poincare-Friedrichsche-Ungleichung ist bei der Betrachtung von Problemen, die über einen Gelfand-Dreier formuliert sind, von praktischer Bedeutung.

Definition 4.2 *Sei V ein reeller, separabler, reflexiver Banach-Raum mit dem Dualraum V^*, H ein reeller, separabler Hilbert-Raum und sei V stetig eingebettet und liege dicht in H. Dann bilden die Räume V, H und V^* einen Gelfand-Dreier (Evolutionstripel).*

Es sei bemerkt, dass der Beschränkung auf reelle und separable Räume nicht alle Autoren folgen.

Die gängige Kurzschreibweise $V \subseteq H \subseteq V^*$ macht Sinn, da $V \subseteq H \Rightarrow H^* \subseteq V^*$ und $H = H^*$ gilt und die Räume entsprechend als Teilmengen aufgefasst werden können. Das Standardbeispiel für einen Gelfand-Dreier liefert $V = H_0^1(a, b), H = L^2(a, b)$ und $V^* = H^{-1}(a, b)$.

Für die Behandlung der Gleichung sind außerdem die Definition und einige Eigenschaften eines auf so einem Gelfand-Dreier aufbauenden Funktionenraums von Wichtigkeit, beschrieben im folgenden

Satz 4.1 *Sei $V \subseteq H \subseteq V^*$ ein Gelfand-Dreier. Dann ist*

$$\mathcal{W}(0,T) := \{u \in L^2(0,T;V) : u' \in L^2(0,T;V^*)\}$$

in natürlicher Weise ein linearer Raum und, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{W}(0,T)} := \left(\|u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;V^*)}\right)^{1/2}$$

ein Banach-Raum. Ferner ist $u \in \mathcal{W}(0,T)$ fast überall gleich einer Funktion aus $\mathcal{C}([0,T];H)$ und es gilt die stetige Einbettung

$$\mathcal{W}(0,T) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T];H)$$

Der Beweis ist bei Emmrich [Emm04, S. 207] nachzulesen.

4.2 Problembetrachtung

In diesem Abschnitt wird die Existenz einer Funktion u, die unter später spezifizierten Vorraussetzungen an die Koeffizienten das abstrakte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) + \displaystyle\int_0^t \beta(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s = f(t) \\ \hfill u(0) = u_0 \in H \end{cases} \tag{4.2}$$

auf einem Intervall $(0,T)$ löst, untersucht. Hierbei sei die Ableitung u' bezüglich t im distributionellen Sinne aufzufassen. Die betrachteten Räume gehören einem Gelfand-Dreier $V \subseteq H \subseteq V^*$ an, $\beta : [0,T] \to \mathbb{R}$ ist eine skalare Funktion, $A, B \in B(V, V^*)$ sind beschränkte lineare Operatoren aus V in den Dualraum V^* und $f(t)$ sei aus V^*. Eine Lösung dieser Evolutionsgleichung ist somit im Raum V zu suchen und muss eine distributionelle Ableitung in V^* besitzen, also gerade in $\mathcal{W}(0,T)$ liegen.
Die betrachtete Gleichung beschreibt die Veränderung einer Größe u im Raum V, typischerweise ein Funktionenraum über einem Gebiet inklusive Randbedingungen. Mit dem integralen Term, dem zeitlichen Rückgriff, gehört (4.2) in die Klasse der parabolischen Evolutionsgleichungen mit Gedächtnis. Mit obigen Konkretisierungen und folgenden Annahmen wird (4.2) zu einem Spezialfall solcher Evolutionsgleichungen.
Man kann zeigen, dass sich die eindeutige Lösbarkeit unter den getroffenen Annahmen aus dem allgemeinen Satz aus Gajewski, Gröger, Zacharias gewinnen lässt. Dennoch macht die separate Betrachtung dieser Klasse von Evolutionsgleichungen Sinn. Einerseits findet dieser Typ besonders häufig Anwendung, das heißt auch, dass die Spezifizierungen dem Anwendungsbereich entsprechen. Andererseits fällt mit dem Beweis eine Vorschrift für ein numerisches Verfahren zur räumlichen Approximation von ebensolchen Evolutionsgleichungen ab.

4.3 Lösbarkeit und Eindeutigkeit

Vorgelegt sei die abstrakte Evolutionsgleichung mit Gedächtnis (4.2) für eine Funktion $u \in \mathcal{W}(0,T)$

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) + \displaystyle\int_0^t \beta(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s = f(t) \text{ in } (0,T) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u(0) = u_0 \in H \end{cases}$$

mit $A, B : V \to V^*$ linear und beschränkt, $\beta : [0,T] \to \mathbb{R}$ und $f \in L^2(0,T;V^*)$, wobei $V \subseteq H \subseteq V^*$ einen Gelfand-Dreier bilden. Zusätzlich seien folgende Eigenschaften angenommen:

Voraussetzung 4.1 *Es existieren Konstanten $\mu, \kappa > 0$ so, dass für alle $v \in V$ gilt*

$$\langle Av, v\rangle \geq \mu\|v\|^2 - \kappa|v|^2 \tag{4.3a}$$

$$\langle Bv, v\rangle \geq 0 \tag{4.3b}$$

Ausserdem gelte für konstante $C > 0$ und $\alpha \in (0,1]$ für alle $z \in (0,T)$

$$\beta(z) \geq Cz^{-1+\alpha} \tag{4.4}$$

Zwei senkrechte Striche $\|\cdot\|$ bezeichnen hierbei die Norm in V, $|\cdot|$ die Norm in H und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ steht für die duale Paarung in $V^* \times V$. Die Räume V und H sind passend gewählte, das heißt die Eigenschaften eines Gelfand-Dreiers und die Randbedingungen erfüllende, Funktionenräume über dem Ortsbereich Ω. Die Ungleichung (4.3a) ist bekannt als die Gårdingsche Ungleichung und (4.3b) steht für die Positivität des Operators B. Die Forderung (4.4) stellt sicher, dass β allenfalls schwach singulär ist. Damit (4.2) wohlformuliert ist, muss ausserdem Produkt von β und B integrierbar sein. Das ist der Fall, wenn β nicht nur nicht singulär ist, sondern in L^∞ liegt oder $B : H \to V^*$ linear und beschränkt ist. Erfüllt ein Operator A unter oben genannten Voraussetzungen die sogenannte Gårdingsche Ungleichung (4.3a), läßt sich (4.2) auf ein äquivalentes Problem transformieren mit einem stark positiven transformierten Operator A. Die Art der Transformation und der Beweis ist in [Emm04, S. 218] nachzulesen. Im Folgenden kann somit von einem stark positiven Operator A ausgegangen werden.

4.3.1 Variationelle Formulierung

Um zur variationellen Formulierung zu gelangen wird Gleichung (4.2) mit einer beliebigen Funktion $v \in V$ im Sinne des dualen Produktes $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*\times V}$ multipliziert. Da die Integrationsreihenfolge vertauscht werden kann und die skalare Kernfunktion $\beta(t-s)$ nicht vom Ort abhängt, gilt

$$\int_\Omega \left[\int_0^t \beta(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s\right] v\mathrm{d}x = \int_0^t \beta(t-s)\int_\Omega Bu(s)\cdot v\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{4.5}$$

und die variationelle Formulierung von (4.2) lautet:

Zu $u_0 \in H$ und $f \in L^2(0,T;V^*)$ finde $u \in \mathcal{W}(0,T)$ so, dass im Sinne der schwachen Ableitung

$$\begin{cases} \langle u', v\rangle + \langle Au, v\rangle + \int_0^t \beta(t-s)\langle Bu(s), v\rangle = \langle f, v\rangle \\ \hfill u(0) = u_0 \in H \end{cases} \tag{4.6}$$

für alle $v \in V$ gilt.

Auf dem Weg zum Beweis der Existenz einer eindeutigen Lösung wird zunächst die eindeutige Lösbarkeit einer Folge semidiskreter Ersatzprobleme sichergestellt, um dann mit Hilfe von Dichtheitsaussagen auf den unendlichdimensionalen Fall zu schließen.

Generell sind zwei Wege denkbar: Diskretisierung in der Zeit eliminiert die Zeitabhängigkeit und bringt Aussagen über stationäre Gleichungen zur Anwendung oder Diskretisierung im Zustandsbereich, also im Ort. Hier wird der Zustandsraum V mit Hilfe einer Galerkinbasis diskretisiert.

4.3.2 Galerkin-Diskretisierung

Wegen der Seperabilität von V existiert eine abzählbare Basis $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$, mit der die Folge der endlichdimensionalen Galerkinräume mit der Eigenschaft der limitierten Vollständigkeit

$$V_m = \mathrm{span}\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m\}$$

konstruiert wird. Für ein Element $u^{(m)}(t) \in V_m$ gilt dann die Darstellung

$$u^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^{m} u_j(t)\phi_j \tag{4.7}$$

und wir setzen

$$\underline{u}^{(m)}(t) = [u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)] \in \mathbb{R}^m \tag{4.8}$$

Das diskrete variationelle Ersatzproblem ergibt sich dann durch die Formulierung der Gleichung (4.6) auf dem endlichdimensionalen Raum V_m. Eine Lösung ist dann ein : $[0,T] \to V^m$, das die variationelle Formulierung für alle Testfunktionen $v^{(m)} \in V^m$ erfüllt.

$$\begin{cases} \langle u'^{(m)}, v^{(m)}\rangle + \langle Au^{(m)}, v^{(m)}\rangle + \int_0^t \beta(t-s)\langle Bu^{(m)}(s), v^{(m)}\rangle = \langle f, v^{(m)}\rangle \\ \hfill u^{(m)}(0) = u_0^{(m)} \in V^{(m)} \end{cases}$$

Da $v^{(m)} \in V_m = \mathrm{span}\{\phi_1, ..., \phi_m\}$ und alle Komponenten in (4.6) linear sind, genügt es mit $v^{(m)} = \phi_i$, $i = 1, ..., m$ zu testen. Unter Verwendung der Vektorrepräsentation (4.8) ist also eine Funktion $\underline{u}^{(m)} : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ gesucht, die

$$\begin{cases} M^{(m)}\underline{u}'^{(m)}(t) + A^{(m)}\underline{u}^{(m)}(t) + \int_0^t \beta(t-s)B^{(m)}\underline{u}^{(m)}(s)\mathrm{d}s = \underline{f}^{(m)}(t) \\ \hfill \underline{u}^{(m)} = \underline{u_0}^{(m)}(0) \end{cases}$$

erfüllt, wobei gilt

$$
\begin{aligned}
M^{(m)} &= [(\phi_i, \phi_j)]_{i,j=1}^m \\
A^{(m)} &= [\langle A\phi_i, \phi_j\rangle]_{i,j=1}^m \\
B^{(m)} &= [\langle B\phi_i, \phi_j\rangle]_{i,j=1}^m \\
\underline{f}^{(m)} &= [\langle f, \phi_i\rangle]_{i=1}^m
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle sei an die Eigenschaften des Gelfand-Dreiers $V \subseteq H \subseteq V^*$ erinnert. Durch die Einbettung $V \hookrightarrow H$ und den Zusammenhang $V_m \subseteq V \subseteq H$ ist die Verwendung des Skalarprodukts (ϕ_i, ϕ_j) aus H in den Komponenten der Massematrix $M^{(m)}$ gerechtfertigt. Zusätzlich kann die Galerkinbasis $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ bezüglich des Skalarproduktes in H orthonormalisiert werden. Somit vereinfacht sich die Massematrix zur Identität, was im Sinne der Übersichtlichkeit im Folgenden angewendet wird.

Zur Vereinfachung wird im weiteren Verlauf auf die Unterstriche der Vektoren und auch auf den Index (m) verzichtet, der zwar variabel, aber in jeder Stufe festgehalten ist.

4.3.3 Lösbarkeit des Ersatzproblems

Der Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit des Ersatzproblems lehnt sich an den Beweis des bekannten Satzes von Picard-Lindelöf an. Dazu wird zunächst die Lösbarkeit in $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^m)$ gezeigt und das dort zum diskreten Fall äquivalente Problem

$$
\begin{cases} u'(t) + Au(t) + \displaystyle\int_0^t \beta(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s = f(t) \text{ in } (0,T) \\ \hfill u(0) = u_0 \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^m) \end{cases} \tag{4.9}
$$

in eine gleichwertige integrale Formulierung gebracht. Nunmehr wird die Abbildung

$$
(Tu)(t) := u_0 + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s - \int_0^t Au(s)\mathrm{d}s - \int_0^t \int_0^s \beta(s-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \tag{4.10}
$$

betrachtet. Gelingt es zu zeigen, dass in (4.10) die Abbildung T den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt, also dass T einen eindeutigen Fixpunkt $Tu = u$ in $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^m)$ besitzt, folgt die eindeutige Lösbarkeit von (4.9). Einerseits erfüllt jede Funktion, welche die Integralgleichung löst, die Fixpunktgleichung, andererseits erhält man für die Lösung der Fixpunktgleichung, dass sie zumindest absolut stetig und somit fast überall differenzierbar ist. Damit ist die Existenz der schwachen Ableitung und damit die Eigenschaft der Lösung von (4.10) gesichert.
Die für die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes nötige Eigenschaft der Selbstabbildung in dem Banachraum $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^m)$ erhält man nach folgenden Überlegungen. Zunächst ist in jeder Komponente $t \mapsto \int_0^t f_i(s)\mathrm{d}s =$

$\int_0^t \langle f(s), \phi_i \rangle \mathrm{d}s$ für $f \in L^2(0,T;V^*)$ stetig. Nach der Diskretisierung liegen A und B nun als Matrizen vor und das Produkt mit einer stetigen vektorwertigen Funktion ist wiederum eine stetige Funktion. Auf dem kompakten Intervall $[0,T]$ ist diese sogar beschränkt und damit liegt auch $\int_0^s \beta(s-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$ in $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^m)$, da β als integrierbar vorausgestzt war.
Dass es sich bei T um eine Kontraktion handelt, zeigen die folgenden Abschätzungen.

Das gewünschte Ergebnis fordert nicht zuletzt eine passend gewählte Norm, die hier über

$$|||u||| := \max_{t\in[0,T]} e^{-Lt}||u(t)||_{\mathbb{R}^m} \tag{4.11}$$

definiert ist. Die Konstante $L > 0$ muss später noch entsprechend spezifiziert werden. So erhält man

$$\begin{aligned}
||(Tu)(t)-(Tv)(t)|| &\leq ||A|| \int_0^t ||u(s)-v(s)||\mathrm{d}s + \\
&\quad + \ ||B|| \int_0^t \int_0^s \beta(s-\tau)||u(\tau)-v(\tau)||\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&\leq \left\{ ||A|| \int_0^t e^{Ls}\mathrm{d}s + ||B|| \int_0^t \int_0^s \beta(s-\tau)e^{L\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \right\} |||u-v|||
\end{aligned}$$

Es sei an dieser Stelle festgehalten, dass die Beschränktheit, sogar unabhängig m, von $||A|| = ||A^{(m)}||_{\mathbb{R}^{m\times m}}$ ebenso wie für $||B||$ aus der Beschränkheit der ursprünglichen Operatoren A und B folgt. Multiplikation der Ungleichung mit e^{-Lt} führt weiter auf die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|||Tu - Tv||| \leq \max_{t\in[0,T]} \Bigg\{ & ||A|| \int_0^t e^{-L(t-s)}\mathrm{d}s + \\
& + \ ||B|| \int_0^t \int_0^s \beta(s-\tau)e^{-L(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \Bigg\} |||u-v|||
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Eine besondere Behandlung erfordert noch der Term, der die Singularität β enthält. Da $s \leq t$, gilt $e^{-L(t-\tau)} \leq e^{-L(s-\tau)}$ und somit

$$\int_0^s \beta(s-\tau)e^{-L(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \leq \int_0^s \beta(s-\tau)e^{-L(s-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

Nach Voraussetzung (4.4) und der Variablentransformation $z = L(s-\tau)$ gilt weiter

$$\int_0^s \beta(s-\tau)e^{-L(s-\tau)}\mathrm{d}\tau \leq \int_0^s C(s-\tau)^{\alpha-1}e^{-L(s-\tau)}\mathrm{d}\tau = CL^{-\alpha} \int_0^{Ls} z^{-1+\alpha}e^{-z}\mathrm{d}z \tag{4.13}$$

Zerschlagen des Intervalls und weiteres Abschätzen liefert

$$\begin{aligned}\int_0^{Ls} z^{-1+\alpha}e^{-z}\mathrm{d}z &\leq \int_0^1 z^{-1+\alpha}e^{-z}\mathrm{d}z + \int_1^{\max(1,Ls)} z^{-1+\alpha}e^{-z}\mathrm{d}z \\ &\leq \int_0^1 z^{-1+\alpha}\mathrm{d}z + \int_1^{\max(1,Ls)} e^{-z}\mathrm{d}z = \frac{1}{\alpha} + [-e^{\max(1,Ls)} + e^{-1}] \\ &\leq \frac{1}{\alpha} + e^{-1}\end{aligned}$$

Das in (4.13) und dann in (4.12) eingesetzt, führt auf

$$\begin{aligned}|||Tu - Tv||| \leq \max_{t\in[0,T]}&\left\{\frac{||A||}{L}(1-e^{-Lt}) + \frac{||B||}{L^\alpha}Ct(\frac{1}{\alpha}+e^{-1})\right\}|||u-v||| \\ &= \left\{\frac{||A||}{L}(1-e^{-LT}) + \frac{||B||}{L^\alpha}CT(\frac{1}{\alpha}+e^{-1})\right\}|||u-v|||\end{aligned}$$

Mit

$$L_* := \max\left\{2||A||, \left(2||B||T(\frac{1}{\alpha}+e^{-1})\right)^{1/\alpha}\right\} \tag{4.14}$$

ist die notwendige Bedingung

$$\{\frac{||A||}{L_*}(1-e^{-LT}) + \frac{||B||}{L_*^\alpha}CT(\frac{1}{\alpha}+e^{-1})\}|||u-v||| < 1 \tag{4.15}$$

gesichert und folglich die Kontraktionseigenschaft von T. Hieraus folgt nach dem Banachschen Fixpunktsatz die Existenz eines einzigen Fixpunktes von T, also die eindeutige Lösbarkeit von (4.9) und somit die eindeutige Existenz einer Lösung $u^{(m)} \in V^m$ der Gleichung (4.3.2) für beliebiges $m \in \mathbb{N}$. Da die Konstante L_* im Beweis in Abhängigkeit von T gewählt wird, jedoch nur auf einem endlichen Zeitintervall $[0, T]$.

4.3.4 A-priori-Abschätzungen und Konvergenz

Mit Hilfe eines Energiearguments erhält man A-priori-Abschätzungen für die Galerkin-Lösungen $u^{(m)}$, mit $m \in \mathbb{N}$, die nicht zuletzt für Aussagen über die Konvergenz der Lösungen $u^{(m)}$ gegen die Lösung u für $m \to \infty$ des eigentlichen Problemes (3.1) wichtig sind.

Testen der Gleichung (4.3.2) mit $u^{(m)}$ führt auf

$$\langle u'^{(m)}, u^{(m)}\rangle + \langle Au^{(m)}, u^{(m)}\rangle + \int_0^t \beta(t-s)\langle Bu^{(m)}(s), u^{(m)}\rangle = \langle f, u^{(m)}\rangle$$

Da $u^{(m)}$ als Lösung von (4.3.2) in $\mathcal{W}(0,T)$ liegt, gilt, wie in [Emm04, S. 211] nachzulesen,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^{(m)}(t)|^2 = \langle u'^{(m)}(t), u^{(m)}(t)\rangle$$

auf $(0,T)$ im verallgemeinerten Sinne. Wegen der starken Positivität von A beziehungsweise der Positivität von B und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt weiter

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^{(m)}(t)|^2 + \mu||u^{(m)}(t)||^2 \leq ||f(t)||_{V^*}||u^{(m)}(t)||$$

und nach Anwendung der Youngschen Ungleichung mit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^{(m)}(t)|^2 + \mu||u^{(m)}(t)||^2 \leq \frac{1}{2\mu}||f(t)||_{V^*} + \frac{\mu}{2}||u^{(m)}(t)||$$

Integration über $[0,t]$ und weiteres Abschätzen liefert dann, dass die Folge der Lösungen $\|u^{(m)}\|$ gemessen in der $L^\infty(0,T;H)$ und $L^2(0,T;V)$ beschränkt ist

$$|u^{(m)}(t)|^2 + \mu\int_0^t \|u^{(m)}(s)\|^2 \leq |u_0^{(m)}|^2 + \frac{1}{2\mu}\|f\|_{L^2(0,T;V^*)} \tag{4.16}$$

Da sinnvollerweise $u_0^{(m)}$ als Projektion von $u_0 \in H$ auf V_m gewählt wird, gilt $|u_0^{(m)}| \leq |u_0|$ und somit (4.16) mit u_0 anstellen von $u_0^{(m)}$, also sogar unabhängig von m.

Es folgt die Beschränktheit der einzelnen Summanden $\mu\int_0^t \|u^{(m)}(s)\|^2$ beziehungsweise $|u^{(m)}(t)|^2$ unabhängig von m, also die gleichmäßige Beschränktheit von $u^{(m)}$ in $L^\infty(0,T;H)$ beziehungsweise $L^2(0,T;V)$. Mit $u^{(m)}$ in $L^2(0,T;V)$ beschränkt und den Voraussetzungen an A und B, ist auch $u'^{(m)}$ in $L^2(0,T;V^*)$.

Anwendung des Satzes von Eberlein-Šmulyan liefert dann entsprechende Teilfolgen, deren Durchschnitt eine gemeinsame Teilfolge $u^{(\tilde{m})}$ ergibt mit

$$u^{(\tilde{m})} \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } L^\infty(0,T;H) \tag{4.17}$$

$$u^{(\tilde{m})} \rightharpoonup u \text{ in } L^2(0,T;V) \tag{4.18}$$

$$u^{(\tilde{m})\prime} \rightharpoonup u' \text{ in } L^2(0,T;V^*) \tag{4.19}$$

Diese Aussagen gelten zwar für eine gemeinsame Teilfolge aber in verschiedenen Räumen. Dass die verschiedenen Limites letztlich gleich sind, lässt sich mit Hilfe von Dichteaussagen beweisen.

Es verbleibt zu zeigen, dass dieses u als Grenzwert der Folge $\{u^{(\tilde{m})}\}$, deren Glieder das semidiskrete Problem lösen, Lösung der ursprünglichen Evolutionsgleichung

$$\begin{cases} \langle u'(t),v\rangle + \langle A(t)u(t),v\rangle + \displaystyle\int_0^t \beta(t-s)\langle Bu(s),v\rangle = \langle f(t),v\rangle, \\ \hfill u(0) = u_0 \in V, \end{cases} \tag{4.20}$$

für beliebiges $v \in V$ ist.

Da die Gleichung in allen Komponenten linear ist, lässt sich per Nullergänzung $u^{(\tilde{m})}$ beziehungsweise $u^{(\tilde{m})\prime}$ einfügen und es genügt die Konvergenz gegen Null in den einzelnen Komponenten

$$\langle u^{(\tilde{m})\prime} - u', v\rangle, \langle Au - Au^{(\tilde{m})}, v\rangle \text{ und } \int_0^t \beta(t-s)\langle Bu(s) - Bu^{(\tilde{m})}, v\rangle \mathrm{d}s \tag{4.21}$$

zu zeigen. Denn nach weiterer Nullergänzung mit $v^{(\tilde{m})} = \mathcal{P}(v, V_{\tilde{m}})$, der Projektion von v auf den Raum $V_{\tilde{m}}$, gilt

$$\langle u^{(\tilde{m})\prime}, v^{(\tilde{m})}\rangle + \langle Au^{(\tilde{m})}, v^{(\tilde{m})}\rangle + \int_0^t \beta(t-s)\langle Bu^{(\tilde{m})}(s), v^{(\tilde{m})}\rangle \mathrm{d}s = \langle f, v^{(\tilde{m})}\rangle$$

und die übrigen Terme der Form $\langle g, v - v_{\tilde{m}}\rangle$, $g \in V^*$ gehen mit $\tilde{m} \to \infty$ gegen Null.

Die Konvergenz in der Anfangsbedingung, also $u_0^{(\tilde{m})} \to u_0$ ist durch die Wahl von $u_0^{(m)} = \mathcal{P}(u_0, V_{\tilde{m}})$ automatisch gesichert.

Aus der Definition der verallgemeinerten Ableitung und ihrer natürlichen Linearität folgt im Speziellen für beliebiges $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,T)$

$$\int_0^T \langle u^{(\tilde{m})\prime}(t) - u'(t), v\rangle\phi(t)\mathrm{d}t = -\int_0^T \langle u^{(\tilde{m})}(t) - u(t), v\rangle\phi'(t)\mathrm{d}t$$

und mit $\langle u^{(\tilde{m})}(t) - u(t), v\phi'(t)\rangle$, aufgefasst als $(\cdot,\cdot)_H$, folgt nach (4.17) die Konvergenz zur Null.

Definiert man für v Testfunktion $v(t) := v\phi(t)$, mit $\phi \in \mathcal{C}[0,T]$ beliebig, ist $v\phi \in L^2(0,T;V)$ und $t \mapsto \langle g(t), v\rangle$ auf $V^* \times V$ mit der dualen Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(V^*)\times L^2(V)}$ zu identifizieren. Für $\langle Au(t), v\rangle$ wird $v(t)$ verwendet und dann die adjungierte Paarung betrachtet. Dann gilt mit dem adjungierten Operator

$$\int_0^T \langle A(u^{(\tilde{m})}(t) - u(t)), v\phi(t)\rangle\mathrm{d}t = \int_0^T \langle u^{(\tilde{m})}(t) - u(t), A^*v\phi(t)\rangle\mathrm{d}t \tag{4.22}$$

und unter Ausnutzung der Symmetrie der dualen Paarung über reflexiven Räumen folgt mit (4.18) die gewünschte Konvergenz. Analog geht man zunächst auch für den Term

$$\int_0^t \beta(t-s)\langle Bu(s) - Bu^{(\tilde{m})}(s), v\rangle\mathrm{d}s = \int_0^t \beta(t-s)\langle u(s) - u^{(\tilde{m})}(s), B^*v\rangle\mathrm{d}s \tag{4.23}$$

vor. Wieder wird mit $\phi \in \mathcal{C}[0,T]$ multipliziert und integriert. Formal ergibt das

$$\int_0^T \left[\int_0^t \beta(t-s)\langle u(s) - u^{(\tilde{m})}(s), B^*v\rangle\mathrm{d}s\right]\phi(t)\mathrm{d}t$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge führt auf

$$\int_{s=0}^T \int_{t=s}^T \beta(t-s)\langle u(s) - u^{(\tilde{m})}(s), B^*v\rangle\phi(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

und es gilt wegen der Integrierbarkeit von β und der Stetigkeit von ϕ

$$\gamma(s) := \int_s^T \beta(t-s)\phi(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T-s} \beta(z)\phi(t+z)\mathrm{d}z < \infty$$

Damit kann wieder $v(t) := v\gamma(t)$ als Funktion in $L^2(0,T;V)$ aufgefasst werden und nach (4.18) folgt die Konvergenz zur Null von

$$\int_0^T \langle u(s) - u^{(\tilde{m})}(s), B^* v\gamma(s)\rangle \mathrm{d}s$$

und somit die des anfänglich betrachteten Terms.

Diese Abschätzungen zeigen, dass der Grenzwert der betrachteten Teilfolgen das Ausgangsproblem löst. Dass es bei gleicher rechter Seite f und gleicher Anfangsbedingung u_0 keine zweite Lösung geben kann, folgt unmittelbar aus der Linearität der Gleichung und der A-priori-Abschätzung (4.16).

5 Ausblick

Wie mehrfach erwähnt, beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit einem ganz bestimmten Typ von Evolutionsgleichungen mit Gedächtnis. Diese Einschränkung ist notwendig, um den Rahmen nicht zu sprengen und lässt viele Möglichkeiten offen, die Thematik in dieser Richtung weiter zu verfolgen. Weitere Verallgemeinerungen zum Beispiel sind mit jeder Abschwächung der Voraussetzungen erreicht. Besonders die Forderungen an B und β bedürfen einer weiteren Präzisierung. Durchaus denkbar ist, dass bezüglich B anstelle der Positivität bereits die Gültigkeit einer Ungleichung $\langle Bv, v\rangle \geq -\kappa|v|^2$ ausreichend ist. Auch die für die Wohldefiniertheit der Ausgangsgleichung getroffenen Voraussetzungen an das Produkt von B und β können gegebenenfalls abgschwächt werden. Eine andere Möglichkeit ist, das Vorgehen auf einen neuen ähnlichen Gleichungstyp zu übertragen und dort ähnliche Resultate zu erzielen. Interessant ist dabei insbesondere der Fall, in dem A selbst im Gedächtnisterm auftaucht

$$u_t(t) + \int_0^t \beta(t-s)Au(s)\mathrm{d}s = f(t)$$

und die hyperbolische Gleichung

$$u_{tt}(t) + Au(t) + \int_0^t \beta(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s = f(t) \ .$$

Literatur

[Emm04] E. Emmrich. *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen.* Vieweg, Wiesbaden, 2004.

[FCGO02] E. Fernández-Cara, F. Guillén, and R.R. Ortega. Mathematical modeling and analysis of viscoelastic fluids of the oldroyd kind. *Handbook of Numerical Analysis*, 8:543– 559, 2002.

[GGZ74] H. Gajewski, K. Gröger, and K. Zacharias. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[GLS90] G. Gripenberg, S-O. Londen, and O. Staffans. *Volterra Integral and Functional Equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[GP68] M.E. Gurtin and A.G. Pipkin. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 31:113– 126, 1968.

[Loj78] L. G. Lojzjanskij. *Mehanika zhidkosti i gaza.* Izdatelstvo Nauka, Moskau, 1978.

[Nun71] J.W. Nunziato. On heat conduction in materials with memory. *Quarterly of Applied Mathematics*, 29:187– 204, 1971.

[Pru93] J. Pruess. *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Birkhäuser, Basel, 1993.

[Tho] V. Thomée. Some partial differential equations with memory. *unpublished.*