Bachelorarbeit

Fixpunktsatz von Banach und Anwendungen

Im Rahmen des Seminars:
‚Angewandte Analysis'

Andrea Nickel

Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Betreut durch: Prof. Dr. Etienne Emmrich

Bielefeld, den 14. September 2010

Universität Bielefeld

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Beim Untersuchen verschiedener Gleichungstypen auf die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung ist es sinnvoll, die Suche als Fixpunktproblem zu interpretieren. Hierbei kann anhand der zu betrachtenden Gleichung ein Operator A definiert werden, der dann auf die Existenz eines Fixpunktes ($Ax = x$) überprüft wird.
Besonders hilfreich und aussagekräftig bei derartigen Untersuchungen ist der *Fixpunktsatz von Banach*, da dieser unter gewissen Voraussetzungen einen eindeutigen Fixpunkt und damit einhergehend eine eindeutige Lösung garantiert.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einige derartige Anwendungen aufzuzeigen. Zu Beginn soll einleitend der *Fixpunktsatz von Banach* mit seinen Bedingungen an die zu untersuchende Abbildung vorgestellt und bewiesen werden. Eine entscheidende Rolle spielt dabei die *Kontraktionseigenschaft* der Abbildung, deren Bedeutung deswegen anhand einiger Gegenbeispiele besonders hervorgehoben werden soll.
Des Weiteren wird eine Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes gezeigt, die auch weiterhin die Kontraktionseigenschaft fordert, jedoch in Bezug auf eine gewisse Potenz der Abbildung und nicht auf die Abbildung selbst.
Im Anschluss, dem Hauptteil der Arbeit, folgen verschiedene Anwendungen des Fixpunktsatzes, bei denen, wie oben beschrieben, Gleichungen in ein Fixpunktproblem überführt werden, um so eine Aussage über ihre Lösbarkeit treffen zu können.
Die Schwierigkeit und Hauptaufgabe hierbei ist es, die entsprechenden Voraussetzungen des Satzes zu überprüfen oder gegebenenfalls zu konstruieren. Die Anwendungen, die im Verlauf dieser Arbeit vorgestellt werden sollen, beschränken sich auf Gleichungstypen aus den Bereichen der Differentiation und Integration.
Der Schwerpunkt des ersten Teils, in welchem Differentialgleichungen thematisiert werden, liegt auf *semilinearen Randwertproblemen zweiten Grades*, die anhand des *Banachschen Fixpunktsatzes* auf ihre Lösbarkeit untersucht werden sollen. Zu Beginn soll hierzu eine kurze Einführung in die Thematik *semilinearer Randwertprobleme* gegeben werden. Außerdem wird die *Greensche Funktion* als benötigtes Hilfsmittel konstruiert und mit einigen Eigenschaften vorgestellt, bevor zwei konkrete Typen von Randwertproblemen behandelt werden.
Der zweite Teil der Anwendung bezieht sich auf Integralgleichungen, in dem ein besonderes Augenmerk auf Gleichungen des *Fredholmschen* und *Volterraschen* Typs gelegt wird. Im Fall der *Volterraschen Integralgleichung* wird auch eine Anwendung des erweiterten *Banachschen Fixpunktsatzes* demonstriert.

2 Fixpunktsatz von Banach

Stefan Banach formulierte seinen Fixpunktsatz im Jahre 1920 im Rahmen der Dissertation *'Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales'*[1]. Unter der Geltung gewisser Voraussetzungen liefert der besagte Satz neben der eindeutigen Existenzaussage eines Fixpunktes zusätzlich auch ein numerisches Verfahren, um diesen näherungsweise zu berechnen.

Im Folgenden soll dieser mit Beweis und einer Erweiterung in Bezug auf kontrahierende Potenzen vorgestellt werden. Des Weiteren werden Gegenbeispiele betrachtet, die die unabdingbare Geltung der Voraussetzungen verdeutlichen.
Das Kapitel orientiert sich hierbei an [KF75], [GRT09] und [AV05].

2.1 Prinzip der kontrahierenden Abbildung

Die Basis des *Banachschen Fixpunktsatzes* bildet die Kontraktionseigenschaft der zu betrachtenden Abbildung. Diese ist zwingende Voraussetzung der Anwendung, weshalb der *Banachsche Fixpunktsatz* in vielen Büchern auch unter dem Namen *Prinzip der kontrahierenden Abbildung* vorgestellt wird.

Eine solche Abbildung muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

Definition 1 (Kontraktion)**.** *Seien (X, d) ein metrischer Raum, A eine nichtleere Teilmenge von X und $T\colon A \to A$ eine Abbildung von A in sich.*
Dann heißt T kontrahierend oder Kontraktion, falls ein $0 \leq \lambda < 1$ existiert, sodass $\forall\, x, y \in A$

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y). \tag{1}$$

Bemerkung. Die Kontraktionsbedingung, die durch (1) definiert ist, impliziert Lipschitz-Stetigkeit mit einer Lipschitzkonstanten $\lambda < 1$. Damit ist jede Kontraktion insbesondere stetig.

[1]Nachzulesen in [Heu06](S. 646-663). Dort gibt es einen Überblick über die Anfänge der Funktionalanalysis, zu deren Begründern auch Stefan Banach zählt.

Der Fixpunktsatz von Banach lässt sich wie folgt definieren:

Satz 1 (Fixpunktsatz von Banach)**.** *Seien (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum, A eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge von X und $T\colon A \to A$ eine kontrahierende Abbildung von A in sich. Dann gibt es genau einen Fixpunkt $\tilde{x} \in A$ mit $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Dieser ist Grenzwert der sukzessiven Approximation*

$$x_{n+1} = T(x_n) \text{ für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

bei beliebigem Startwert $x_0 \in A$.

Auf die Realität übertragen, kann die Aussage des Satzes zum Beispiel anhand einer Landkarte verdeutlicht werden. Legt man etwa eine Karte auf eine beliebige Stelle des Bodens, so gibt es genau einen Punkt auf der Karte, der deckungsgleich mit dem ‚wirklichen Punkt‘ in der realen Welt ist.

2.2 Beweis

Der Beweis dieses Fixpunktsatzes lässt sich in drei Schritte unterteilen. Zu Beginn wird gezeigt, dass die durch (2) definierte Folge einen Grenzwert besitzt, anschließend, dass dieser ein Fixpunkt der Kontraktion T ist und letztlich, dass T keinen weiteren Fixpunkt aufweist.

Sei nun $x_0 \in A$. Die durch die sukzessive Approximation (2) mit $x_{n+1} = T(x_n)$ definierte Folge $\{x_n\}$ liegt somit aufgrund der Selbstabbildungseigenschaft von T in A. Die Abbildung T ist kontrahierend, demnach existiert ein $\lambda \in [0, 1)$, sodass

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y) \;\forall\; x, y \in A.$$

Die Kombination dieser beiden Eigenschaften führt uns zu folgender Abschätzung:

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \\
&\leq \lambda \cdot d(x_n, x_{n-1}) \\
&= \lambda \cdot d(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \\
&\leq \lambda^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&\vdots \\
&\leq \lambda^n \cdot d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung und des oben gezeigten Resultats gilt für $0 \leq n < m$, dass

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq \lambda^{m-1} \cdot d(x_1, x_0) + \cdots + \lambda^n \cdot d(x_1, x_0) \\
&= [\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \cdots + \lambda^n] \cdot d(x_1, x_0) \\
&= \lambda^n \cdot [\lambda^{m-1-n} + \lambda^{m-2-n} + \cdots + 1] \cdot d(x_1, x_0) \\
&= \lambda^n \cdot \sum_{k=0}^{m-1-n} \lambda^k \cdot d(x_1, x_0) \\
&= \lambda^n \cdot \frac{1 - \lambda^{m-n}}{1 - \lambda} \cdot d(x_1, x_0) \quad \text{, da } 0 \leq \lambda < 1 \\
&= \frac{\lambda^n - \lambda^m}{1 - \lambda} \cdot d(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \cdot d(x_1, x_0) \ .
\end{aligned}$$

Vorausgesetzt man wählt $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ nun derart, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\frac{\lambda^{n_0(\varepsilon)}}{1 - \lambda} \cdot d(x_1, x_0) < \varepsilon$$

gilt, so ist $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge. Da A eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen, metrischen Raumes X ist, besitzt $\{x_n\}$ genau einen Grenzwert $\tilde{x} \in A$.

Um den Beweis abzuschließen, bleibt noch zu zeigen, dass $\tilde{x}$ ein eindeutiger Fixpunkt der Kontraktion $T : A \to A$ ist.
Hierfür verwenden wir, dass T aufgrund der Kontraktionseigenschaft stetig ist. Demnach gilt:

$$\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = T(\tilde{x}).$$

Somit ist $\tilde{x}$ ein Fixpunkt von T. Dieser ist eindeutig, denn angenommen es gäbe ein $\hat{x} \in A$ mit $\hat{x} \neq \tilde{x}$ aber $T(\hat{x}) = \hat{x}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
d(\hat{x}, \tilde{x}) &= d(T(\hat{x}), T(\tilde{x})) \\
&\leq \lambda \cdot d(\hat{x}, \tilde{x}) \\
&< d(\hat{x}, \tilde{x}) \quad \text{, da } \lambda < 1.
\end{aligned}$$

Aus diesem Widerspruch folgt aber, dass es keinen weiteren Fixpunkt geben kann und $\tilde{x}$ damit eindeutiger Fixpunkt der Kontraktion T ist.

$\square$

2.3 Nichtkontrahierende Abbildungen

Zwingende Voraussetzung bei der Anwendung des *Banachschen Fixpunktsatzes* ist, wie bereits erläutert, die Kontraktionseigenschaft der Abbildung.
Die Frage ist nun, inwieweit eine Existenz- oder speziell eine Eindeutigkeitsausssage bezüglich eines Fixpunktes getroffen werden kann, sobald diese Eigenschaft verletzt ist.

Zunächst sollen dafür die Begriffe *schwach kontrahierend* und *nichtexpansiv*, die jeweils Abschwächungen der eigentlichen Kontraktionsbedingung beschreiben, eingeführt werden.

Definition 2. *Seien (X, d) ein metrischer Raum, A eine nichtleere Teilmenge von X und $T\colon A \to A$ eine Abbildung von A in sich. Dann heißt T*

- *schwach kontrahierend, falls* $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$,
- *nichtexpansiv, falls* $d(T(x), T(y)) \leq d(x, y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

Im Folgenden sollen mit besonderem Augenmerk auf die Verletzung bzw. Abschwächung der Kontraktionsbedingung konkrete Beispiele untersucht werden.

Beispiel 1. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \ln(1 + e^x).$$

Nach dem Mittelwertsatz[2] existiert ein $\xi \in (x, y)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$, sodass $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y|$. Da $|f'(x)| = e^x/(1 + e^x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \;\forall\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Damit ist f zwar schwach kontrahierend, dennoch existiert offenbar kein Fixpunkt, da kein $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $x = \ln(1 + e^x)$ erfüllt.
Abbildung 1 zeigt, wie sich $f(x)$ und x für große x einander annähern, aber kein Schnittpunkt zustande kommt und somit kein Fixpunkt existiert.

[2]Mittelwertsatz: *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.*

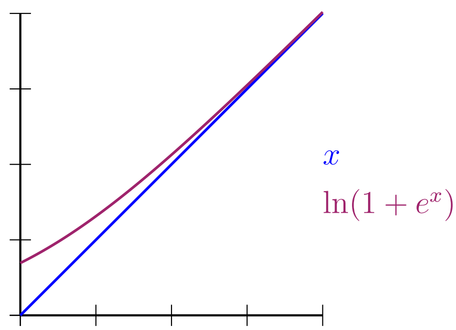

Abbildung 1: Grafische Darstellung der Lösungssuche für $f(x) = x$

Beispiel 2. Betrachte weiter die Funktionen $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = x + 1 \text{ und}$$

$$f_2(x) = x.$$

Beide sind nichtexpansiv, da

$$|f_i(x) - f_i(y)| = |x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $i = 1, 2$. Im ersten Fall ($f_1(x) = x + 1$) existiert offensichtlich kein Fixpunkt, im zweiten Fall ($f_2(x) = x$) hingegen gibt es unendlich viele.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass bei schwachen Kontraktionen in jedem Fall die Existenz eines Fixpunktes verloren geht, und über nichtexpansive Abbildungen weder eine Existenz- noch eine Eindeutigkeitsaussage getroffen werden kann.

Dennoch ist es möglich eine solche Aussage für nichtkontrahierende Abbildungen zu treffen, was der folgende Abschnitt zeigen soll.

2.4 Banachscher Fixpunktsatz mit kontrahierender Potenz

Eine ähnliche Eindeutigkeitsaussage über die Existenz eines Fixpunktes einer Abbildung T kann auch getroffen werden, wenn nicht T die Kontraktionsbedingung erfüllt, sondern eine gewisse Potenz T^n der Abbildung.

Das *Prinzip der kontrahierenden Abbildung* lässt sich wie folgt für Potenzen, die die Kontraktionseigenschaft aufweisen, erweitern:

Satz 2. *Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T\colon X \to X$ eine Abbildung, für die ein $\lambda \in (0, 1)$ und eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ existieren, sodass $\forall\, x, y \in X$*

$$d(T^{n_0}(x), T^{n_0}(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y).$$

Dann hat die Abbildung T genau einen Fixpunkt $\tilde{x} \in X$ und die Folge $\{T^n(z)\}$ konvergiert gegen $\tilde{x}$ für alle $z \in X$.

Beweis. T^{n_0} ist nach Voraussetzung eine kontrahierende Selbstabbildung des vollständigen metrischen Raumes X. Aus dem *Banachschen Fixpunktsatz* folgt damit, dass genau ein $\tilde{x} \in X$ mit $T^{n_0}(\tilde{x}) = \tilde{x}$ existiert.
Mit der Kontraktionseigenschaft von T folgt weiter, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(T(\tilde{x}), \tilde{x}) \\ &= d(T(T^{n_0}(\tilde{x})), T^{n_0}(\tilde{x})) \\ &= d(T^{n_0}(T(\tilde{x})), T^{n_0}(\tilde{x})) \\ &\leq \lambda \cdot d(T(\tilde{x}), \tilde{x}). \end{aligned}$$

Da aber $0 < \lambda < 1$, muss $d(T(\tilde{x}), \tilde{x}) = 0$ sein. Dies ist äquivalent zu $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$ und damit ist $\tilde{x}$ ein Fixpunkt von T.
Dieser ist auch eindeutig, denn angenommen es existiert ein $\hat{x} \in X$ mit $\hat{x} \neq \tilde{x}$, aber $T(\hat{x}) = \hat{x}$, dann folgt mit vollständiger Induktion, dass

$$T^n(\hat{x}) = \hat{x} \;\forall\, n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist mit $T^1(\hat{x}) = T(\hat{x}) = \hat{x}$ erfüllt, da $\hat{x}$ nach Voraussetzung ein Fixpunkt von T ist. Angenommen (3) gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, dann folgt für $n + 1$, dass

$$T^{n+1}(\hat{x}) = T(T^n(\hat{x})) = T(\hat{x}) = \hat{x}.$$

Damit gilt $T^n(\hat{x}) = \hat{x}$ für alle $n = 1, 2, \ldots$, also auch für n_0 und $\hat{x}$ wäre Fixpunkt der kontahierenden Abbildung T^{n_0}. Dies steht aber im Widerspruch zum eindeutigen

Fixpunkt $\tilde{x}$ von T^{n_0}, der damit auch eindeutiger Fixpunkt der Abbildung T sein muss.

Um den Beweis zu beenden, bleibt noch die Konvergenz der Folgen $\{T^n(z)\}$ für $z \in X$ zu zeigen.

Seien dafür $r := \left[\frac{n}{n_0}\right]$ und $n := rn_0 + l$ für $0 \leq l < n_0$. Dann folgt erneut aus der Kontraktionseigenschaft von T^{n_0}, dass für alle $z \in X$

$$\begin{aligned}
0 &\leq d(T^n(z), \tilde{x}) \\
&= d(T^{rn_0+l}(z), T^{n_0}(\tilde{x})) \\
&= d(T^{n_0}(T^{rn_0+l-n_0}(z)), T^{n_0}(\tilde{x})) \\
&\leq \lambda \cdot d(T^{(r-1)n_0+l}(z), \tilde{x}) \\
&\vdots \\
&\leq \lambda^r \cdot d(T^l(z), \tilde{x}) \\
&\leq \lambda^r \max\{d(T^m(z), \tilde{x}) |\, m = 0, 1, 2, \ldots, n_0 - 1\}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt für $n \longrightarrow \infty$, dass auch $r \longrightarrow \infty$. Da nun $0 < \lambda < 1$, folgt weiter, dass $\lim_{n\to\infty} \lambda^r = 0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n(z), \tilde{x}) = 0,$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$\lim_{n\to\infty} T^n(z) = \tilde{x}.$$

$\square$

Ein Beispiel für eine kontrahierende Potenz wird später anhand der *Volterraschen Integralgleichung* gegeben.

3 Anwendung I: Differentialgleichungen

Man betrachtet Differentialgleichungen mit dem Ziel eine Funktion zu finden, die diese erfüllt. Die Suche wird meist mittels Bedingungen an die Funktion durch die Erfüllung bestimmter Anfangs- oder Randdaten präzisiert. Die eindeutige Lösbarkeit der dadurch entstehenden Anfangs- und Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen ist jedoch nicht immer gegeben.

Im Folgenden sollen kurz der Begriff *semilinearer Randwertprobleme* und die *Greensche Funktion* eingeführt und am Beispiel zweier spezieller Typen untersucht werden, unter welchen Bedingungen eine Aussage über die eindeutige Existenz einer Lösung getroffen werden kann.
Das Kapitel ist angelehnt an [Emm04] und [Wal76].

3.1 Semilineare Randwertprobleme

Im Rahmen semilinearer Randwertprobleme betrachten wir gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung der allgemeinen Form

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0,$$

wobei $x \in (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.
Diese sollen insbesondere semilinear sein.

Definition 3 (semilinear)**.** *Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in allgemeiner Form heißt semilinear, wenn sie nach $u''(x)$ auflösbar ist:*

$$-u''(x) = f(x, u(x), u'(x)).$$

Ziel ist es nun, eine Lösung $u = u(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ einer solchen Differentialgleichung zu finden, die bestimmte Bedingungen an die Randpunkte $x = a$ und $x = b$ erfüllt. Hierbei beschränken wir uns auf Randbedingungen erster Art, die auch *Dirichletsche Randbedingungen* genannt werden und wie folgt definiert sind:

Definition 4 (Dirichletsche Randbedingungen)**.** *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Randdaten der speziellen Form*

$$u(a) = \alpha \quad \textit{und} \quad u(b) = \beta$$

heißen Dirichletsche Randbedingungen oder Randdaten.

Bemerkung. Man unterscheidet weitere Arten von Randbedingungen, die an dieser Stelle aber außer Acht gelassen werden sollen. Hierzu zählen zum Beispiel die *Neumannschen Randbedingungen* mit $u'(a) = \alpha$ und $u'(b) = \beta$, die *Robinschen Randbedingungen* mit $c_a \cdot u'(a) + u(a) = \alpha$ und $c_b \cdot u'(b) + u(b) = \beta$, wobei wieder $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $c_a, c_b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, oder auch Kombinationen dieser drei Arten.

Um nun zu überprüfen, ob ein semilineares Randwertproblem mit *Dirichletschen Randbedingungen* eine eindeutige Lösung besitzt, reicht es aus, den Fall homogener Randbedingungen

$$u(a) = u(b) = 0$$

zu betrachten. Dies ist möglich, da jedes inhomogene Randwertproblem mittels einer linear Interpolierenden r in ein Problem mit homogenen Randdaten überführbar ist. Hierfür wählt man eine glatte Funktion r zum Beispiel durch

$$r(x) = \frac{(b-x)\alpha + (x-a)\beta}{b-a} \,,$$

sodass $r(a) = \alpha$ und $r(b) = \beta$. Anschließend definiert man mit Hilfe der Ausgangsfunktion u und r eine neue Funktion $\tilde{u}$ durch

$$\tilde{u}(x) := u(x) - r(x).$$

Diese erfüllt nun die homogenen Randbedingungen $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$.
Eine eindeutige Lösung $\tilde{u}$ für das homogene Problem impliziert somit aufgrund ihrer Definition auch eine eindeutige Lösung u für das inhomogene Problem.

Welche Eigenschaften muss nun eine Funktion u als Lösung eines semilinearen Problems, die wir als *klassische Lösung* bezeichnen werden, mit sich bringen?

Definition 5 (Klassische Lösung)**.** *Unter einer klassischen Lösung eines Randwertproblems mit Dirichletschen Randdaten für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung im Intervall* (a, b) *versteht man eine Funktion*

$$u \in C^2(a, b) \cap C[a, b],$$

die sowohl der Differentialgleichung als auch den Randbedingungen genügt.

Im Folgenden bleibt noch zu klären, welche Bedingungen an das Randwertproblem gestellt werden müssen, damit dieses eine derartige klassische Lösung besitzt.
Um die Existenz letztendlich auch beweisen zu können, müssen wir Gebrauch eines speziellen Hilfsmittels machen, das im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt werden soll.

3.2 Greensche Funktion

Um später die eindeutige Lösbarkeit semilinearer Randwertprobleme zu beweisen, benötigen wir neben dem *Fixpunktsatz von Banach* auch die sogenannte *Greensche Funktion* als Hilfsmittel. Unser Ziel ist es, die klassische Lösung eines semilinearen Randwertproblems durch die *Greensche Funktion* darzustellen.

Um diese zu konstruieren, betrachten wir folgendes Randwertproblem mit homogenen Dirichletschen Randdaten $u(a) = u(b) = 0$ der allgemeinen Form

$$-u''(x) + c(x) \cdot u'(x) + d(x) \cdot u(x) = f(x), \;\; x \in (a, b). \tag{4}$$

Seien nun u_1 und u_2 zwei linear unabhängige klassische Lösungen der homogenen Differentialgleichung $-u''(x)+c(x)\cdot u'(x)+d(x)\cdot u(x) = 0$. Dann gilt für die Wronski-Determinante W, dass

$$\begin{aligned} W(x) :=& \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{vmatrix} \\ &= u_1(x) \cdot u_2'(x) - u_1'(x) \cdot u_2(x) \\ &\neq 0, \forall\, x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Des Weiteren definieren wir zwei Funktionen A und B und eine Konstante R in Abhängigkeit der beiden Lösungen u_1 und u_2 durch

$$A(x) := \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{vmatrix}, \; B(x) := \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix}, \; R := \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix}.$$

Angenommen, für die homogene Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen existiert nur die triviale Lösung, so können wir sagen, dass $R \neq 0$.
Hierzu betrachtet man die Lösung der homogenen Differentialgleichung, die sich aus der Linearkombinationen der beiden linear unabhängigen Lösungen u_1 und u_2 durch

$$u(x) = c_1 \cdot u_1(x) + c_2 \cdot u_2(x), \text{ wobei } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ konstant,}$$

ergibt. Die Konstanten c_1 und c_2 sind nun mittels der Randbedingungen zu bestimmen, was zu dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt. Eine eindeutige Lösung dieses Gleichungssystem ist aber nur für den Fall $R \neq 0$ gewährleistet. Hieraus folgt, dass $c_1 = c_2 = 0$ und damit nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ existieren kann.

Demnach lässt sich die *Greensche Funktion* für das semilineare Randwertproblem (4) wie folgt definieren:

Definition 6 (Greensche Funktion)**.** *Für* $(x, \xi) \in [a, b] \times [a, b]$ *sei*

$$G(x, \xi) = \frac{1}{R \cdot W(\xi)} \begin{cases} A(\xi) \cdot B(x) & , \textit{für } a \leq \xi \leq x \leq b \\ A(x) \cdot B(\xi) & , \textit{für } a \leq x \leq \xi \leq b \end{cases} \tag{5}$$

die Greensche Funktion. Diese ist wohldefiniert, vorausgesetzt dass $R \neq 0$*.*
Darüber hinaus ist G *stetig und partiell differenzierbar auf* $[a, b] \times [a, b]$*, sowie symmetrisch, das heißt, es gilt* $G(x, \xi) = G(\xi, x)$*.*

Die Definition beschreibt die *Greensche Funktion* in allgemeiner Form. Im Weiteren wird vor allem mit einem Spezialfall der *Greenschen Funktion* gearbeitet, da die zu betrachtenden Differentialgleichungen die Besonderheit $c(x) \equiv 0$ und $d(x) \equiv 0$ aufweisen.

3.3 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

In diesem Abschnitt wollen wir am Beispiel semilinearer Randwertprobleme der speziellen Form

$$\begin{gathered} -u''(x) = f(x, u(x)), \text{ wobei } x \in (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

untersuchen, unter welchen Voraussetzungen eine eindeutige Lösung existiert.
Betrachte dazu folgendes Theorem:

Satz 3. *Sei* $f\colon [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, die im zweiten Argument Lipschitz-stetig ist, das heißt* $\exists\, L \geq 0$*, sodass* $\forall\, x \in [a, b]\ \forall\, s, t \in \mathbb{R}$

$$|f(x, s) - f(x, t)| \leq L \cdot |s - t|$$

und gelte außerdem, dass

$$L < \frac{8}{(b-a)^2}.$$

Dann existiert genau eine Lösung für das durch (6) *definierte semilineare Randwertproblem.*

Beweis. Zunächst soll das Randwertproblem in eine Integralgleichung überführt werden, indem wir die gesuchte Lösung u durch die zugehörige *Greensche Funktion* darstellen.

Hierfür benötigen wir zunächst ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $-u''(x) = 0$, um die Funktionen W, A und B und die Konstante R zu bestimmen.
Dieses erhält man durch das Aufstellen des charakteristischen Polynoms mit den zwei linear unabhängigen Lösungen $u_1(x) = 1$ und $u_2(x) = x$. Man gelangt zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned}&W(x) = 1,\\&R = b - a,\\&A(x) = x - a \text{ und}\\&B(x) = b - x.\end{aligned}$$

Die *Greensche Funktion* ist somit für das Randwertproblem (6) nach Definition 6 durch

$$G(x,\xi) = \frac{1}{b-a}\begin{cases}(b-x)\cdot(\xi-a) & \text{, für } a \le \xi \le x \le b\\ (x-a)\cdot(b-\xi) & \text{, für } a \le x \le \xi \le b\end{cases}$$

gegeben.
Damit können wir nun eine Funktion u der Gestalt

$$u(x) := \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi,\ x \in [a,b] \tag{7}$$

definieren, wobei G die *Greensche Funktion* bezeichnet und die Funktion f den Bedingungen des Satzes 3 genügt.

Eine solche Funktion u ist klassische Lösung des semilinearen Randwertproblems (6), da

1. aufgrund von $G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0$ die Randbedingungen $u(a) = u(b) = 0$ erfüllt sind und
2. u der entsprechenden Differentialgleichung $-u''(x) = f(x, u(x))$ genügt.

Die Erfüllung der Differentialgleichung ist leicht durch Umschreiben der Funktion u in

$$\begin{aligned}u(x) &= \int_a^b G(x,\xi) f(\xi,u(\xi))\, d\xi\\ &= \int_a^x G(x,\xi) f(\xi,u(\xi))\, d\xi + \int_x^b G(x,\xi) f(\xi,u(\xi))\, d\xi\\ &= \frac{b-x}{b-a}\cdot \int_a^x (\xi-a) f(\xi,u(\xi))\, d\xi + \frac{x-a}{b-a}\cdot\int_x^b (b-\xi) f(\xi,u(\xi))\, d\xi\end{aligned}$$

und zweimaligem Differenzieren mit den Ergebnissen

$$u'(x) = -\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^x (\xi - a) f(\xi, u(\xi))\, d\xi + \frac{1}{b-a} \cdot \int_x^b (b-\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi$$

und

$$\begin{aligned} u''(x) &= -\frac{1}{b-a}(x-a) f(x, u(x)) - \frac{1}{b-a}(b-x) f(x, u(x)) \\ &= -\frac{1}{b-a}(x-a+b-x) f(x, u(x)) \\ &= -f(x, u(x)) \end{aligned}$$

zu überprüfen.

Gleichzeitig erfüllt umgekehrt auch jede klassische Lösung u des Randwertproblems die Integralgleichung (7). Dies folgt mittels partieller Integration und den durch die Randdaten und die Differentialgleichung gestellten Bedingungen an die Funktion u, denn

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi &= -\int_a^b G(x,\xi) u''(\xi)\, d\xi \\ &= -\int_a^x G(x,\xi) u''(\xi)\, d\xi - \int_x^b G(x,\xi) u''(\xi)\, d\xi \\ &= -\frac{b-x}{b-a} \int_a^x (\xi - a) u''(\xi)\, d\xi - \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-\xi) u''(\xi)\, d\xi \\ &= -\frac{b-x}{b-a} \left(u'(x)(x-a) - \int_a^x u'(\xi)\, d\xi \right) - \\ &\quad \frac{x-a}{b-a} \left(-(b-x) u'(x) + \int_x^b u'(\xi)\, d\xi \right) \\ &= \frac{1}{b-a} [(b-x) u(x) + (x-a) u(x)] \\ &= u(x). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass das Randwertproblem und die durch (7) definierte Integralgleichung äquivalent sind. Bleibt noch zu zeigen, dass solch ein u existiert.

Definiere dazu einen Operator T durch

$$(Tu)(x) := \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi \text{ für } x \in [a,b].$$

Zu zeigen ist nun, dass T

1. einen vollständigen und normierten Raum in sich abbildet und
2. eine Kontraktion ist,

um im Anschluss den *Banachschen Fixpunktsatz* anwenden und eine eindeutige Existenzaussage treffen zu können.

Betrachte hierfür $C[a,b]$, den vollständigen und normierten Raum aller auf dem Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen.
Sei $v \in C[a,b]$ beliebig. Da nach Voraussetzung G und f auf $[a,b]$ stetig sind und das Integral stetiger Funktionen wiederum stetig ist, ist auch Tv stetig auf $[a,b]$. Folglich bildet T den vollständigen und normierten Raum $C[a,b]$ in sich ab.

Betrachte nun zwei beliebige Funktionen $v, w \in C[a,b]$ mit der Supremumsnorm

$$\|\cdot\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |\cdot|.$$

Dann folgt aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von f und der Nichtnegativität der *Greenschen Funktion* G, dass

$$\begin{aligned}
\|Tv - Tw\|_{C[a,b]} &= \max_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi - \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, w(\xi))\, d\xi \right| \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^b G(x,\xi) |f(\xi, u(\xi)) - f(\xi, w(\xi))|\, d\xi \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^b G(x,\xi) L |v(\xi) - w(\xi)|\, d\xi \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^b G(x,\xi)\, d\xi L \|v - w\|_{C[a,b]} \\
&= \max_{x\in[a,b]} \frac{1}{2}(b-x)(x-a) L \|v - w\|_{C[a,b]} \\
&= L \frac{(b-a)^2}{8} \|v - w\|_{C[a,b]},
\end{aligned}$$

denn für die *Greensche Funktion* gilt

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[a,b]} \int_a^b G(x,\xi)\, d\xi &= \max_{x\in[a,b]} \left(\int_a^x G(x,\xi)\, d\xi + \int_x^b G(x,\xi)\, d\xi \right) \\
&= \max_{x\in[a,b]} \left(\frac{b-x}{b-a} \int_a^x (\xi - a)\, d\xi + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-\xi)\, d\xi \right) \\
&= \max_{x\in[a,b]} \frac{1}{2}(b-x)(x-a) \\
&= \max_{x\in[a,b]} \left(-\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2}(a+b) \right)^2 + \frac{(b-a)^2}{8} \right) \\
&= \frac{(b-a)^2}{8}.
\end{aligned}$$

Definiere nun eine Konstante λ durch $\lambda := L\frac{(b-a)^2}{8}$. Damit ist $\lambda < 1$, da nach Voraussetzung $L < \frac{8}{(b-a)^2}$, und für den Operator T gilt die Beziehung

$$\|Tv - Tw\| \leq \lambda \cdot \|v - w\| \text{ , mit } \lambda < 1.$$

Folglich ist T eine kontrahierende Selbstabbildung des vollständigen und normierten Raumes $C[a,b]$ und besitzt nach Aussage des Banachschen Fixpunktsatzes genau einen Fixpunkt. Demnach gibt es genau eine klassische Lösung für das betrachtete semilineare Randwertproblem.

□

Eine derartige eindeutige klassische Lösung ist allerdings nur in seltenen Fällen gegeben, da die Klasse der semilinearen Randwertprobleme, auf die die Existenzaussage angewandt werden kann, durch die strengen Anforderungen des Satzes beschränkt ist. Schwierigkeiten bereiten hierbei vor allem die Forderungen an die Funktion $f(x,s)$. Diese lassen keine von u' abhängigen Differentialgleichungen zu und der sehr starken Lipschitz-Bedingung, die für alle $s \in \mathbb{R}$ erfüllt sein muss, können bereits einfache Funktionen nicht mehr genügen.

Zu bemerken ist noch, dass die Bedingung an die Lipschitz-Konstante durch

$$L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

präzisiert werden kann. Diese Bedingung ist scharf, denn schon für $L = \pi^2/(b-a)^2$ können mehrere Lösungen oder keine Lösung existieren. Dies soll an dieser Stelle durch zwei konkrete Beispiele veranschaulicht werden.

Beispiel 3. Hierzu betrachten wir als Erstes das semilineare Randwertproblem für $x \in [0,1]$

$$-u''(x) = \pi^2 u(x)$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Die Funktion $f(x,s)$ ist offenbar Lipschitz-stetig im zweiten Argument mit einer Lipschitz-Konstanten $L = \pi^2$. Über die Ermittlung des zugehörigen charakteristischen Polynoms gelangt man zu der Lösung

$$u(x) = C_1 \sin(\pi x) + C_2 \cos(\pi x),$$

wobei C_1, C_2 zwei reelle Konstanten sind. Diese lassen sich wiederum mittels der Randbedingungen bestimmen, was zu dem Gleichungssystem

$$1. \quad C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0$$

$$2. \quad C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-1) = 0$$

führt. Dieses ist gleichbedeutend damit, dass $C_2 = 0$ sein muss und C_1 hingegen beliebig sein kann. Damit hat das betrachtete Problem für $C_1 \in \mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen der Form

$$u(x) = C_1 \sin(\pi x).$$

Die folgende Abbildung 2 zeigt drei verschiedene Lösungen der Randwertaufgabe mit jeweils unterschiedlichen Konstanten C_1.

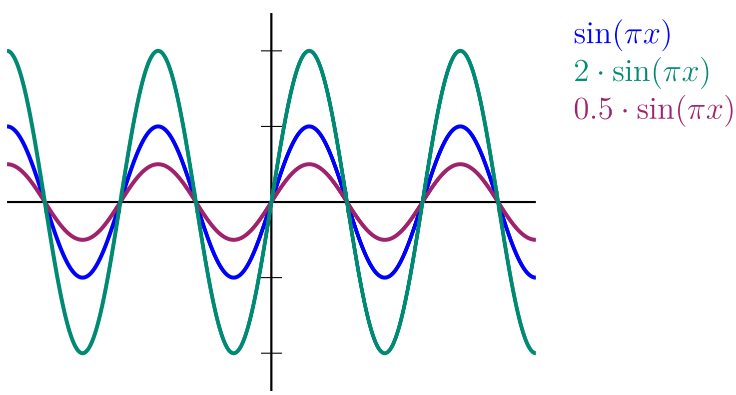

Abbildung 2: Lösungen des Randwertproblems $-u'' = \pi^2 u$ mit $u(0) = u(1) = 0$

Beispiel 4. Die zweite Randwertaufgabe, die dahingehend untersucht werden soll, ist für $x \in [0, 1]$ durch

$$-u''(x) = \pi^2(u(x) + 1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

definiert. Auch hier ist $f(x, s) = \pi^2(s^2 + 1)$ im zweiten Argument wieder Lipschitz-stetig mit der Konstanten $L = \pi^2$. Das Lösen der Differentialgleichung liefert die zwei zur ersten Aufgabe äquivalenten homogenen Lösungen und die spezielle Lösung $u_s(x) = -x$, was insgesamt zu der Lösung

$$u(x) = C_1 \sin(\pi x) + C_2 \cos(\pi x) - x$$

führt, wobei C_1, C_2 erneut zwei reelle Konstanten sind.
Die Randbedingungen liefern das Gleichungssystem

1. $C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0$
2. $C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-1) - 1 = 0.$

Aus dem daraus resultierenden Widerspruch, dass $C_2 = 0$ und $C_2 = -1$, folgt unmittelbar, dass keine Lösung existieren kann.

3.4 Verallgemeinerter Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Die Klasse der semilinearen Randwertprobleme, für die wir eine derartige Existenz- und Eindeutigkeitsaussage treffen können, kann mit Hilfe des nachfolgenden Theorems erweitert werden. Hierbei wird die Aussage für semilineare Differentialgleichungen in Abhängigkeit von u für Differentialgleichungen, die zusätzlich von u' abhängig sind, verallgemeinert.

Wir betrachten also im Folgenden semilineare Randwertaufgaben der Form

$$-u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \text{ wobei } x \in (a, b), \tag{8}$$
$$u(a) = u(b) = 0.$$

Die besagte Existenz- und Eindeutigkeitsaussage ist durch das folgende Theorem gegeben:

Satz 4. *Sei $f : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und genüge der Lipschitz-Bedingung, das heißt: $\exists\, L, L' \geq 0$, sodass $\forall\, x \in [a,b]$ und $\forall\, s, t, s', t' \in \mathbb{R}$*

$$|f(x,s,t) - f(x,s',t')| \leq L \cdot |s-t| + L'|s'-t'|,$$

und gelte außerdem, dass

$$L \cdot \frac{(b-a)^2}{8} + L' \cdot \frac{b-a}{2} < 1.$$

Dann existiert genau eine klassische Lösung für das durch (8) *beschriebene semilineare Randwertproblem.*

Beweis. Die Herangehensweise verläuft analog zum Beweis des ersten Existenz- und Eindeutigkeitssatzes Satz 3.

Wir wollen das semilineare Randwertproblem (8) zunächst wieder in eine Integralgleichung überführen, welche die gesuchte klassische Lösung u durch die *Greenschen Funktion* darstellt.
Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist mit $-u''(x) = 0$ identisch zur ersten semilinearen Randwertaufgabe. Demnach befinden wir uns in der gleichen Situation wie schon in Abschnitt 3.3 und können mit derselben *Greenschen Funktion* arbeiten. Diese ist von der Gestalt

$$G(x,\xi) = \frac{1}{b-a} \begin{cases} (b-x)\cdot(\xi-a) & \text{, für } a \leq \xi \leq x \leq b \\ (x-a)\cdot(b-\xi) & \text{, für } a \leq x \leq \xi \leq b \end{cases} .$$

Betrachte die Integralgleichung

$$u(x) := \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi))\, d\xi,\ x \in [a,b], \tag{9}$$

wobei G wieder die *Greensche Funktion* bezeichnet und die Funktion f den Bedingungen des Satzes 4 genügt.

Vorausgesetzt, solch eine Funktion u existiert, so wäre sie eine klassische Lösung des semilinearen Randwertproblems (8), da nach Definition der *Greenschen Funktion* gilt, dass $G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0$ und somit die homogenen Randbedingungen $u(a) = u(b) = 0$ erfüllt sind. Zusätzlich erfüllt u auch die Differentialgleichung, denn aus

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_a^b G(x,\xi) f(\xi,u(\xi),u'(\xi))\, d\xi \\ &= \int_a^x G(x,\xi) f(\xi,u(\xi),u'(\xi))\, d\xi + \int_x^b G(x,\xi) f(\xi,u(\xi),u'(\xi))\, d\xi \\ &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (\xi-a) f(\xi,u(\xi),u'(\xi))\, d\xi + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-\xi) f(\xi,u(\xi),u'(\xi))\, d\xi \end{aligned}$$

folgen analog zum Beweis des ersten Existenz- und Eindeutigkeitssatzes die zwei Ableitungen

$$u'(x) = -\frac{1}{b-a}\int_a^x (\xi - a) f(\xi, u(\xi), u'(\xi))\, d\xi + \frac{1}{b-a}\int_x^b (b-\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi))\, d\xi$$

sowie

$$\begin{aligned} u''(x) &= -\frac{x-a}{b-a} f(x, u(x), u'(x)) - \frac{b-x}{b-a} f(x, u(x), u'(x)) \\ &= -f(x, u(x), u'(x)). \end{aligned}$$

Weiter folgt aus den Bedingungen des Randwertproblems und mit Hilfe der partiellen Integration, dass jede klassische Lösung von (8) auch die Integralgleichung (9) löst, denn

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi))\, d\xi &= -\int_a^b G(x,\xi) u''(\xi)\, d\xi \\ &= -\frac{b-x}{b-a}\int_a^x (\xi-a) u''(\xi)\, d\xi - \frac{x-a}{b-a}\int_b^x (b-\xi) u''(\xi)\, d\xi \\ &= -\frac{b-x}{b-a}((x-a)u'(x) - u(x)) + \frac{x-a}{b-a}((b-x)u'(x) - u(x)) \\ &= -\frac{1}{b-a}(-b + x - x + a) u(x) \\ &= u(x). \end{aligned}$$

Damit sind das zu betrachtende Randwertproblem und die Integralgleichung äquivalent. Die Existenz einer Funktion u von der durch (9) beschriebenen Gestalt impliziert folglich eine eindeutige klassische Lösung von (8). Um die eindeutige Existenz zu zeigen, definieren wir wieder analog zum ersten Beweis einen Operator T durch

$$(Tu)(x) := \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi))\, d\xi.$$

Betrachte nun eine beliebige Funktion $v \in C^1[a,b]$, dem vollständigen und normierten Raum aller auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig differenzierbaren Funktionen.

Wenn $v \in C^1[a,b]$, dann ist $\xi \mapsto f(\xi, u(\xi), u'(\xi))$ wohldefiniert. Damit gilt aufgrund der Stetigkeit der *Greenschen Funktion* und des Integrals, dass $Tv \in C[a,b]$. Darüber hinaus ist auch $(Tv)' \in C[a,b]$, denn

$$(Tv)'(x) = -\frac{1}{b-a}\int_a^x (\xi - a) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) + \frac{1}{b-a}\int_x^b (b-\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi))\, d\xi$$

ist ein Kompositum stetiger Funktionen und damit ebenfalls stetig. Folglich ist T auf dem Intervall $[a,b]$ stetig differenzierbar und bildet den Raum $C^1[a,b]$ in sich

ab.
Um den *Banachschen Fixpunktsatz* anwenden zu können, muss T nur noch die Kontraktionseigenschaft aufweisen.

Betrachte hierfür zwei beliebige Funktionen $v, w \in C^1[a,b]$ mit der Norm

$$\|v\| := \max_{x\in[a,b]} (L|v(x)| + L'|v'(x)|). \tag{10}$$

Aufgrund der Lipschitz-Bedingung von f und der Nichtnegativität der *Greenschen Funktion* gilt, dass

$$\begin{aligned}
|(Tv)(x) - (Tw)(x)| &= \left| \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, v(\xi), v'(\xi))\, d\xi - \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, w(\xi), w'(\xi))\, d\xi \right| \\
&\leq \int_a^b G(x,\xi) |f(\xi, v(\xi), v'(\xi)) - f(\xi, w(\xi), w'(\xi))|\, d\xi \\
&\leq \int_a^b G(x,\xi)(L|v(\xi) - w(\xi)| + L'|v'(\xi) - w'(\xi)|)\, d\xi \\
&\leq \int_a^b G(x,\xi)\, d\xi \|v - w\| \\
&= \frac{1}{2}(b-x)(x-a)\|v-w\|,
\end{aligned}$$

da, wie für das erste Problem bereits gezeigt,

$$\int_a^b G(x,\xi)\, d\xi = \frac{1}{2}(b-x)(x-a).$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
|(Tv)'(x) - (Tw)'(x)| &= \left| \frac{d}{dx} \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, v(\xi), v'(\xi))\, d\xi - \frac{d}{dx} \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, w(\xi), w'(\xi))\, d\xi \right| \\
&\leq \int_a^b \left| \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} \right| |f(\xi, v(\xi), v'(\xi)) - f(\xi, w(\xi), w'(\xi))|\, d\xi \\
&\leq \int_a^b \left| \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} \right| (L|v(\xi) - w(\xi)| + L'|v'(\xi) - w'(\xi)|)\, d\xi \\
&\leq \int_a^b \left| \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} \right| \|v - w\| \\
&= \frac{(x-a)^2 + (x-b)^2}{2(b-a)} \|v-w\|,
\end{aligned}$$

denn

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \left| \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} \right| &= \int_a^x \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{b-x}{b-a}(\xi - a) \right) \right| \, d\xi + \int_x^b \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{x-a}{b-a}(b-\xi) \right) \right| \, d\xi \\
&= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^x (\xi - a) \, d\xi + \int_x^b (b-\xi) \, d\xi \right) \\
&= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{2}x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2 + a^2 + b^2 - \frac{1}{2} - bx + \frac{1}{2}x^2 \right) \\
&= \frac{(x-a)^2 + (x-b)^2}{2(b-a)}.
\end{aligned}
$$

Durch die Kombination dieser beiden Ergebnisse ergibt sich für die Funktionen v und w in der durch (10) definierten Norm die Beziehung

$$
\begin{aligned}
\|Tv - Tw\| &= \max_{x\in[a,b]} \left(L|(Tv)(x) - (Tw)(x)| + L'|(Tv)'(x) - (Tw)'(x)| \right) \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \left(L\frac{1}{2}(b-x)(x-a)\|v-w\| + L'\frac{(x-a)^2 + (x-b)^2}{2(b-a)}\|v-w\| \right) \\
&\leq (L\frac{(b-a)^2}{8} + L'\frac{b-a}{2})\|v-w\|,
\end{aligned}
$$

denn wie aus dem ersten Beweis bereits bekannt, gilt

$$
\max_{x\in[a,b]} (b-x)(b-a) = \frac{(b-a)^2}{8}
$$

und weiter, dass

$$
\max_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)^2 + (x-b)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2},
$$

da die nach oben geöffnete Parabel mit Minimum an der Stelle $\frac{a+b}{2}$ ihr Maximum auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ in den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ annimmt. Nach Voraussetzung des Satzes gilt

$$
\lambda := L\frac{(b-a)^2}{8} + L'\frac{b-a}{2} < 1.
$$

Damit ist gezeigt, dass der Operator T eine kontrahierende Abbildung ist, denn

$$
\|Tv - Tw\| \leq \lambda \cdot \|v - w\|, \text{ für } \lambda < 1,
$$

und T laut *Banachschem Fixpunktsatz* genau einen Fixpunkt besitzt. Dieser impliziert eine eindeutige klassische Lösung der semilinearen Randwertaufgabe (8).

$\square$

4 Anwendung II: Integralgleichungen

Auch in Bezug auf Integralgleichungen können mit Hilfe des *Banachschen Fixpunktsatzes* Eindeutigkeitsaussagen über die Existenz einer Lösung getroffen werden. Die Anwendung läuft hierbei analog zu Differentialgleichungen, indem die Lösungssuche in ein Fixpunktproblem umgewandelt wird und die Voraussetzungen des *Banachschen Fixpunktsatzes* überprüft bzw. hergestellt werden.

Im Folgenden soll kurz der Begriff der Integralgleichung eingeführt werden, um im Anschluss die eindeutige Existenz einer Lösung am Beispiel der *Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art* und *Volterraschen Integralgleichung zweiter Art* zu zeigen. Hier kommt auch die Erweiterung des *Banachschen Fixpunktsatzes für kontrahierende Potenzen* zum Tragen. Das Kapitel basiert auf [KF75] und [Heu08].

4.1 Integralgleichungen

Unter einer Integralgleichung verstehen wir eine Gleichung der Form

$$f(s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\, dt + \varphi(s), \tag{11}$$

in der also die gesuchte Funktion f auch unter dem Integralzeichen steht.
Hierbei sind K und φ bekannte Funktionen und die Variablen $s, t \in [a, b]$.

Eine besondere Eigenschaft von Integralgleichungen der Gestalt (11) ist deren Linearität, die dadurch entsteht, dass die gesuchte Funktion f linear in die Gleichung eingeht.

Bemerkung. Genauso können auch nichtlineare Integralgleichungen wie zum Beispiel

$$f(s) = \int_a^b K(s,t) g(f(t), t)\, dt,$$

betrachtet werden. Hierbei geht f nur implizit durch eine weitere bekannte Funktion g in die Integralgleichung ein. Dies sei lediglich ergänzend erwähnt, da wir uns im Weiteren auf lineare Integralgleichungen beschränken.

Man unterscheidet wiederum verschiedene Typen von linearen Integralgleichungen, von denen im Folgenden zwei spezielle Typen gesondert betrachtet und auf die Existenz einer Lösung überprüft werden sollen.

4.2 Fredholmscher Typ

Der erste spezielle Typ, der hier untersucht werden soll, sind die inhomogenen linearen *Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art.*

Seien dazu $K\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ wie zuvor wieder gegebene Funktionen, die insbesondere stetig für alle $x, y \in [a,b]$ sind. Seien weiter λ ein beliebiger Parameter und f die gesuchte Funktion. Dann heißt

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy + \varphi(x) \tag{12}$$

Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art.

Bemerkung. Kommt die gesuchte Funktion f nur unter dem Integral vor - entspricht also die linke Seite von (12) Null - so handelt es sich um *Fredholmsche Integralgleichungen erster Art.* Diese werden allerdings nicht näher betrachtet, da das Prinzip der kontrahierenden Abbildung in diesem Fall nicht angewandt werden kann.

Um nun die eindeutige Lösbarkeit von (12) zu beweisen, wird diese zu Beginn erneut als Gleichung der Form $Ax = x$ aufgefasst, wobei der Operator A durch

$$Af(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy + \varphi(x)$$

für $x, y \in [a,b]$ definiert ist. Dieser bildet, aufgrund der Stetigkeit der Funktionen K und φ und des Integrals als Funktional, den vollständigen und normierten Raum $C[a,b]$ in sich ab.

Seien nun $f_1, f_2 \in C[a,b]$ zwei beliebige Funktionen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|Af_1 - Af_2\|_{C[a,b]} &= \max_{x\in[a,b]} |\lambda \int_a^b K(x,y)(f_1(y) - f_2(y))\, dy| \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} |\lambda| \int_a^b |K(x,y)| \cdot |f_1(y) - f_2(y)|\, dy \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} |\lambda| \int_a^b |K(x,y)|\, dy \cdot \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]} \\
&\leq |\lambda| \int_a^b M\, dy \cdot \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]} \\
&= |\lambda| M(b-a) \cdot \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]},
\end{aligned}$$

denn aufgrund der Stetigkeit ist K auf dem abgeschlossen Intervall $[a,b]$ beschränkt und es existiert eine Konstante $M \in \mathbb{R}$, sodass

$$|K(x,y)| \leq M.$$

Vorausgesetzt $|\lambda|M(b-a) < 1$, so ist A eine Kontraktion. Damit sind alle geforderten Voraussetzungen des *Banachschen Fixpunktsatzes* erfüllt.

Das Prinzip der kontrahierenden Abbildung liefert folglich die eindeutige Lösbarkeit aller *Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art* (12) mit hinreichend kleinem Parameter λ, der durch die Bedingung

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

beschränkt ist.

4.3 Volterrascher Typ

Der zweite Typ von Integralgleichungen, der auf die eindeutige Existenz einer Lösung untersucht werden soll, kann auch als Spezialfall der Integralgleichungen vom *Fredholmschen* Typ angesehen werden.
Charakteristischer Unterschied ist dabei, dass die Veränderliche x auch die obere Integralgrenze bildet, wobei weiterhin $a \leq x \leq b$. Der Zusammenhang beider Typen wird deutlich, wenn man die Funktion K für $y > x$ durch $K(x, y) = 0$ stetig fortsetzt.
Bei Integralgleichungen der Gestalt

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x) \tag{13}$$

sprechen wir von *Volterraschen Integralgleichungen zweiter Art*, wobei für die Funktionen K und φ wieder die gleichen Bedingungen gelten, λ wieder ein beliebiger Parameter und f die gesuchte Funktion ist.

Bemerkung. Bei *Volterraschen Integralgleichungen erster Art* taucht die gesuchte Funktion f erneut nur unter dem Integral auf, weswegen dieser Typ auch hier außer Acht gelassen werden soll.

Um an dieser Stelle nun eine eindeutige Lösung der Gleichung (13) nachzuweisen, greifen wir auf die Erweiterung des *Banachschen Fixpunktsatzes für kontrahierende Potenzen* zurück.
Hierfür interpretiert man die Gleichung wieder als Fixpunktproblem und definiert analog zu den Integralgleichungen des *Fredholmschen* Typs einen Operator A und zeigt, dass die Potenz A^n der Abbildung kontrahierend ist.

Sei also

$$Af(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)f(y)\,dy + \varphi(x)$$

für $x, y \in [a, b]$ der zu betrachtende Operator. Für zwei Funktionen f_1 und f_2, welche auf dem Intervall $[a, b]$ stetig sind, gilt

$$\begin{aligned}
|Af_1(x) - Af_2(x)| &= |\lambda \int_a^x K(x,y)(f_1(y) - f_2(y))\,dy| \\
&\leq |\lambda| \int_a^x |K(x,y)| \cdot |f_1(y) - f_2(y)|\,dy \\
&\leq |\lambda| \int_a^x |K(x,y)|\,dy \cdot \max_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)| \\
&\leq |\lambda| M(x-a) \cdot \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]},
\end{aligned}$$

da K aufgrund der Stetigkeit durch $|K(x,y)| \leq M$ beschränkt ist.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
|A^2 f_1(x) - A^2 f_2(x)| &= |\lambda \int_a^x K(x,y)(\lambda \int_a^x K(x,y)(f_1(y) - f_2(y))\,dy)\,dy| \\
&\leq |\lambda|^2 \int_a^x |K(x,y)| \int_a^x |K(x,y)| \cdot |f_1(y) - f_2(y)|\,dy\,dy \\
&\leq |\lambda|^2 \int_a^x |K(x,y)| \int_a^x |K(x,y)|\,dy\,dy \cdot \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]} \\
&\leq |\lambda|^2 \int_a^x M \int_a^x M\,dy\,dy \cdot \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]} \\
&= |\lambda|^2 \cdot M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]},
\end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ nochmals der Supremumsnorm entspricht.

Nach n-maligem Potenzieren der Abbildung A gelangen wir schließlich zu

$$\begin{aligned}
|A^n f_1(x) - A^n f_2(x)| &\leq |\lambda|^n \cdot M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]} \\
&\leq |\lambda|^n \cdot M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \cdot \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung A^n eine Kontraktion, vorausgesetzt

$$\frac{|\lambda|^n \cdot M^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

Diese Bedingung kann für alle Parameter λ erfüllt werden, indem man die Zahl n hinreichend groß wählt.

Demnach hat die Abbildung A nach dem *Banachschen Fixpunktsatz für kontrahierende Potenzen* genau einen Fixpunkt. Dies ist äquivalent dazu, dass jede durch (13) definierte *Volterrasche Integralgleichung der zweiten Art* für jedes beliebige λ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

5 Fazit

Im Verlauf der Arbeit haben wir vier verschiedene Gleichungstypen aus den Bereichen der Differentiation und Integration kennengelernt und diese auf ihre Lösbarkeit untersucht. Unter Berücksichtigung des *Banachschen Fixpunktsatzes* konnte in allen Fällen eine eindeutig bestimmte Lösung nachgewiesen werden. In drei der vier Fälle gelang dies bedingt durch die strengen Voraussetzungen des Satzes allerdings nur durch starke Einschränkung der Gleichungen.
So gelten etwa die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen der Sätze 3 und 4 in Bezug auf semilineare Randwertprobleme nur für Differentialgleichungen der speziellen Form $-u''(x) = f(x, u(x))$ und $-u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$, deren Funktion f darüber hinaus noch einer starken Lipschitz-Bedingung genügen muss. Diese Einschränkungen, die zwingend notwendig sind, um den *Banachschen Fixpunktsatz* anwenden zu können, lassen die Zahl der Randwertaufgaben, für die auf diese Weise eine eindeutig bestimmte Lösung garantiert wird, sehr klein werden. Natürlich können auch Aussagen über die Lösbarkeit semilinearer Randwertprobleme getroffen werden, deren zugehörige Differentialgleichung die aufgezeigten Bedingungen nicht erfüllt. In diesen Situationen geht allerdings die Einzigkeit der Lösung verloren. Ein Beispiel dafür ist der *Satz von Scorza Dragoni*, nachzulesen in [Emm04], der für die Funktion f nur noch Stetigkeit und Beschränktheit fordert aber mindestens eine Lösung garantiert.
Ähnlich verhält es sich bei den Integralgleichungen des *Fredholmschen* Typs. Das *Prinzip der kontrahierenden Abbildung* kann nur für hinreichend kleine Parameter λ angewandt werden. Über die Existenz einer eindeutigen Lösung bei *Fredholmschen Integralgleichungen*, deren Parameter die entsprechende Einschränkung nicht erfüllt, kann mit Hilfe des *Banachschen Fixpunktsatzes* keine Aussage getroffen werden.
Lediglich für Integralgleichungen des *Volterraschen* Typs konnte unter Verwendung des *Banachschen Fixpunktsatzes für kontrahierende Potenzen* die eindeutige Lösbarkeit ohne Einschränkung nachgewiesen werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass für die Gleichungen, welche den geforderten Bedingungen gerecht werden können, der *Banachsche Fixpunktsatz* insbesondere durch die garantierte Einzigkeit eine bestmögliche Aussage zulässt. Gelten diese Bedingungen jedoch nicht, was für den Großteil von Gleichungen zutrifft, kann keine Aussage getroffen werden.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit mit dem Thema

Fixpunktsatz von Banach und Anwendungen

selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen herangezogen wurden.

Ort, Datum

Unterschrift

Bielefeld, den 14. September 2010

Literatur

[AV05] Appell, Jürgen ; Väth, Martin: *Elemente der Funktionalanalysis*. Vieweg, 2005

[Emm04] Emmrich, Etienne: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg, 2004

[GRT09] Göpfert, Alfred ; Riedrich, Thomas ; Tammer, Christiane: *Angewandte Funktionalanalysis*. Vieweg + Teubner, 2009

[Heu06] Heuser, Harro: *Funktionalanalysis*. Teubner, 2006

[Heu08] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis Teil 2*. Vieweg + Teubner, 2008

[KF75] Kolmogorov, Andrej N. ; Fomin, Sergej V.: *Reelle Funktionen und Funktionalanalysis*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975

[Wal76] Walter, Wolfgang: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 1976