Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik

Die Ungleichungen von Jackson

Bachelorarbeit im Rahmen des Seminars
„Numerische Mathematik”
Wintersemester 2009/2010
Veranstaltende: Prof. Dr. Etienne Emmrich, Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn,
Dr. Thorsten Hüls
betreut von: Prof. Dr. Etienne Emmrich

vorgelegt von:

Marco Janßen
August-Bebel-Straße 57a
33602 Bielefeld
E-Mail: m.janssen@uni-bielefel.de
Matrikelnummer: 1831643

vorgelegt am: 19. März 2010

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit „Die Ungleichungen von Jackson“ selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Bielefeld, den 19. März 2010 Marco Janßen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In vielerlei Hinsicht ist es vorteilhaft eine Funktion durch eine einfachere Funktion, wie zum Beispiel Funktionen aus dem Raum der Polynome, anzunähern. Diese Annäherung wird Approximation genannt. Häufig wird durch Polynome approximiert, da sich diese leicht differenzieren, integrieren und auswerten lassen. Vor allem im Hinblick auf computergestützte Lösungsverfahren ist der Vorteil von Approximationen, ansonsten schwer handhabbarer Funktionen, erkennbar.
Wie man sich leicht vorstellen kann, ist es bei den meisten Funktionen nicht möglich, diese perfekt anzunähern. Die Differenz der Funktionen, bezüglich einer Norm, nennt man Approximationsfehler. In dieser Arbeit interessiert uns der Approximationsfehler bezüglich der Tschebyscheff- beziehungsweise Maximumsnorm.
K. Weierstraß hat gezeigt, dass jede stetige Funktion auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall beliebig gut durch Polynome, sofern deren Grad frei wählbar sein darf, approximiert werden kann [1, S. 30]. Der Approximationsfehler kann also, wenn der Grad des approximierenden Polynoms nur genügend groß ist, beliebig klein werden. Das gleiche gilt auch für Approximationen von stetigen, periodischen Funktionen durch trigonometrische Summen [1, S. 33].
Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Größenordnung des Fehlers von bestimmten Tschebyscheff-Approximationen abschätzen, wenn der Grad der approximierenden Polynome beziehungsweise die Ordnung der approximierenden trigonometrischen Summen nicht über einen bestimmten Wert hinausgehen soll. Das stellt eine Verschärfung des Satzes von Weierstraß dar. Dazu werden wir einige Ungleichungen von Jackson vorstellen und beweisen, denn diese stellen eine Abschätzung der gesuchten Approximationsfehler dar.
Im ersten Teil beschäftigen wir uns mit der trigonometrischen Tschebyscheff-Approximation, bei der für eine stetige periodische Funktion eine trigonometrische Summe

$$S_n(\varphi) := \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu \cos(\nu\varphi) + \beta_\nu \sin(\nu\varphi)\right),$$

der Ordnung n, mit $\alpha_\nu,\ \beta_\nu \in \mathbb{R}$, gesucht wird, die bezüglich der Tschebyscheff-Norm am wenigsten von der zu approximierenden Funktion abweicht. Den Approximationsfehler bezeichnen wir für diesen Fall im Folgenden mit

$$E_n^T(g) := \min_{\alpha_0,\alpha_\nu,\beta_\nu} \max_{\varphi} \left| g(\varphi) - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu \cos(\nu\varphi) + \beta_\nu \sin(\nu\varphi)\right) \right| .$$

Auf den Ergebnissen des ersten Teils aufbauend, werden wir dann die Approximation von stetigen Funktionen durch Polynome bezüglich der Tschebyscheff-Norm betrachten. Auch hierfür liefern uns die Ungleichungen von Jackson gute Abschätzungen für den Approximationsfehler, den wir mit

$$E_n(g) := \min_{\alpha_\nu,} \max_{x} \left| g(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \left(\alpha_\nu x^\nu\right) \right|$$

bezeichnen.

1 Approximation periodischer Funktionen durch trigonometrische Summen

In diesem Abschnitt widmen wir uns nun der trigonometrischen Tschebyscheff-Approximation und werden die Ungleichungen von Jackson für stetige periodische Funktionen beweisen. Dabei halten wir uns im Wesentlichen an die Darstellung von G. Meinardus [2, S. 48-54]. Für den Fehler $E_n^T(g)$ gilt nach der Definition

$$E_n^T(g) \leq \max_{\varphi} \left| g(\varphi) - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu \cos(\nu\varphi) + \beta_\nu \sin(\nu\varphi)\right) \right| \tag{1}$$

für beliebige α_0, α_ν, β_ν und alle φ. Eine Möglichkeit den Fehler $E_n^T(g)$ abzuschätzen ist deshalb, für eine geschickt gewählten trigonometrischen Summe S_n, eine Abschätzung des Terms $\max_\varphi |g(\varphi) - S_n(\varphi)|$ zu finden. Diese fest gewählte trigonometrische Summe wird dann als Operator aufgefasst. So hat D. Jackson zum Beweis einer etwas gröberen Abschätzung von $E_n^T(g)$, als die die wir in dieser Arbeit entwickeln, den linearen monotonen Operator

$$\theta_n : \mathscr{C}_{2\pi} \to \mathscr{C}_{2\pi},\ \theta_n : h \mapsto \theta_n(h) =: h_n$$

mit

$$h_n(\varphi) = [\theta_n(h)](\varphi) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left(\frac{\sin \frac{nt-n\varphi}{2}}{\sin \frac{t-\varphi}{2}} \right)^4 dt$$

verwendet, dessen Wert eine trigonometrische Summe der Ordnung $2n-2$ ist. Dies soll hier nicht bewiesen werden, sondern nur erwähnt bleiben.
Ein Operator heißt monoton, wenn für stetige, periodische Funktionen f_1 und f_2 aus der Bedingung $f_1 \leq f_2$, auch

$$[\theta_n(f_1)](\varphi) \leq [\theta_n(f_2)](\varphi)$$

für alle φ folgt.
Wir werden die angesprochenen Eigenschaften dieses Operators nicht beweisen, da wir im Folgenden nicht den Operator von Jackson, sondern den Korovkinoperator benutzen werden. Diesen werden wir im Abschnitt 1.2 konstruieren.
Es reicht zudem nur 2π-periodische Funktionen betrachten, denn sei f d-periodisch, so ist die Funktion $\varphi \mapsto f\left(\frac{d}{2\pi}\varphi\right)$ 2π-periodisch.

1.1 Einige Vorüberlegungen

Zunächst wollen wir einige Vorüberlegungen anstellen, die uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit nützlich sein werden.

Der Stetigkeitsmodul

An dieser Stelle werden wir den Stetigkeitsmodul einer Funktion einführen.

Definition. Als den Stetigkeitsmodul $\omega_f(\delta)$ einer Funktion f bezeichnen wir die größte Abweichung zweier Funktionswerte von f, wenn ihre Argumente höchstens um δ voneinander verschieden sind. Also definieren wir den Stetigkeitsmodul als

$$\omega_f(\delta) := \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq\delta}} |f(x) - f(y)| \ .$$

Oft schreibt man auch nur $\omega(\delta)$, anstelle von $\omega_f(\delta)$.

Da nun für $\delta_1 \geq \delta_2 \geq 0$ die Menge

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \leq \delta_1\right\}$$

die Menge

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \leq \delta_2\right\}$$

enthält, können wir

$$\omega(\delta_2) \leq \omega(\delta_1)$$

folgern. Somit wächst die Funktion ω_f monoton. Weiter gilt das folgende Lemma.

Lemma 1. *Für den Stetigkeitsmodul und eine beliebige positive reelle Zahl λ gilt*

$$\omega(\lambda\cdot\delta) \leq (\lambda+1)\cdot\omega(\delta) \ .$$

Beweis: Zunächst zeigen wir die Gültigkeit dieser Ungleichung für eine beliebige natürliche Zahl m. Dazu zerlegen wir für zwei beliebige reelle Zahlen x, y mit $|x-y| \leq \delta$ das Intervall $[x,y]$ in m gleichgroße Teile, indem wir

$$w_i := x + \frac{k}{m}(y-x)$$

setzen. Damit lässt sich die Teleskopsumme

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(f(w_{k+1}) - f(w_k)\right) = f(x) - f(y)$$

bilden. Weiter gilt aber auch

$$|w_{k+1} - w_k| = \left| x + \frac{k+1}{m}(y-x) - x + \frac{k}{m}(y-x) \right| = \left| \frac{1}{m}(y-x) \right| \leq \delta$$

und somit auch $|f(w_{k+1}) - f(w_k)| \leq \omega(\delta)$. Damit erhalten wir

$$\omega(m\delta) = \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq m\delta}} |f(x) - f(y)| = \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq m\delta}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} (f(w_{k+1}) - f(w_k)) \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq m\delta}} |f(w_{k+1}) - f(w_k)| \leq m \cdot \omega(\delta)\ .$$

Wenn wir nun für eine positive reelle Zahl λ, $m := \lceil \lambda \rceil$ setzten, gilt die folgende Ungleichung

$$\omega(\lambda \cdot \delta) \leq \omega(m \cdot \delta) \leq m \cdot \omega(\delta) \leq (\lambda + 1) \cdot \omega(\delta)\ .$$

Dabei haben wir im ersten und letzten Schritt verwendet, dass die Funktion ω monoton wächst. □

Orthogonalitätseigenschaften der Sinus- und Cosinusfunktionen

Eine weitere Vorüberlegung, die wir anstellen, soll der folgende Satz sein.

Satz 1. *Die Sinus- und Cosinusfunktionen erfüllen für alle natürlichen Zahlen k und l ungleich Null die Eigenschaften*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\cos(lt)dt = 0, \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)dt = 0,\ \ k \neq l, \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)dt = 0,\ \ k \neq l. \tag{4}$$

Zudem gelten die Gleichungen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt)dt = \pi, \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kt)dt = \pi. \tag{6}$$

Die ersten drei Eigenschaften werden zusammengenommen auch Orthogonalitätseigenschaften auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ genannt.

Beweis: Zunächst einmal gelten, auf Grund der Symmetrie der Cosinusfunktionen, die Gleichungen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu t)dt = \left[\frac{-\cos(\nu t)}{\nu}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-\cos(\nu\pi)}{\nu} - \frac{-\cos(-\nu\pi)}{\nu}$$

$$= \frac{-\cos(\nu\pi)}{\nu} - \frac{-\cos(\nu\pi)}{\nu} = 0 \tag{7}$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu t)dt = \left[\frac{\sin(\nu t)}{\nu}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin(\nu\pi)}{\nu} - \frac{\sin(-\nu\pi)}{\nu} = 0 \tag{8}$$

für alle $\nu \in \mathbb{N}\backslash 0$.

Weiter lässt sich aus den Additionstheoremen leicht die Beziehung

$$\sin(it)\cos(jt) = \frac{1}{2}\left(\sin((i+j)t) + \sin((i-j)t)\right)$$

ableiten. Damit erhalten wir unter Anwendung von (7) die Gleichung (2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\cos(lt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((k+l)t) + \sin((k-l)t)dt = 0+0\ .$$

Für den Fall, dass $k = l$ ist, haben wir zudem die Tatsache benutzt, dass $\sin 0 = 0$ gilt und somit auch das Integral darüber gleich Null sein muss.
Mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sin(it)\sin(jt) &= \frac{1}{2}\left(\cos((i-j)t) - \cos((i+j)t)\right)\ , \\
\cos(it)\cos(jt) &= \frac{1}{2}\left(\cos((i-j)t) + \cos((i+j)t)\right)\ ,
\end{aligned}$$

die wir ebenfalls aus den Additionstheoremen herleiten können, erhalten wir unter Anwendung von (8) einerseits

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kt)dt &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0t) - \cos(2kt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2kt)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2kt)dt = \pi
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt)dt &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0t) + \cos(2kt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2kt)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2kt)dt = \pi
\end{aligned}$$

und für $k \neq l$ andererseits

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((k-l)t) - \sin((k+l)t)dt = 0+0$$

sowie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((k-l)t) + \cos((k+l)t)dt = 0+0\ .$$

Damit sind alle gewünschten Gleichungen erfüllt. □

1.2 Der Korovkinoperator

Nun wollen wir den schon angesprochenen Korovkinoperator konstruieren, verschiedene Darstellungsformen finden und das Konvergenzverhalten untersuchen. P. P. Korovkin hat versucht, durch die Bildung des Korovkinoperators, einen Operator mit möglichst guten Approximationseigenschaften zu finden. Dazu kombinierte er die Partialsumme der Fourier-Reihe mit Gewichten $\zeta_\nu^{(n)} \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \ldots$ $\nu = 1, 2, \ldots, n$), wobei $\zeta_1^{(n)} \leq 1$ sein soll. Sei $\mathscr{C}_{2\pi}$ der Raum der 2π-periodischen, stetigen Funktionen, dann hat dieser lineare Operator die Form

$$\sigma_n : \mathscr{C}_{2\pi} \to \mathscr{C}_{2\pi},\ \sigma_n : g \mapsto \sigma_n(g) =: g_n$$

wobei

$$g_n(\varphi) = [\sigma_n(g)](\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu^{(n)} (A_\nu \cos(\nu\varphi) + B_\nu \sin(\nu\varphi))$$

ist und A_ν und B_ν als

$$A_\nu := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(\nu t) dt \ \ , \ \ \nu = 0, 1, \ldots, n$$

und

$$B_\nu := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(\nu t) dt \ \ , \ \ \nu = 0, 1, \ldots, n$$

gewählt werden.

Um die Notation etwas kürzer und damit übersichtlicher zu gestalten, wollen wir den Korovkinoperator mit

$$\sigma_n(g, \varphi) := [\sigma_n(g)](\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu^{(n)} (A_\nu \cos(\nu\varphi) + B_\nu \sin(\nu\varphi)) \tag{9}$$

bezeichnen.
Diese Darstellung ist jedoch nicht ideal, um damit die kommenden Beweise zu führen. Deshalb werden wir A_ν und B_ν in (9) einsetzen. So gelangen wir zu der Darstellung

$$\begin{aligned}
\sigma_n(g, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu^{(n)} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(\nu t) dt \cos(\nu\varphi) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(\nu t) dt \sin(\nu\varphi) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt + \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu^{(n)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left(\cos(\nu t) \cos(\nu\varphi) + \sin(\nu t) \sin(\nu\varphi) \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) u_n(t - \varphi) dt
\end{aligned}$$

mit

$$u_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu^{(n)} \cos(\nu t)\ .$$

Wobei wir im letzten Schritt das Additionstheorem

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

verwendet haben.

1.2.1 Konvergenz des Korovkinoperators

Nun stellt sich noch die Frage wie die Gewichte $\zeta_\nu^{(n)}$ zu wählen sind. Die Gewichte sollen dazu dienen dem Operator $\sigma_n(g,\varphi)$ möglichst gute Approximationseigenschaften zu verschaffen. Dazu stellen wir die beiden folgenden Bedingungen an $\zeta_\nu^{(n)}$.
i) $\lim_{n\to\infty}\zeta_\nu^{(n)} = 1$
ii) $u_n(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

Satz 2. *Unter den beiden Bedingungen i) und ii) gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(g,\varphi) = g(\varphi)$$

gleichmäßig in φ.

Beweis: Nach ii) ist $\sigma_n(g,\varphi)$ monoton und sein Wert, wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, eine trigonometrische Summe der Ordnung n.
Des Weiteren können wir σ_n an den Stellen $(1,\varphi)$, $(\cos t,\varphi)$ und $(\sin t,\varphi)$ auswerten. Es gilt mit den Gleichungen (7) und (8) sowie den Additionstheoremen

$$\begin{aligned}
\sigma_n(1,\varphi) \quad &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\cos(\nu(t-\varphi))\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\cos(\nu t-\nu\varphi)dt \\
&= 1+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\nu t)\cos(\nu\varphi)dt+\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\nu t)\sin(\nu\varphi)dt\right) \\
&= 1+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\left(\cos(\nu\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\nu t)dt+\sin(\nu\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\nu t)dt\right) \\
&= 1+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}(0+0) = 1\ .
\end{aligned}$$

Nun wollen wir σ_n noch an der Stelle $(\cos t,\varphi)$ zu betrachten. Dazu verwenden wir die

Beziehungen aus Satz 1 und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\sigma_n(\cos t,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\left(\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\cos(\nu(t-\varphi))\right)dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\cos(\nu t-\nu\varphi))dt\\
&= 0+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\cos(\nu t)\cos(\nu\varphi)+\cos t\sin(\nu t)\sin(\nu\varphi)dt\\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\cos(\nu\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\cos(\nu t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\sin(\nu\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin(\nu t)dt\\
&= \frac{1}{\pi}\pi\zeta_1^{(n)}\cos\varphi+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=2}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\cos(\nu\varphi)0+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\sin(\nu\varphi)0\\
&= \zeta_1^{(n)}\cos\varphi\;.
\end{aligned}
$$

Analog zu den voran gegangenen Schritten erhalten wir auch

$$\sigma_n(\sin t,\varphi) = \zeta_1^{(n)}\sin\varphi\;.$$

Wegen i) erfüllt der Korovkinoperator damit die drei Bedingungen

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sigma_n(1,\varphi) &= 1\;,\\
\lim_{n\to\infty}\sigma_n(\cos t,\varphi) &= \lim_{n\to\infty}\zeta_1^{(n)}\cos\varphi = \cos\varphi\;,\\
\lim_{n\to\infty}\sigma_n(\sin t,\varphi) &= \lim_{n\to\infty}\zeta_1^{(n)}\sin\varphi = \sin\varphi
\end{aligned}
$$

des Korollars von Korovkin zum Satz von Korovkin [3, S. 9]. Dieses Korollar liefert die gewünschte Eigenschaft. □

Wir sehen also, dass der lineare Operator $\sigma_n(g,\varphi)$ eine Approximation von $g(\varphi)$ darstellt.
Diese Aussage werden wir im folgenden Abschnitt noch wesentlich verschärfen.

1.2.2 Ungleichung von Korovkin

Mit der Ungleichung von Korovkin erhalten wir eine Größenordnung des Fehlers bei der Approximation mit $\sigma_n(g,\varphi)$, auf der wir die erste Ungleichung von Jackson aufbauen können.

Satz 3. *(Korovkin) Sei g eine stetige, 2π-periodische Funktion. Wenn ii) erfüllt ist, gilt*

$$|\sigma_n(g,\varphi)-g(\varphi)| \leq \omega(\delta)\left(1+\frac{\pi}{\delta\sqrt{2}}\sqrt{1-\zeta_1^{(n)}}\right)$$

für alle φ aus dem Definitionsbereich von g, wobei δ eine beliebige positive reelle Zahl ist.

Beweis: Zunächst wollen wir zwei Vorüberlegungen anstellen.
Erst einmal werden wir u_n mit Hilfe der Gleichung (8) integrieren, da dieses Integral an mehreren Stellen später im Hauptteil des Beweises gebraucht wird. Es gilt also

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)dt &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\cos(\nu t)\right)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dt+\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\nu t)dt = \pi+\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}0=\pi\,.\end{aligned}$$

Zum Zweiten benötigen wir die Identität, die das folgende Lemma liefert.

Lemma 2. *Sei f eine stetige, 2π-periodische Funktion, so gilt*

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\,.$$

Beweis: Wir wissen, dass gilt

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t)dt = \int_{-\pi+x}^{-\pi} f(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt+\int_{\pi}^{\pi+x} f(t)dt\,.$$

Substituieren wir nun indem wir $r=\phi(t):=t-2\pi$ setzen, gilt nach den Substitutionsregeln $dt=\frac{dr}{\phi'}$. Damit können wir das letzte Integral zu

$$\int_{\pi}^{\pi+x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{-\pi+x} f(r+2\pi)dr = \int_{-\pi}^{-\pi+x} f(r)dr = -\int_{-\pi+x}^{-\pi} f(t)dt$$

umformen. Man beachte, dass wir hier zweimal die Integrationsgrenzen, entsprechend der Substitutionsregeln, verändert haben. Dieses Ergebnis entspricht dem Negativen des ersten Integrals und somit ist die geforderte Identität bewiesen. □

Wenden wir das Lemma 2 an, gelangen wir zu

$$\begin{aligned}\sigma_n(g,\varphi)-g(\varphi) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)u_n(t-\varphi)dt-\frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot g(\varphi) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\varphi}^{\pi+\varphi} g(t)u_n(t-\varphi)dt-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_n(t)dt\,g(\varphi) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g(t+\varphi)-g(\varphi))u_n(t)dt\,.\end{aligned}$$

Nehmen wir nun den Betrag, so erhalten wir, da u_n nichtnegativ ist und mit der Definition sowie den Anmerkungen zum Stetigkeitsmodul,

$$\begin{aligned}|\sigma_n(g,\varphi)-g(\varphi)| &\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega_g(|t|)u_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega_g\left(\frac{|t|}{\delta}\delta\right)u_n(t)dt \\ &\leq \omega_g(\delta)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{|t|}{\delta}+1\right)u_n(t)dt\ .\end{aligned}$$

Wobei δ eine beliebige positive reelle Zahl ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\omega_g(\delta)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{|t|}{\delta}+1\right)u_n(t)dt =&\omega_g(\delta)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|t|}{\delta}u_n(t)dt+\omega_g(\delta)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_n(t)dt \\ =&\omega_g(\delta)\left(1+\frac{1}{\delta\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|u_n(t)dt\right)\ . \qquad (10)\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir den bereits berechneten Wert des Integrals von u_n von $-\pi$ bis π eingesetzt.

Nun schätzen wir noch das letzte Integral ab. Dazu werden wir zunächst das folgende Lemma beweisen.

Lemma 3. *Für alle $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ gilt die Ungleichung*

$$x \leq \frac{\pi}{2}\sin x\ .$$

Beweis: Die Funktion $f(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x$ besitzt, unter anderem, die Nullstellen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Außerdem nimmt sie auf dem Intervall $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ nur an den Intervallgrenzen Maxima an, denn $f''(x)=\frac{\pi}{2}\sin x$ ist auf dem besagten Intervall stets größer als Null. Also muss $f(x)$ auf dem Intervall $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ kleiner gleich Null sein. Daraus folgt die Ungleichung, die zu zeigen war. □

Mit Lemma 3 und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|u_n(t)dt &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{t}{2}\right|u_n(t)dt \leq \int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{|t|}{2}u_n(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{|t|}{2}\sqrt{u_n(t)}\sqrt{u_n(t)}dt \leq \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{|t|}{2}u_n(t)dt\cdot\int_{-\pi}^{\pi}u_n(t)dt} \\ &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{|t|}{2}u_n(t)dt\cdot\pi} = \sqrt{\pi^2\sigma_n\left(\sin^2\frac{t}{2},0\right)} \\ &= \sqrt{\pi^2\sigma_n\left(\frac{1-\cos(t)}{2},0\right)}\ . \qquad (11)\end{aligned}$$

Hier haben wir wieder den Wert des Integrals von u_n in den Grenzen $-\pi$ bis π eingesetzt und im letzten Schritt die Formel des doppelten Winkels

$$\cos(2x)=1-2\sin^2 x$$

angewendet.

Nun wollen wir den Korovkinoperator an $\left(\frac{1-\cos(t)}{2},0\right)$ auswerten. Dazu werden wir zum einen das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{4}t\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}$$

verwenden, zum anderen benötigen wir die bereits berechneten Integrale aus Satz 1. Damit können wir den Korovkinoperator wie beschrieben auswerten und erhalten

$$\begin{aligned}
\sigma_n\left(\frac{1-\cos t}{2},0\right) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos t}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\cos(\nu t)\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\nu t)dt - \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t dt \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\cdot\cos(\nu t)dt \\
&= \frac{1}{2}+0-0-\frac{1}{2\pi}\left(\zeta_1^{(n)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t dt + \sum_{\nu=2}^{n}\zeta_\nu^{(n)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\cos(\nu t)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\pi\zeta_1^{(n)}+0\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\zeta_1^{(n)} = \frac{1}{2}\left(1-\zeta_1^{(n)}\right)\ .
\end{aligned}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in (11) ein, so gelangen wir zur Abschätzung

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|u_n(t)dt \le \sqrt{\frac{\pi^2}{2}\left(1-\zeta_1^{(n)}\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1-\zeta_1^{(n)}\right)}\ .$$

Indem wir das Integral in dem Term (10) nun durch die gerade gewonnene Abschätzung ersetzen, gewinnen wir die Ungleichung von Korovkin. □

1.3 Vier Ungleichungen von Jackson

Die erste Ungleichung von Jackson

Mit dieser Vorarbeit gelangen wir zu der ersten Ungleichung von Jackson. Denn wir erinnern uns, dass die Grundidee zur Herleitung dieser Ungleichung darin bestand, den Fehler der Approximation von $g \in \mathscr{C}_{2\pi}$ durch die speziellen trigonometrischen Summen $\sigma_n(g,\varphi)$ abzuschätzen. Auf Grund der Ungleichung (1) können wir so mit der Ungleichung von Korovkin eine Abschätzung des Fehlers $E_n^T(g)$ entwickeln. Dazu wählen wir uns die Gewichte $\zeta_1^{(n)}$ als

$$\zeta_1^{(n)} = \cos\frac{\pi}{n+2} \ .$$

Es sei angemerkt, dass diese Gewichte die Bedingung i) erfüllen, allerdings werden wir diese Bedingung nicht weiter gebrauchen. Außerdem soll δ gleich n^{-1} sein. Durch Einsetzen erhalten wir so mit der Formel des Doppelwinkels

$$\begin{aligned}
E_n^T(g) &\leq \max_{|\varphi|\leq\pi} |g(\varphi)-\sigma_n(g,\varphi)| \\
&\leq \omega(\delta)\left(1+\frac{\pi}{\delta\sqrt{2}}\sqrt{1-\zeta_1^{(n)}}\right) = \omega\left(n^{-1}\right)\left(1+\frac{n\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{n+2}}\right) \\
&= \omega\left(n^{-1}\right)\left(1+n\pi\sin\frac{\pi}{2n+4}\right) \leq \omega\left(n^{-1}\right)\left(1+n\pi\frac{\pi}{2n+4}\right) \\
&\leq \omega\left(n^{-1}\right)\left(1+\frac{\pi^2}{2}\right) \ .
\end{aligned}$$

Zur Gültigkeit des vorletzten Schritts überlegen wir uns erstens, dass die Funktion

$$h:\mathbb{R}\to[-1,1]\ ,\ \ x\mapsto \sin\frac{\pi}{2x+4}-\frac{\pi}{2x+4}$$

für alle $x>0$ stetig und monoton wachsend ist, denn die erste Ableitung

$$h'(x) = \frac{2\pi}{(2x+4)^2} - \frac{2\pi\cos\frac{2\pi}{2x+4}}{(2x+4)^2}$$

ist für $x>0$ größer als Null, da $\cos\frac{2\pi}{2x+4}<1$ gilt. Zweitens sehen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2n+4}-\frac{\pi}{2n+4}\right) = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n+4} - \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n+4} = 0-0=0$$

gilt. Die Ungleichung

$$\sin\frac{\pi}{2n+4}-\frac{\pi}{2n+4}\leq 0$$

ist also für alle natürlichen Zahlen $n>0$ erfüllt. Damit erhalten wir die Ungleichung

$$\sin\frac{\pi}{2n+4}\leq\frac{\pi}{2n+4}\ ,$$

die wir im vorletzten Schritt der Gleichungskette benutzt haben.

Wenn wir nun noch zeigen können, dass wir Gewichte $\zeta_\nu^{(n)}$ für $n = 2, \ldots, n$ finden können, für welche die Summe u_n für unsere Wahl $\zeta_1^{(n)} = \cos\frac{\pi}{n+2}$ immer größer gleich Null ist, gilt damit der erste Satz von Jackson.

Satz 4. *(Jackson 1.1) Für jede stetige, 2π-periodische Funktion g und jede natürliche Zahl n gilt*

$$E_n^T(g) = \min_{\alpha_0,\alpha_\nu,\beta_\nu} \max_{\varphi} \left| g(\varphi) - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu \cos(\nu\varphi) + \beta_\nu \sin(\nu\varphi)\right) \right| \leq c \cdot \omega\left(n^{-1}\right)$$

mit $c := 1 + \frac{\pi^2}{2}$.

Existenz der nicht negativen Summe u_n

Jetzt wollen wir zeigen, dass die Summe u_n für unsere Wahl $\zeta_1^{(n)} = \cos\frac{\pi}{n+2}$ die zweite Vorrausetzungen aus 1.2.1 erfüllt, also immer größer gleich Null ist, da wir diese Eigenschaft im Beweis der ersten Ungleichung von Jackson gebraucht haben. Vergleiche dazu [3, S.75-77].
Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, erfüllt das so gewählte Gewicht $\zeta_1^{(n)}$ die erste Bedingung aus 1.2.1. Wenn es also möglich ist die übrigen Gewichte $\zeta_2^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$ so zu wählen, dass $u_n(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ nichtnegativ ist, so wissen wir nach den Ergebnissen des Abschnitts 1.2.1 auch, dass der Korovkinoperator punktweise gegen die zu approximierende Funktion konvergiert.

Satz 5. *Es existieren reelle Zahlen $\zeta_2^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$, so dass $u_n(t) \geq 0$, wobei $\zeta_1^{(n)} = \cos\frac{\pi}{n+2}$ ist.*

Beweis: Wir führen diesen Beweis, in dem wir zeigen, dass

$$A\left|\sum_{j=1}^{n+1} a_j z^{j-1}\right|^2 = u_n(t)$$

gilt, wobei

$$A = \frac{1}{2 \cdot \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2} \;\; \textit{und} \;\; a_k = \sin\frac{k\pi}{n+2}$$

sowie

$$z = \cos t + i \sin t = e^{it}$$

gesetzt wird.
Die Summe $A\left|\sum_{j=1}^{n+1} a_j z^{j-1}\right|^2$ ist offensichtlich positiv. Somit können wir die Nichtnegativität mit diesem Ansatz zeigen.

Zunächst wissen wir, dass wir für eine komplexe Zahl y die Beziehung $|y|^2 = y \cdot \bar{y}$ und für z zudem $\bar{z} = e^{-it}$ gilt. Wenden wir dies auf $A \left| \sum_{j=1}^{n+1} a_j z^{j-1} \right|^2$ an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
A \left| \sum_{j=1}^{n+1} a_j z^{j-1} \right|^2 &= A \sum_{j=1}^{n+1} a_j e^{it(j-1)} \cdot \sum_{j=1}^{n+1} a_j e^{-it(j-1)} \\
&= A \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 + A \left(e^{it} + e^{-it}\right) \sum_{j=1}^{n} a_j a_{j+1} + A \left(e^{2it} + e^{-2it}\right) \sum_{j=1}^{n-1} a_j a_{j+2} + \dots \\
&\quad + A \left(e^{nit} + e^{-nit}\right) a_1 a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu^{(n)} \cos(\nu t) ,
\end{aligned}$$

wobei wir für $\nu = 1, \dots, n+1$ die Terme $e^{\nu it} + e^{-\nu it}$ durch $\cos(\nu t)$ substituiert haben und

$$\zeta_\nu^{(n)} := \frac{\sum_{j=1}^{n+1-\nu} a_j a_{j+\nu}}{\sum_{j=1}^{n+1} a_j^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1-\nu} \sin \frac{k\pi}{n+2} \sin \frac{k+\nu\pi}{n+2}}{\sum_{j=1}^{n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{n+2}}$$

gesetzt haben.
Es ist uns also gelungen die Summe u_n' in die gewünschte Form zu bringen. Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass unser so gewähltes $\zeta_1^{(n)}$ gleich $\cos \frac{\pi}{n+2}$ ist.
Aus den Additionstheoremen folgt

$$\cos \frac{\pi}{n+2} \sin \frac{k\pi}{n+2} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{(k+1)\pi}{n+2} \sin \frac{(k-1)\pi}{n+2} \right) .$$

Nun Multiplizieren wir beide Seiten mit $\sin \frac{k\pi}{n+2}$ und erhalten die Gleichung

$$\cos \frac{\pi}{n+2} \sin^2 \frac{k\pi}{n+2} = \frac{1}{2} \sin \frac{(k-1)\pi}{n+2} \sin \frac{k\pi}{n+2} + \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{n+2} \sin \frac{(k+1)\pi}{n+2} .$$

Lassen wir den Index k von 1 bis $n+1$ laufen, gelangen wir durch Aufsummieren zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} \cos \frac{\pi}{n+2} \sin^2 \frac{k\pi}{n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\frac{1}{2} \sin \frac{(k-1)\pi}{n+2} \sin \frac{k\pi}{n+2} + \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{n+2} \sin \frac{(k+1)\pi}{n+2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sin \frac{0\pi}{n+2} \sin \frac{k\pi}{n+2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} \sin \frac{(k-1)\pi}{n+2} \sin \frac{k\pi}{n+2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n+2} \sin \frac{(k+1)\pi}{n+2} + \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{n+2} \sin \frac{(n+2)\pi}{n+2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} \sin \frac{(k-1)\pi}{n+2} \sin \frac{k\pi}{n+2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n+2} \sin \frac{(k+1)\pi}{n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n+2} \sin \frac{(k+1)\pi}{n+2} ,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt eine Indexverschiebung vorgenommen haben. Wenn wir nun noch durch

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{n+2}$$

teilen - dieser Term ist offensichtlich ungleich Null - kommen wir schließlich auf die Gleichung

$$\cos \frac{\pi}{n+2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n+2} \sin \frac{(k+1)\pi}{n+2}}{\sum_{k=1}^{n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{n+2}} = \zeta_1^{(n)} \; .$$

□

Die zweite Ungleichung von Jackson

Setzen wir jetzt noch eine weitere Bedingung an g, dann lässt sich der Satz 4 zur zweiten Ungleichung von Jackson verschärfen.

Satz 6. *(Jackson 1.2) Sei die 2π-periodische Funktion g Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstant M, so gilt*

$$E_n^T(g) \leq cMn^{-1} \; .$$

Beweis: Wegen der Lipschitzstetigkeit gilt die Beziehung

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) = \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq\frac{1}{n}}} |g(x)-g(y)| \leq \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq\frac{1}{n}}} (M\,|x-y|) = M \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq\frac{1}{n}}} |x-y| \leq Mn^{-1} \; . \tag{12}$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe der ersten Ungleichung von Jackson, die Behauptung sofort. □

Die dritte Ungleichung von Jackson

Der Satz 6 lässt sich, falls wir zusätzlich voraussetzen, dass die zu approximierende Funktion überall eine stetige Ableitung besitzt, wie folgt modifizieren.

Satz 7. *(Jackson 1.3) Besitzt die Lipschitzstetige 2π-periodische Funktion g überall eine stetige Ableitung g', dann gilt*

$$E_n^T(g) \leq c\widetilde{E}_n^T\left(g'\right) n^{-1}$$

wobei

$$\widetilde{E}_n^T(g) := \min_{\alpha_\nu,\beta_\nu} \max_{\varphi} \left| g(\varphi) - \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu \cos(\nu\varphi) + \beta_\nu \sin(\nu\varphi)\right) \right|$$

ist.

Beweis: Zunächst sei τ_n eine trigonometrische Summe der Ordnung n ohne konstantes Glied mit der Eigenschaft $\|g' - \tau_n\|_\infty = \widetilde{E}_n^T(g')$. Diese trigonometrische Summe existiert nach dem Fundamentalsatz der Approximationstheorie in linearen, normierten Räumen (vgl. [1, S. 9-11]).
Dann ist aber auch w mit

$$w(\varphi) := \int_0^\varphi \tau_n(t)dt$$

eine trigonometrische Summe der Ordnung n, da summandenweise integriert wird.
Weil τ_n kein konstantes Glied besitzt, gilt $w' = \tau_n$. Damit folgt auf Grund der Minimalität von E_n^T

$$E_n^T(g) = E_n^T(g - w) \leq cMn^{-1} ,$$

wobei

$$M = \left\|g' - w'\right\|_\infty = \left\|g' - \tau_n\right\|_\infty = \widetilde{E}_n^T\left(g'\right) ,$$

da M das Maximum der Ableitung von $g - w$ ist. Somit ist der Beweis erbracht. □

Die vierte Ungleichung von Jackson

Stellen wir an g bezüglich der Differenzierbarkeit nun noch schärfere Bedingungen, so erhält man den letzten Satz dieses Abschnitts.

Satz 8. *(Jackson 1.4) Die stetige, 2π-periodische Funktion g besitze stetige Ableitungen bis zur Ordnung k und die k-te Ableitung $g^{(k)}$ erfülle die Höldersche Bedingung*

$$\left|g^{(k)}(\varphi_1) - g^{(k)}(\varphi_2)\right| \leq M\left|\varphi_1 - \varphi_2\right|^\alpha ,$$

für alle φ_1, φ_2, M, $\alpha \in \mathbb{R}$, mit $M > 0$ und $0 < \alpha \leq 1$, dann gilt

$$E_n^T(g) \leq c^{k+1}Mn^{-k-\alpha} .$$

Beweis: Besitzt die Fourier-Entwicklung der Lipschitzstetigen, 2π-periodischen Funktion g kein konstantes Glied, sei also $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = 0$, so ist

$$E_n^T(g) = \widetilde{E}_n^T(g)$$

und wir können in Satz 6 $E_n^T(g)$ durch $\widetilde{E}_n^T(g)$ ersetzen. In diesem Fall besitzt $\sigma_n(g,\varphi)$ nämlich ebenfalls kein konstantes Glied. Die Fourier-Entwicklung von $g^{(j)}$ besitzt offensichtlich auch kein konstantes Glied und somit auch $\sigma_n(g^{(j)},\varphi)$ nicht, wobei $j \leq k$ ist. Somit kann auch in Satz 7 $E_n^T\left(g^{(j)}\right)$ durch $\widetilde{E}_n^T\left(g^{(j)}\right)$ ersetzt werden.
Als Nächstes werden wir zeigen, dass

$$E_n^T\left(g^{(k)}\right) \leq cMn^{-\alpha} \tag{13}$$

gilt. Dazu verwenden wir zunächst die erste Ungleichung von Jackson und danach die Höldersche Bedingung und erkennen

$$\begin{aligned}
E_n^T\left(g^{(k)}\right) &\leq c\omega_{g^{(k)}}\left(n^{-1}\right) = c \sup_{\substack{\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R}\\ |\varphi_1-\varphi_2|\leq n^{-1}}} |g(\varphi_1)-g(\varphi_2)| \\
&\leq c \sup_{\substack{\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R}\\ |\varphi_1-\varphi_2|\leq n^{-1}}} (M|\varphi_1-\varphi_2|^\alpha) = cM \sup_{\substack{\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R}\\ |\varphi_1-\varphi_2|\leq n^{-1}}} (|\varphi_1-\varphi_2|^\alpha) \leq cMn^{-\alpha}\ .
\end{aligned}$$

Per vollständiger Induktion über k wollen wir nun die Ungleichung

$$E_n^T(g) \leq c^k E_n^T\left(g^{(k)}\right) n^{-k} \tag{14}$$

beweisen. Der Fall $k=0$ stellt den Induktionsanfang dar, für welchen die Aussage

$$E_n^T(g) \leq c\widetilde{E}_n^T\left(g'\right) n^{-1} = c^1 E_n^T\left(g'\right) n^{-1}$$

nach der dritten Ungleichung von Jackson richtig ist. Sei $k=2$, so ist nach zweimaliger Anwendung der dritten Ungleichung von Jackson auch

$$E_n^T(g) \leq c\widetilde{E}_n^T\left(g'\right) n^{-1} = cn^{-1}E_n^T\left(g'\right) \leq cn^{-1}c\widetilde{E}_n^T\left(g''\right) n^{-1} = c^2 E_n^T\left(g'\right) n^{-2}$$

richtig.
Damit ist die Behauptung für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl gezeigt. Dies stellt unsere Induktionsvoraussetzung dar.
In dem Induktionsschritt von $k-1$ auf k sehen wir nach Induktionsvoraussetzung und einer erneuten Anwendung der dritten Ungleichung von Jackson

$$E_n^T(g) \leq c^{k-1}E_n^T\left(g^{(k-1)}\right) n^{-(k-1)} \leq c^{k-1}n^{-(k-1)}c\widetilde{E}_n^T\left(g^{(k)}\right) n = c^k E_n^T\left(g^{(k)}\right) n^{-k}\ .$$

Schätzen wir in der Ungleichung (14) $E_n^T\left(g^{(k)}\right)$ nun mit Hilfe der Abschätzung in (13) ab, so erhalten wir die Aussage, die zu zeigen war. □

2 Approximation stetiger Funktionen durch Polynome

2.1 Übergang von periodischen Funktionen zu beliebigen stetigen Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Ungleichungen von Jackson für Approximationen bezüglich der Tschebyscheff-Norm für stetige Funktionen durch Polynome herleiten und ihre Gültigkeit nachweisen. Dazu beschränken wir uns auf Funktionen, die auf dem Intervall $[-1,1]$ stetig sind. Dabei orientieren wir uns an der Darstellung von Korovkin [3, S. 30-34, S.81-86].
Zunächst wollen wir einige Eigenschaften von trigonometrischen Summen untersuchen, die es uns ermöglichen einen Zusammenhang zwischen ihnen und Polynomen herzustellen. Dabei werden uns die folgenden Lemmata behilflich sein.

Lemma 4. *Ist die trigonometrische Summe*

$$S(\varphi) := \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu \cos(\nu\varphi) + \beta_\nu \sin(\nu\varphi))$$

absolut konvergent, so ist

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\varphi) \sin(\nu\varphi) d\varphi \,.$$

Beweis: Multiplizieren wir S mit $\sin(\nu\varphi)$ und integrieren zwischen den Grenzen von $-\pi$ bis π, so können wir die Summe, nachdem sie absolut konvergiert, umordnen und beobachten

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} S(\varphi) \sin(\nu\varphi) d\varphi = \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu\varphi) d\varphi \\
&+ \sum_{k=1}^{\nu-1} \left(\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi) \sin(\nu\varphi) d\varphi + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi) \sin(\nu\varphi) d\varphi \right) \\
&+ \alpha_\nu \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu\varphi) \sin(\nu\varphi) d\varphi + \beta_\nu \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\nu\varphi) d\varphi \\
&+ \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \left(\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\varphi) \sin(\nu\varphi) d\varphi + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi) \sin(\nu\varphi) d\varphi \right) \\
&= 0 + 0 + 0 + \beta_\nu \pi + 0 \,.
\end{aligned}$$

Hier haben wir, zur Berechnung der Integrale, die Ergebnisse aus Satz 1 verwendet. Jetzt müssen wir nur noch durch π teilen, um das Lemma nachzuweisen. □

Lemma 5. *Ist die stetige Funktion h ungerade, gilt also $-h(t) = h(-t)$ für alle Werte t des Definitionsbereiches von h, so gilt*

$$\int_{-a}^{a} h(t) dt = 0 \,.$$

Beweis: Indem wir das Integral aufspalten erhalten wir

$$\int_{-a}^{a} h(t)dt = \int_{-a}^{0} h(t)dt + \int_{0}^{a} h(t)dt = I_1 + I_2 \ .$$

Substituieren wir in I_1 durch $s = \phi(t) := -t$ und damit $dt = \frac{ds}{\phi'} = -ds$, so gilt mit der Eigenschaft, dass h ungerade ist

$$I_1 = -\int_{a}^{0} h(-s)ds = \int_{0}^{a} h(-s)ds = -\int_{0}^{a} h(s)ds = -I_2 \ .$$

Damit ist $I_1 + I_2 = 0$. $\square$

Mit den beiden vorhergehenden Lemmas gelangen wir zu einem Korollar, das es uns erlaubt, besser mit gerade trigonometrische Summen umzugehen.

Korollar 1. *Sei die trigonometrische Summe*

$$S_n(\varphi) := \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \cos(\nu\varphi) + \beta_\nu \sin(\nu\varphi))$$

gerade, so ist $\beta_\nu = 0$ für alle $\nu \leq n$.

Beweis: Die Funktion

$$\varphi \mapsto S_n(\varphi) \sin(\nu\varphi)$$

ist für alle $\nu \leq n$ ungerade, da die Sinusfunktion ungerade ist. Somit folgt nach Lemma 4 und 5

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(\varphi) \sin(\nu\varphi) d\varphi = 0 \ .$$

$\square$

Das nächste Lemma und das darauf basierende Korollar dienen dazu, zu zeigen wie trigonometrische Summen und Polynome zusammenhängen.

Lemma 6. *Jede gerade trigonometrische Summe S_n von n-ter Ordnung kann durch ein Polynom P_n n-ten Grades ausgedrückt werden, indem man $P_n(\cos\varphi) = S_n(\varphi)$ setzt.*

Beweis: Nach Korollar 1 ist die Summe S_n, da sie gerade ist, von der Form

$$S_n(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \cos(\nu\varphi) \ .$$

Der Term $\cos(\nu\varphi)$ entspricht aber dem Tschebyscheff-Polynom erster Ordnung $T_n(\cos\varphi)$, welches den Grad n besitzt. Auf eine ausführliche Erläuterung der Tschebyscheff-Polynome wollen wir hier verzichten, es sei aber auf die Ausführungen in [2, S.30] verwiesen. Somit gilt

$$S_n(\varphi) = \sum_{\nu=0} \alpha_\nu T_n(\cos\varphi) \ .$$

Die Summe von Polynomen von höchstens n-ten Grades ist selbst ein Polynom von höchstens n-tem Grad. Deshalb lässt sich ein Polynom P_n mit

$$P_n(\cos\varphi) = S_n(\varphi)$$

finden. □

Korollar 2. *Ist S_n eine gerade trigonometrische Summe von Ordnung n, so ist $\varphi \mapsto S_n(\arccos\varphi)$ ein Polynom vom Grad n.*

Beweis: Nach Lemma 6 existiert ein Polynom P_n mit $S_n(\varphi) = P_n(\cos\varphi)$. Damit gilt

$$S_n(\arccos\varphi) = P_n(\cos\arccos\varphi) = P_n(\varphi)$$

für alle φ. □

Das letzte Lemma, welches wir vor der Behandlung der Ungleichungen von Jackson für Approximationen durch Polynome beweisen wollen, stellt eine Spezialisierung des Fundamentalsatzes der Approximationstheorie in linearen, normierten Räumen dar.

Lemma 7. *Für jede stetige, gerade und 2π-periodische Funktion g existiert eine gerade trigonometrische Summe τ_n von der Ordnung n, die bezüglich der Tschebyscheff-Norm am wenigsten von g abweicht. Die Summe τ_n erfüllt also die Eigenschaft*

$$E_n^T(g) = \|g - \tau_n\|_\infty \ .$$

Beweis: Wie wir bereits vorher schon gesehen haben, existiert nach dem Fundamentalsatz der Approximationstheorie in linearen, normierten Räumen eine trigonometrische Summe ϑ_n der Ordnung n, die unter allen trigonometrischen Summen der Ordnung n die Funktion g bezüglich der Tschebyscheff-Norm am besten approximiert (vgl. [1, S. 9-11]). Für eine solche Summe ϑ_n gilt also

$$E_n^T(g) = \|g - \vartheta_n\|_\infty \ .$$

Nun konstruieren wir eine gerade trigonometrische Summe der Ordnung n, indem wir

$$\tau_n(\varphi) := \frac{\vartheta_n(\varphi) + \vartheta_n(-\varphi)}{2}$$

setzen. Somit gilt auch

$$E_n^T(g) \le \|g - \tau_n\|_\infty = \max_{|\varphi|\le\pi} \left| g(\varphi) - \frac{\vartheta_n(\varphi) + \vartheta_n(-\varphi)}{2} \right| \ .$$

Da g gerade und 2π-periodisch ist, können wir φ durch $-\varphi$ ersetzen und erhalten

$$E_n^T(g) = \max_{|\varphi|\le\pi} |g(-\varphi) - \vartheta_n(-\varphi)| = \max_{|\varphi|\le\pi} |g(\varphi) - \vartheta_n(-\varphi)| \ .$$

Wenn wir diese Gleichung und die Dreiecksungleichung verwenden, erhalten wir die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
E_n^T(g) &\leq \max_{|\varphi|\leq\pi} \left| g(\varphi) - \frac{\vartheta_n(\varphi)+\vartheta_n(-\varphi)}{2} \right| \\
&= \frac{1}{2} \max_{|\varphi|\leq\pi} |g(\varphi) - \vartheta_n(\varphi) + g(\varphi) - \vartheta_n(-\varphi)| \\
&\leq \frac{1}{2} \max_{|\varphi|\leq\pi} |g(\varphi) - \vartheta_n(\varphi)| + \frac{1}{2} \max_{|\varphi|\leq\pi} |g(\varphi) - \vartheta_n(-\varphi)| \\
&= \frac{1}{2} E_n^T(g) + \frac{1}{2} E_n^T(g) = E_n^T(g) \ .
\end{aligned}$$

Somit ist τ_n die gesuchte trigonometrische Summe. □

2.2 Drei Ungleichungen von Jackson

Nach den bisherigen Überlegungen können wir uns nun den Ungleichungen von Jackson für Approximationen stetiger Funktionen durch Polynome widmen.

Satz 9. *(Jackson 2.1) Sei f eine im Intervall $[-1,1]$ stetige Funktion, so gilt*

$$E_n(f) \leq c\omega_f\left(n^{-1}\right) \ ,$$

wobei die Konstante c wie in Satz 4 durch $c := 1 + \cos\left(\frac{\pi^2}{2}\right)$ definiert ist.

Beweis: Zunächst erhalten wir, indem wir

$$g(\varphi) := f(cos(\varphi))$$

setzen, eine stetige, gerade und 2π-periodische Funktion, da die Cosinusfunktion diese Eigenschaften erfüllt. An dieser Stelle wird deutlich, weshalb wir uns zunächst intensiver mit geraden trigonometrische Summen beschäftigt haben, da wir die daraus gewonnenen Erkenntnisse auf g anwenden können.
So existiert nach Lemma 7 eine gerade trigonometrische Summe τ_n von Ordnung n, die bezüglich der Tschebyscheff-Norm am wenigsten von g abweicht.
Die Cosinusfunktion ist Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstante 1, da die Ableitung maximal den Wert 1 annehmen kann. Deshalb gilt zwischen den Stetigkeitsmoduln der Funktionen g und f der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
\omega_g(\delta) &= \sup_{\substack{\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq\omega}} |g(\varphi_1) - g(\varphi_2)| = \sup_{\substack{\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq\omega}} |f(\cos(\varphi_1)) - f(\cos(\varphi_2))| \\
&\leq \sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathbb{R} \\ |x_1-x_2|\leq\omega}} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega_f(\delta) \ .
\end{aligned}$$

Mit der ersten Ungleichung von Jackson gilt dann

$$\max_{|\varphi|\leq\pi} |g(\varphi) - \tau_n(\varphi)| = E_n^T(g) \leq c\omega_g\left(n^{-1}\right) \leq c\omega_f\left(n^{-1}\right) \ .$$

Ersetzen wir in dieser Ungleichung nun φ durch $\arccos x$, so gelangen wir zu

$$\begin{aligned}\max_{|\varphi|\leq\pi}|g(\varphi)-\tau_n(\varphi)| &= \max_{|x|\leq 1}|f(\cos\arccos x)-\tau_n(\arccos x)| \\ &= \max_{|x|\leq 1}|f(x)-\tau_n(\arccos x)| \leq c\omega_f\left(n^{-1}\right) .\end{aligned}$$

Nach Korollar 2 ist aber $x\mapsto\tau_n(\arccos x)$ ein Polynom vom Grad n. Damit ist

$$E_n(f)=\min_{\alpha_\nu,}\max_{x}\left|f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha_\nu x^\nu)\right|\leq\max_{|x|\leq 1}|f(x)-\tau_n(\arccos x)|\leq c\omega_f\left(n^{-1}\right)$$

und die Ungleichung aus Satz 9 gezeigt. □

Der Übergang zu mindestens einmal stetig differenzierbaren Funktionen gelingt durch den folgenden Satz.

Satz 10. *(Jackson 2.2) Ist die Funktion f im Intervall $[-1,1]$ einmal stetig differenzierbar mit der Ableitung f', so ist*

$$E_n(f)\leq cE_{n-1}\left(f'\right)n^{-1} ,$$

mit der Konstante c aus Satz 4.

Beweis: Dieser Beweis läuft ähnlich zu dem Beweis der dritten Ungleichung von Jackson. So wählen wir zunächst das Polynom P_{n-1} von höchstens $(n-1)$-tem Grad, welches die Eigenschaft $\|f'-P_{n-1}\|_\infty=E_{n-1}(f')$ erfüllt. Auch hier findet der Fundamentalsatz der Approximationstheorie in linearen, normierten Räumen Anwendung, denn nach diesem Satz findet sich unter allen Polynomen vom Grad n ein Polynom, das die Funktion f am besten approximiert (vgl. [1, S. 9-11]). Dann ist

$$Q_n(x):=\int_0^x P_{n-1}(t)dt$$

ein Polynom mit höchstens n-tem Grad, da summandenweise integriert wird. Zudem gilt $Q_n'=P_{n-1}$. Damit folgt auf Grund der Minimalität von E_n

$$E_n(f-Q_n)=E_n(f)\leq cMn^{-1} ,$$

wobei

$$M=\left\|f'-Q_n'\right\|_\infty=\left\|f'-P_{n-1}\right\|_\infty=E_{n-1}(f')$$

gesetzt werden kann, denn M ist das Maximum der Ableitung von $f-P_{n-1}$ und für den Stetigkeitsmodul von f gilt mit (8)

$$\omega_f\left(n^{-1}\right)\leq Mn^{-1} .$$

Die Beziehung aus (12) gilt auch für stetige, nicht periodische Funktionen, da die Periodizität bei der Herleitung dieser Beziehung nicht verwendet wurde. Die vorangegangene Annahme konnte damit also bewiesen werden. □

Stellen wir abschließend an eine stetige Funktion schärfere Bedingungen bezüglich ihrer Differenzierbarkeit, gelangen wir zum letzten Satz dieser Arbeit.

Satz 11. *(Jackson 2.3) Besitzt die auf dem Intervall $[-1,1]$ stetige Funktion f auf dem ganzen Intervall stetige Ableitungen bis zur k-ten Ordnung, wobei die k-te Ableitung die Hölderschen Bedingung*

$$\left|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)\right| \leq M|x-y|^{\alpha}$$

für alle x, y, M, $\alpha \in \mathbb{R}$, mit $M > 0$ und $0 < \alpha \leq 1$ erfüllen soll, dann gilt

$$E_n(f) \leq dc^{k+1} M n^{-k-\alpha} \ , \ n > k \geq 1 \ .$$

Wobei d eine beliebige reelle Zahl mit

$$d \geq \frac{n^{k+\alpha}}{\prod_{j=1}^{k}(n-j+1)(n-k)^{\alpha}}$$

sein soll und c wie in Satz 3 definiert ist.

Beweis: Diesen Satz wollen wir beweisen, indem wir zunächst die Gültigkeit der Abschätzung

$$E_n(f) \leq \frac{c^k}{\prod_{j=1}^{k}(n-j+1)} E_{n-k}\left(f^{(k)}\right) \ , \ n \geq k-1 \geq 0 \tag{15}$$

zeigen. Dies werden wir mittels vollständiger Induktion über k erreichen. Für den Induktionsanfang $k=1$ ist die Abschätzung nach Satz 10 offensichtlich richtig. Für $k=2$ liefert eine zweimalige Anwendung von Satz 10

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq cE_{n-1}\left(f'\right) n^{-1} \leq c\left(cE_{n-2}\left(f''\right)(n-1)^{-1}\right) n^{-1} \\ &= \frac{c^2}{\prod_{j=1}^{2}(n-j+1)} E_{n-2}\left(f^{(2)}\right) \ . \end{aligned}$$

Damit sei die Gültigkeit für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl gegeben. Dies stellt die Induktionsvoraussetzung dar. Im Induktionsschritt von $k-1$ auf k verwenden wir die Induktionsvoraussetzung und dann erneut den Satz 10

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \frac{c^{k-1}}{\prod_{j=1}^{k-1}(n-j+1)} E_{n-(k-1)}\left(f^{(k)}\right) \\ &\leq \frac{c^{k-1}}{\prod_{j=1}^{k-1}(n-j+1)} cE_{n-(k-1)-1}\left(f^{(k)}\right)(n-(k-1))^{-1} \\ &= \frac{c^{k-1}}{\prod_{j=1}^{k-1}(n-j+1)} cE_{n-k}\left(f^{(k)}\right)(n-k+1)^{-1} \\ &= \frac{c^k}{\prod_{j=1}^{k}(n-j+1)} E_{n-k}\left(f^{(k)}\right) \ . \end{aligned}$$

Als Nächstes werden wir zeigen, dass

$$E_{n-k}\left(f^{(k)}\right) \leq \frac{cM}{(n-k)^{\alpha}} \tag{16}$$

gilt. Dazu verwenden wir zuerst Satz 9 und danach die Höldersche Bedingung und gelangen auf diese Weise zu

$$\begin{aligned} E_{n-k}\left(f^{(k)}\right) &\leq c\omega_{f^{(k)}}\left(\frac{1}{n-k}\right) = c \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq\frac{1}{n-k}}} |f(x)-f(y)| \leq c \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq\frac{1}{n-k}}} (M|x-y|^{\alpha}) \\ &= cM \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ |x-y|\leq\frac{1}{n-k}}} (|x-y|^{\alpha}) \leq \frac{cM}{(n-k)^{\alpha}} . \end{aligned}$$

Setzen wir nun die Abschätzung (15) in die Ungleichung (16) ein, erhalten wir

$$E_n(f) \leq \frac{c^k}{\prod_{j=1}^{k}(n-j+1)} E_{n-k}\left(f^{(k)}\right) \leq \frac{c^{k+1} M n^{-k-\alpha} n^{k+\alpha}}{\prod_{j=1}^{k}(n-j+1)(n-k)^{\alpha}} \ , \ n > k \geq 0 .$$

Mit einer Substitution durch d, wie im Satz 11 definiert, erhalten wir die Abschätzung, welche wir zeigen wollten. □

Abschließend sehen wir also, dass es uns tatsächlich gelungen ist, für die zwei hier behandelten Arten von Tschebyscheff-Approximationen, den Approximationsfehler abzuschätzen. Zudem waren wir, je nachdem wie viele Voraussetzungen wir an die zu approximierende Funktion stellten, dazu in der Lage, die Abschätzung noch zu verfeinern.

Jetzt stellt sich noch die Frage, ob es möglich ist, durch einen anderen Operator als den Korovkinoperator, mit dem gleichen Ansatz eine bessere Abschätzung des Approximationsfehlers zu finden. Diese Frage kann an dieser Stelle nicht geklärt werden, allerdings wurde bereits erwähnt, dass wir mit der Wahl des Korovkinoperators eine feinere Abschätzung entwickeln konnten, als wenn wir den Operator von Jackson verwendet hätten. Mit dem Operator von Jackson hätten wir anstelle der Konstante c, aus Satz 4, nur einen etwas größeren Wert setzen können. So hat I. P. Natanson in [4, S. 78] den Wert gleich 12 gesetzt. Dieser Wert ist fast doppelt so groß, wie die Konstante c, die wir verwenden konnten.

Literaturverzeichnis

[1] Achieser, N. I. : Vorlesung über Approximationstheorie, Akademie-Verlag, 2. Auflage, Berlin, 1967

[2] Meinardus, G. : Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer-Verlag, Berlin, 1964

[3] Korovkin, P. P. : Linear Operators and Approximation, Hindustan Publishing Corp. (India), Delhi, 1960

[4] Natanson, I. P. : Konstruktive Funktionentheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1955