

Bachelorarbeit zum Thema
Fixpunktsatz von Brouwer

angefertigt im Rahmen des Seminars *Angewandte Analysis*,
betreut durch *Prof. Dr. E. Emmrich*,

vorgelegt von
Christian Hund
Weddigenstr. 6
33604 Bielefeld

E-Mail: christian.hund@uni-bielefeld.de

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Abgabedatum 22.07.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	5
1.1 Fixpunktsatz von Brouwer im Eindimensionalen	5
1.2 Allgemeiner Fixpunktsatz von Brouwer	6
2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes	7
2.1 Analytischer Beweis	7
2.1.1 Brouwerscher Fixpunktsatz für Kugeln	7
2.1.2 Lotoperator und Bestapproximation	14
2.1.3 Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes	16
2.2 Kombinatorischer Beweis	16
2.2.1 Simplex: Definition und Eigenschaften	17
2.2.2 Homeomorphie zwischen Simplexen und beliebigen Mengen	18
2.2.3 Lemma von Sperner	21
2.2.4 Lemma von Knaster, Kuratowski und Mazurkiewicz	22
2.2.5 Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer	23
3 Anwendungen des Brouwerschen Fixpunktsatzes	26
3.1 Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme	26
3.2 Beispiel eines nichtlinearen Gleichungssystems	27
4 Resumee und Ausblick	31
Literaturverzeichnis	32
Eigenständigkeitserklärung	33

1 Einleitung

Diese Bachelorarbeit ist im Rahmen meines Vortrages im Seminar „Angewandte Analysis“ bei Prof. Dr. E. Emmrich entstanden. In meinem Vortrag habe ich den Fixpunktsatz von Brouwer erläutert und einen analytischen Beweis skizziert.

Den Kern dieser Arbeit bilden zwei verschiedene Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Es werden ein analytischer und ein kombinatorischer Beweis vorgestellt. Abschließend werde ich ein Korollar über die Existenz einer Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme folgern und ein konkretes Beispiel als Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes diskutieren.

1.1 Fixpunktsatz von Brouwer im Eindimensionalen

Unter einem Fixpunkt einer Abbildung f versteht man einen Punkt x_0 , so dass gilt

$$f(x_0) = x_0.$$

Es sei eine stetige, reellwertige Selbstabbildung f , definiert auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, gegeben, d.h.

$$f: [a, b] \rightarrow [a, b].$$

Nachfolgend wollen wir zeigen, dass ein Fixpunkt von f existiert. Da f stetig ist, können wir durch

$$x \mapsto \varphi(x) := f(x) - x$$

eine weitere stetige Abbildung definieren. Es gilt offensichtlich

$$\varphi(a) = f(a) - a \geq 0 \text{ und } \varphi(b) = f(b) - b \leq 0,$$

da $f(a) \geq a$ und $f(b) \leq b$. Die Spezialfälle $\varphi(a) = 0$ bzw. $\varphi(b) = 0$ ergeben sich nur, wenn $f(a) = a$ bzw. $f(b) = b$ gilt. Das heißt also, dass entweder $x_0 = a$ bzw. $x_0 = b$ Fixpunkte von f sind oder $\varphi(a) > 0$ bzw. $\varphi(b) < 0$ gelten muss.

Aus Letzterem folgt nach dem Zwischenwertsatz mittels der Stetigkeit von φ , dass es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ geben muss, so dass $\varphi(x_0) = 0$. Daraus folgt dann $f(x_0) = x_0$ und somit, dass x_0 ein Fixpunkt von f ist.

Abbildung 1.1 veranschaulicht die Voraussetzungen für die Existenz eines Fixpunktes. Hier wird ein Fixpunkt interpretiert als Schnittpunkt von $y = f(x)$ mit der Geraden $y = x$. Die linke Abbildung zeigt, dass bei einer unstetigen Funktion kein Schnittpunkt existieren muss. Bei der

1 Einleitung

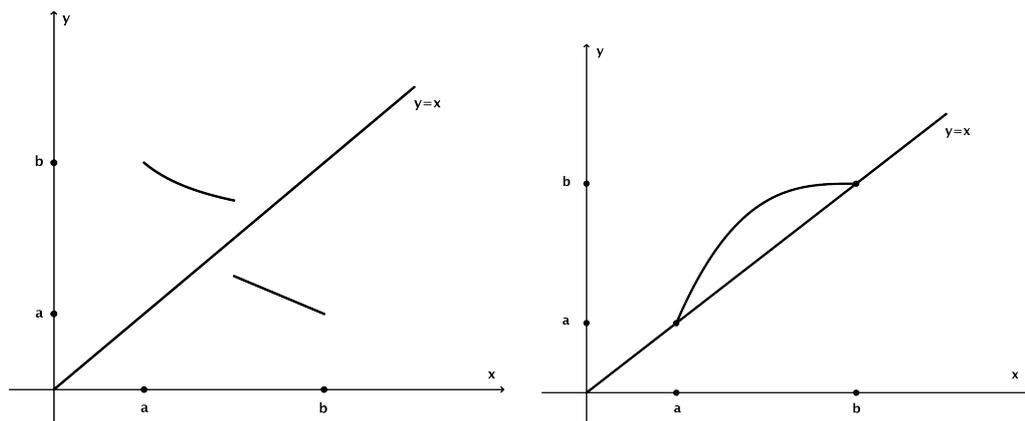


Abbildung 1.1: Veranschaulichung der Voraussetzungen für die Existenz eines Fixpunktes von f .

rechten Abbildung wurde eine Funktion so konstruiert, dass auf dem offenen Intervall (a, b) kein Schnittpunkt existiert. Erst durch Hinzunahme der Randpunkte des offenen Intervalls erhält man die Fixpunkteigenschaft von f .

1.2 Allgemeiner Fixpunktsatz von Brouwer

Die Bedingungen aus Kapitel 1.1 an die Funktion f können wir wie folgt auf den endlichdimensionalen Raum \mathbb{R}^n verallgemeinern (siehe dazu auch [6, Kap. 10] und [1, Kap. 11]).

Satz 1.1 (Fixpunktsatz von Brouwer). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe, abgeschlossene, beschränkte und nichtleere Teilmenge. Sei $f: M \rightarrow M$ stetig. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt.*

Im Vergleich zum Banachschen Fixpunktsatz wird beim Brouwerschen Fixpunktsatz auf die Existenz einer Kontraktion in den Voraussetzungen verzichtet. Dafür geht beim Brouwerschen Fixpunktsatz die Eindeutigkeit und das Iterationsverfahren zur Bestimmung des Fixpunktes verloren. Außerdem beschränkt sich der Brouwersche Fixpunktsatz auf endlichdimensionale Räume. Eine Verallgemeinerung auf unendlichdimensionale Räume stellt der Fixpunktsatz von Schauder dar (vergleiche [6, Kap. 11]).

2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Da der Satz von Brouwer eine wichtige Grundlage im Bereich der Fixpunktsätze darstellt, ist er auf unterschiedliche Weisen bewiesen worden. Hier werden zwei in der Literatur weit verbreitete Beweise geführt.

2.1 Analytischer Beweis

Zunächst werden wir einen rein analytischen Beweis führen. Dazu beweisen wir erst einen Spezialfall, der anschließend wiederum verallgemeinert wird.

2.1.1 Brouwerscher Fixpunktsatz für Kugeln

Satz 2.1. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Kugel und $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ eine stetige Abbildung, dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt.*

Der Beweis von Satz 2.1 ist recht lang, daher skizzieren wir zunächst die einzelnen Beweisschritte. Es soll ein Widerspruchsbeweis geführt werden. Wir nehmen also an, f sei stetig auf \mathcal{K} , besitze aber keinen Fixpunkt. Wir definieren eine geeignete Retraktion auf \mathcal{K} , die alle Elemente aus \mathcal{K} auf den Rand $\partial\mathcal{K}$ abbildet. Dabei ist der Begriff Retraktion in diesem Kontext wie folgt definiert:

Definition 2.2 (Retraktion). *Seien $Y \subset X$ Teilmengen des Raumes \mathbb{R}^n . Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **Retraktion** wenn f eingeschränkt auf Y die Identität ergibt.*

Die Abbildungsvorschrift für die Retraktion, die wir konstruieren werden, kann nur schwer explizit angegeben werden. Es reicht allerdings aus, die Abbildung nach dem Satz von Weierstraß (Beweis in [6, Kap. 6]) zu approximieren:

Satz 2.3 (Approximationssatz von Weierstraß). *Sei f eine stetige und reellwertige Funktion. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein Polynom p , so dass*

$$\|f - p\|_{\infty} < \varepsilon,$$

wobei $\|\cdot\|_{\infty}$ die Maximumsnorm bezeichnet.

Anschließend wird mittels der Approximation und einer weiteren Abbildung, eine Hilfsabbildung konstruiert, die im zweiten Teil des Beweises auf ihre Eigenschaften hin untersucht werden soll. Schlussendlich wird eine bijektive Abbildung konstruiert, um den folgenden Transformationssatz für Integrale verwenden zu können:

2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Satz 2.4 (Transformationsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig differenzierbar ist. Dann ist f auf $\Phi(\Omega)$ genau dann integrierbar, wenn $f(\Phi(x))|\det(D\Phi(x))|$ auf Ω integrierbar ist, wobei $\det(D\Phi(x))$ die Funktionaldeterminante von Φ bezeichnet. In diesem Fall gilt:

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y)dy = \int_{\Omega} f(\Phi(x))|\det(D\Phi(x))|dx$$

Spezialfall: Sei $f = 1$ auf $\Phi(\Omega)$. Dann gilt für das Volumen von $\Phi(\Omega)$

$$V_{\Phi(\Omega)} = \int_{\Omega} |\det(D\Phi(x))|dx.$$

Mittels dieser Substitutionsregel für den Spezialfall $f = 1$, wird die hergeleitete Hilfsabbildung als Koordinatentransformation verwendet, um über eine Volumenberechnung einen Widerspruch in sich zu erhalten.

Zusammengefasst werden die folgenden drei Schritte durchgeführt:

1. Konstruktion einer Hilfsabbildung h
2. Untersuchung der Eigenschaften von h
3. Betrachtung von h als Koordinatentransformation

Der nachfolgende Beweis stammt in Teilen aus [6, Kap. 10] und [1, Kap. 11].

Beweis. Erster Schritt: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man

$$\mathcal{K} = \bar{B}_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

annehmen, denn sollte \mathcal{K} nicht die Einheitskugel sein, so lässt sich eine Streckung und eine Verschiebung finden, so dass \mathcal{K} in die Einheitskugel abgebildet wird. Die Komposition der Streckung und Verschiebung mit f ist wieder stetig. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass im Raum \mathbb{R}^n alle Normen äquivalent sind und somit die Wahl der Norm zur Definition einer Kugel nicht entscheidend ist.

Im Folgenden wird ein indirekter Beweis geführt. Dazu sei angenommen, dass $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ eine stetige Abbildung ist, die keinen Fixpunkt besitzt. Es gelte also $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathcal{K}$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Strahl, der in $f(x)$ beginnt und durch den Punkt x geht. Dieser Strahl schneidet den Rand von \mathcal{K} in einem eindeutig bestimmten Punkt $r(x)$. Liegt der Punkt x in $\partial\mathcal{K}$, so gilt $r(x) = x$. Da f und somit auch der Strahl stetig von x abhängt, ist auch $x \mapsto r(x)$ stetig. Weiter ist $r : \mathcal{K} \rightarrow \partial\mathcal{K}$, $x \mapsto r(x)$ eine Retraktion.

Die Abbildung r kann für Punkte außerhalb der Einheitskugel durch

$$r(x) := \frac{x}{\|x\|}$$

stetig fortgesetzt werden. Nun definiert r eine stetige Abbildung von ganz \mathbb{R}^n in den Rand der Einheitskugel.

Jetzt soll der Satz von Weierstraß (Satz 2.3) angewendet werden. Demnach existiert in der abgeschlossenen Kugel um $x = 0$ mit dem Radius 2 ein Polynom p , so dass

$$\|r(x) - p(x)\| < 1$$

für alle x mit $\|x\| \leq 2$.

Nun können wir die Funktion r außerhalb der Kugel $\bar{B}_2(0)$ und die Approximation durch p innerhalb der Einheitskugel stetig differenzierbar zusammenfügen. Dazu suchen wir eine Hilfsfunktion $\lambda = \lambda(\tau)$, die folgende Eigenschaften erfüllen soll:

- λ sei reellwertig und stetig differenzierbar,
- $\lambda(\tau) = 0$ für $\tau < \frac{3}{2}$,
- λ sei monoton wachsend für $\frac{3}{2} \leq \tau \leq 2$,
- $\lambda(\tau) = 1$ für $\tau > 2$.

Für $\frac{3}{2} \leq \tau \leq 2$ soll λ durch ein Polynom \tilde{p} realisiert werden. Damit λ an den Stellen $\frac{3}{2}$ und 2 stetig differenzierbar ist, muss das gesuchte Polynom an diesen Stellen Extrempunkte haben. Als Ansatz wird ein Polynom dritten Grades gewählt, da dieses zwischen den Extrempunkten strenge Monotonie aufweist. Es ergibt sich in der allgemeinen Darstellung eines Polynoms und dessen Ableitung

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\tau) &= a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d \\ \frac{d}{d\tau}\tilde{p}(\tau) &= 3a\tau^2 + 2b\tau + c.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der gegebenen Informationen in diese beiden Gleichungen, erhalten wir das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}0 &= a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + b \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + c \cdot \frac{3}{2} + d \\ 1 &= a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \\ 0 &= 3a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2b \cdot \frac{3}{2} + c \\ 0 &= 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c.\end{aligned}$$

Löst man dieses Gleichungssystem so erhält man als Polynom

$$\tilde{p}(\tau) = -16\tau^3 + 84\tau^2 - 144\tau + 81.$$

Damit ergibt sich für die gesuchte Hilfsfunktion

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau < \frac{3}{2} \\ \tilde{p}(\tau) & \text{für } \frac{3}{2} \leq \tau \leq 2 \\ 1 & \text{für } \tau > 2. \end{cases}$$

2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Mittels der Abbildung λ können wir durch Übergang von τ zu $\|x\|$ eine Verkettung von $r(x)$ und $p(x)$ durch

$$q(x) := \lambda(\|x\|) r(x) + (1 - \lambda(\|x\|)) p(x) \quad (2.1)$$

definieren. Der Summand $r(x)$ tritt nur für $x > 0$ auf. Wir können daher $x = 0$ in der Definition von q zulassen, obgleich $r(0)$ nicht definiert ist. Da $p(x)$, $\lambda(\|x\|)$ und $r(x)$ für $x \neq 0$ stetig differenzierbar sind, ist q als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen wieder stetig differenzierbar.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass $\|q(x)\| \neq 0$ ist. Für $\|x\| \geq 2$ ist

$$q(x) = r(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

und damit auch

$$\|q(x)\| = \|r(x)\| = 1.$$

Betrachtet man den Fall $\|x\| < 2$, so ergibt sich aus Gleichung (2.1) mittels Nullergänzung

$$\begin{aligned} q(x) &= r(x) - (1 - \lambda(\|x\|)) r(x) + (1 - \lambda(\|x\|)) p(x) \\ &= r(x) - (1 - \lambda(\|x\|)) \cdot (r(x) - p(x)). \end{aligned}$$

Damit gilt für die Norm unter Berücksichtigung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|q(x)\| &= \|r(x) - (1 - \lambda(\|x\|)) \cdot (r(x) - p(x))\| \\ &\geq \|r(x)\| - \|(1 - \lambda(\|x\|)) \cdot (r(x) - p(x))\| \\ &= 1 - (1 - \lambda(\|x\|)) \cdot \|r(x) - p(x)\|. \end{aligned}$$

Für $\|x\| < 2$ ist $\|r(x) - p(x)\| < 1$ und $\|\lambda(\|x\|)\| < 1$, daraus folgt

$$\|q(x)\| > 1 - (1 - \lambda(\|x\|)) \cdot 1 = \|\lambda(\|x\|)\|$$

und damit

$$q(x) \neq 0.$$

Mittels $q(x)$ kann eine stetig differenzierbare Funktion g durch

$$x \mapsto g(x) := \frac{q(2x)}{\|q(2x)\|}$$

definiert werden. Offensichtlich gilt

$$\|g(x)\| = 1. \quad (2.2)$$

Für $x \in \partial\mathcal{K}$, also $\|x\| = 1$, gilt nach Gleichung (2.1)

$$q(2x) = r(2x) = \frac{2x}{\|2x\|} = \frac{2x}{2\|x\|} = x$$

und damit auch

$$g(x) = \frac{x}{\|x\|} = x.$$

Somit ist g eine Abbildung der Einheitskugel auf ihren Rand und zusätzlich eine Retraktion. Im Folgenden wird eine stetig differenzierbare Hilfsabbildung h_t , in Abhängigkeit eines festen Parameters $t \geq 0$, definiert durch

$$h_t(x) := x + t \cdot g(x), \quad (2.3)$$

verwendet.

Zweiter Schritt: Nachfolgend wird die Funktion h_t auf insgesamt fünf wichtige Eigenschaften hin untersucht.

1. Für x aus dem Inneren von \mathcal{K} folgt aus Gleichung (2.3) mittels Dreiecksungleichung

$$\|h_t(x)\| \leq \|x\| + t\|g(x)\| < 1 + t.$$

Damit ist h_t eine Abbildung von $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ in das Innere der Kugel $B_{1+t}(0)$.

2. Für $x \in \partial\mathcal{K}$ ergibt sich aus Gleichung (2.3)

$$h_t(x) = x + tx = (1 + t)x,$$

d.h. $h_t : \partial\mathcal{K} \rightarrow \partial B_{1+t}(0)$. Mit 1. folgt somit auch $h_t : \mathcal{K} \rightarrow \bar{B}_{1+t}(0)$.

3. Im Weiteren sei h_t als vektorwertige Funktion aufgefasst, so ist $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g = (g_1, \dots, g_n)$ und $h_t = (h_t^1, \dots, h_t^n)$. Damit lässt sich Gleichung (2.3) komponentenweise auffassen:

$$h_t^j(x) = x_j + t \cdot g_j(x) \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Für die Funktionaldeterminante ergibt sich

$$\det Dh_t(x) = \det \begin{pmatrix} 1 + t \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & t \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & t \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ t \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & 1 + t \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & t \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & t \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & 1 + t \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Da g stetig differenzierbar ist, existieren alle in der Funktionaldeterminante auftretenden Ableitungen und sind auf der Kugel \mathcal{K} beschränkt. Für $t = 0$ ergibt sich $Dh_0(x) = E_n$, also die Einheitsmatrix der Dimension n . Damit ist

$$\det (Dh_0(x) |_{t=0}) = \det E_n = 1,$$

d.h. also $\det Dh_t(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{K}$, somit existiert h_t^{-1} auf einer lokalen Umgebung. Sei nun y_0 ein Bildpunkt aus dem Inneren von h_t und x_0 das zugehörige Urbild, so dass $h_t(x_0) = y_0$. Damit folgt, dass alle y aus einer Umgebung um den festen Bildpunkt y_0 durch mindestens ein x aus einer Umgebung um x_0 durch die Abbildung h_t realisiert werden. Damit bildet das Innere von \mathcal{K} bei hinreichend kleinem t eine offene Punktmenge.

2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

4. Mit Hilfe von 2. und 3. wird nun die Surjektivität der Abbildung $h_t : \mathcal{K} \rightarrow \bar{B}_{1+t}(0)$ nachgewiesen. Nach 3. ist klar, dass $h_t : \mathcal{K} \rightarrow G$ eine surjektive Abbildung ist, wobei $G \subseteq \bar{B}_{1+t}(0)$ eine Teilmenge ist. Es sei angenommen, dass $G \subset \bar{B}_{1+t}(0)$ eine echte Teilmenge sei. Dann existiert ein Punkt $y^* \in \partial G$, mit $y^* \notin \partial \bar{B}_{1+t}(0)$. Wir wählen nun eine Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass $y_k \in G$ für alle k und $y_k \rightarrow y^*$ für $k \rightarrow \infty$. Die durch $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} := h_t^{-1}(y_k, t)$ definierte Folge liegt nach Definition von G wieder in \mathcal{K} . Jetzt wählen wir eine konvergente Teilfolge $x_{k_i} \rightarrow x^*$ für $i \rightarrow \infty$ aus der Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus. Auf Grund der Stetigkeit von h_t folgt $y^* = h_t(x^*)$. Da $y^* \in \bar{B}_{1+t}(0)$ folgt $x^* \notin \partial \mathcal{K}$, somit muss $x^* \in \mathcal{K}$ gelten. Nach 3. muss das Bild von h_t eine Umgebung des Punktes $y^* = h_t(x^*)$ enthalten, d.h. y^* ist ein innerer Punkt von G . Das ist ein Widerspruch zu den Annahmen über y^* . Damit ist $G = \bar{B}_{1+t}(0)$ und somit ist $h_t : \mathcal{K} \rightarrow \bar{B}_{1+t}(0)$ eine surjektive Abbildung.
5. Als letzte Eigenschaft der Hilfsabbildung soll Injektivität und mittels 4. als Folgerung Bijektivität gezeigt werden. Nehmen wir dazu zwei Punkte y und z aus \mathcal{K} , wobei $y \neq z$. Angenommen y und z haben das selbe Bild. Dann folgt

$$y + tg(y) = h_t(y) = h_t(z) = z + tg(z)$$

und mittels einfacher Äquivalenzumformungen

$$y - z = t(g(z) - g(y)).$$

Komponentenweise ergibt sich für diese Differenz

$$y_j - z_j = t(g_j(z) - g_j(y)) \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Nach dem Mittelwertstz der Differentialrechnung existiert auf der Verbindungsgeraden \overline{yz} mindestens ein Punkt ξ mit $\xi \neq y$ und $\xi \neq z$, so dass

$$g_j(z) - g_j(y) = \text{grad}(g_j(\xi)) \cdot (z - y).$$

Mit der Definition des Gradienten folgt

$$y_j - z_j = t \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\xi)(z_k - y_k).$$

Weiter wissen wir, dass die Ableitungen von g_j in \mathcal{K} beschränkt sind durch eine Konstante C . Damit ergibt sich mittels Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |y_j - z_j| &= \left| t \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\xi)(z_k - y_k) \right| \\ &\leq |t| \cdot \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\xi) \right| |z_k - y_k| \\ &\leq t \cdot \sum_{k=1}^n C |z_k - y_k| \\ &\leq tnC \|z - y\| = tnC \|y - z\|, \end{aligned}$$

wobei $|y_k - z_k| \leq \|y - z\|$ mit eingegangen ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|y - z\| &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k - z_k|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (tnC \|y - z\|)^2} \\ &= \sqrt{n \cdot (tnC \|y - z\|)^2} = tn\sqrt{n}C \|y - z\| \end{aligned}$$

als Abschätzung. Da diese für alle t gelten muss, folgt für $t = 0$

$$\|y - z\| = 0$$

und somit $y = z$. Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme. Somit ist h_t injektiv und unter Berücksichtigung von 4. somit auch bijektiv.

Dritter Schritt: Schlussendlich führen wir jetzt die Annahme, f habe keinen Fixpunkt unter Berücksichtigung der Eigenschaften 1. bis 5. zum Widerspruch. Dazu betrachten wir das Volumen der Kugel $\bar{B}_{1+t}(0)$ mittels mehrdimensionaler Integration

$$V_{B_{1+t}(0)} = \int_{B_{1+t}(0)} 1 \cdot dy = \pm \int_{\mathcal{K}} \det D(h_t(x)) dx,$$

wobei hier der Transformationssatz für Integrale benutzt wurde. Die Funktionaldeterminante ist nach Gleichung (2.4) ein Polynom vom Grad n in der Variablen t . Wendet man iterativ den Entwicklungssatz für Determinanten an, ergibt sich $\det D(g(x))$ als Führungskoeffizient des Polynoms. Es folgt

$$V_{B_{1+t}(0)} = \pm t^n \int_{\mathcal{K}} \det D(g(x)) dx \pm \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \quad (2.5)$$

mit Koeffizienten a_k für Terme der Ordnung $n - 1$ und kleiner. Die Form dieser Koeffizienten ist im Weiteren nicht von Bedeutung. Weiter gilt

$$V_{B_{1+t}(0)} = (1 + t)^n V_{\mathcal{K}} = t^n V_{\mathcal{K}} + \sum_{k=0}^{n-1} \bar{a}_k t^k. \quad (2.6)$$

Durch Koeffizientenvergleich von Gleichung (2.5) und (2.6), folgt

$$\pm \int_{\mathcal{K}} \det D(g(x)) dx = V_{\mathcal{K}}.$$

Einerseits ist $V_{\mathcal{K}} \neq 0$, andererseits folgt aus (2.2), dass g eine Abbildung des ganzen Raumes auf $\partial\mathcal{K}$ ist, d.h. g eine Retraktion ist. Daher muss

$$\det D(g(x)) = 0$$

2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

gelten, da g sonst nach dem Satz von der lokalen Umkehrbarkeit invertierbar (vgl. [3, S. 96]) auf einer offenen Umgebung des Raumes \mathbb{R}^n sein müsste. Dies liefert einen Widerspruch zu der Annahme, dass f keinen Fixpunkt besitzt. Die Abbildung f muss demnach mindestens einen Fixpunkt haben. \square

2.1.2 Lotoperator und Bestapproximation

Um den Brouwerschen Fixpunktsatz auf beliebige Teilmengen des \mathbb{R}^n zu übertragen wird ein Approximationssatz benötigt. Dazu werden zunächst folgende Definitionen eingeführt:

Definition 2.5. Sei $M \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge eines normierten Raumes X und x ein Punkt in X . Gibt es ein $y \in M$ mit

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| \text{ für alle } z \in M$$

bzw.

$$\|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|,$$

so nennt man y eine **Bestapproximation** des Punktes x in M . Besitzt jedes $x \in X$ genau eine Bestapproximation $y(x)$ in M , so ist die Abbildung

$$P_M : X \rightarrow M, x \mapsto y(x)$$

wohldefiniert und wird der **Lotoperator** von M genannt.

Im Allgemeinen müssen Bestapproximationen nicht immer vorhanden sein und falls sie existieren, so müssen sie keineswegs eindeutig sein. Die Existenz und Eindeutigkeit für den endlichdimensionalen Raum \mathbb{R}^n wird durch folgenden Approximationssatz gesichert.

Satz 2.6. Ist M eine konvexe, abgeschlossene und nichtleere Teilmenge des euklidisch normierten Raumes \mathbb{R}^n , so besitzt jedes $x \in \mathbb{R}^n$ genau eine Bestapproximation in M und der Lotoperator P_M ist stetig.

Der nachfolgende Beweis ist an [5, S. 602 f.] angelehnt.

Beweis. Im ersten Schritt soll die Existenz des Lotoperators nachgewiesen werden. Bemerke dazu zunächst die folgende Identität:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\gamma := \inf_{z \in M} \|x - z\|.$$

Dann existiert eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit $\|x - z_n\| \rightarrow \gamma$ für $n \rightarrow \infty$. Jede derartige Folge sei nachfolgend als **Minimalfolge** bezeichnet. Nun wird mit

$$u := x - z_m \quad \text{und} \quad v := x - z_n$$

die Identität (2.7) angewendet. Da

$$u + v = 2 \left(x - \frac{z_m + z_n}{2} \right) \quad \text{und} \quad u - v = z_n - z_m$$

gilt, folgt die Beziehung

$$4 \left\| x - \frac{z_m + z_n}{2} \right\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = 2 \|x - z_m\|^2 + 2 \|x - z_n\|^2,$$

woraus sich

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2 \|x - z_m\|^2 + 2 \|x - z_n\|^2 - 4 \left\| x - \frac{z_m + z_n}{2} \right\|^2 \quad (2.8)$$

ergibt. Da auf Grund der Konvexität von M die Verbindungsstrecke von zwei beliebigen Punkten aus M wieder in M liegt, liegt auch $\frac{(z_m + z_n)}{2}$ in M . Daher ergibt sich mit

$$\left\| x - \frac{z_m + z_n}{2} \right\| \geq \gamma$$

die Abschätzung

$$\|z_n - z_m\|^2 \leq 2 \|x - z_m\|^2 + 2 \|x - z_n\|^2 - 4\gamma^2$$

aus Gleichung (2.8). Für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$2 \|x - z_m\|^2 + 2 \|x - z_n\|^2 - 4\gamma^2 \rightarrow 0,$$

somit ist (z_n) und damit jede Minimalfolge eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R}^n und der Abgeschlossenheit von M folgt die Existenz des Grenzwertes $z_n \rightarrow y \in M$ für $n \rightarrow \infty$. Damit ist gezeigt, dass

$$\|x - z_n\| \rightarrow \gamma \quad \text{und} \quad \|x - z_n\| \rightarrow \|x - y\|$$

für $n \rightarrow \infty$. Daher ist $\|x - y\| = \gamma$ und somit y eine Bestapproximation des Punktes x in M .

Um die Eindeutigkeit der Bestapproximation zu zeigen, sei angenommen es existieren zwei Bestapproximationen y_1 und y_2 von x in M , wobei $y_1 \neq y_2$ vorausgesetzt sei. Dann ist die Folge $(y_1, y_2, y_1, y_2, \dots)$ eine Minimalfolge für x in M und somit auch eine Cauchyfolge. Dies liefert sofort einen Widerspruch, da $y_1 = y_2$ gelten müsste. Somit ist die Bestapproximation y eindeutig und die Existenz des Lotoperators P_M gezeigt.

Im zweiten Teil zeigen wir die Stetigkeit von P_M . Sei eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ gegeben. Wir wollen zeigen, dass für $n \rightarrow \infty$ aus $x_n \rightarrow x$ stets $P_M(x_n) \rightarrow P_M(x)$ folgt. Wegen der Definition der Konvergenz einer Folge existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für ein $\varepsilon > 0$ ein $n > n_0$ existiert mit $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Also gilt für n groß genug

$$\gamma_n := \inf_{z \in M} \|x_n - z\| \leq \inf_{z \in M} \|x - z\| + \|x_n - x\| < \gamma + \varepsilon,$$

2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

wobei $\gamma = \inf_{z \in M} \|x - z\|$ wie oben definiert ist. Weiter gilt für genügend große n

$$\gamma = \|x - y\| \leq \|x - P_M(x_n)\| \leq \|x - P_M(x_n)\| + \|x_n - x\| < \gamma_n + \varepsilon.$$

Daraus folgt offensichtlich

$$\gamma \leq \|x - P_M(x_n)\| < \gamma + 2\varepsilon \quad \text{für } n > n_0.$$

Damit ist

$$\|x - P_M(x_n)\| \rightarrow \gamma \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gezeigt, d.h. $(P_M(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Minimalfolge für x in M . Mit dem ersten Teil des Beweises muss diese Folge gegen die Bestapproximation $P_M(x)$ konvergieren, was die Stetigkeit gemäß des Folgenkriteriums impliziert. \square

2.1.3 Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Mit den Erkenntnissen über Bestapproximationen und den Lotoperator können wir nun Satz 2.1 benutzen um den Brouwerschen Fixpunktsatz in der allgemeinen Formulierung nach Satz 1.1 zu beweisen.

Der nachfolgende Beweis findet sich ebenfalls in [5, S. 603 f.].

Beweis. (Satz 1.1). Da M beschränkt und nichtleer ist, kann man ein $R > 0$ finden, so dass M ganz in der abgeschlossenen Kugel $\bar{B}_R(0)$ liegt. Nach Satz 2.6 besitzt jeder Punkt $x \in \bar{B}_R(0)$ genau eine Bestapproximation $P_M(x)$ in M . Weiter ist $x \mapsto P_M(x)$ stetig. Damit ist $f \circ P_M: \bar{B}_R(0) \rightarrow \bar{B}_R(0)$ und als Komposition stetiger Funktionen wiederum stetig. Nach Satz 2.1 existiert ein Fixpunkt dieser Abbildung, d.h es existiert ein

$$x_0 \in \bar{B}_R(0) \quad \text{mit} \quad (f \circ P_M)(x_0) = x_0.$$

Offensichtlich liegt $(f \circ P_M)(x_0) = f(P_M(x_0))$ wieder in M , also muss auch x_0 in M liegen. Da per Definition $P_M(x) = x$ für jedes $x \in M$ gilt, folgt somit $f(x_0) = x_0$. Damit ist x_0 ein Fixpunkt der Abbildung f . \square

2.2 Kombinatorischer Beweis

Die wesentliche Idee des zweiten Beweises des Brouwerschen Fixpunktsatzes ist es, dass man die Menge M , auf der die stetige Selbstabbildung f definiert ist, homeomorph auf einen so genannten Simplex abbilden kann.

Definition 2.7. Eine Abbildung heißt **Homeomorphismus**, wenn sie bijektiv und stetig ist und ihre Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Anschließend werden wir die Fixpunkteigenschaft von f , eingeschränkt auf einen Simplex, zeigen und so den Brouwerschen Fixpunktsatz beweisen.

In diesem Abschnitt wird zunächst der Begriff Simplex eingeführt und nachfolgend auf eine wichtige Eigenschaft untersucht. Im zweiten Schritt werden wir zeigen, dass man eine beliebige Menge M unter bestimmten Voraussetzungen auf die Einheitskugel und im Weiteren sogar auf einen Simplex homeomorph abbilden kann. Anschließend werden wir das Lemma von Sperner und das Lemma von Knaster, Kuratowski und Mazurkiewicz kennen lernen und mittels dieser Beiden den Fixpunktsatz von Brouwer beweisen.

Der gesamte Abschnitt ist angelehnt an [7, Kap. 1.13 f.].

2.2.1 Simplex: Definition und Eigenschaften

Definition 2.8. Sei X ein Vektorraum über \mathbb{R} . Die **konvexe Hülle** ist gegeben durch die Menge

$$\text{conv}X := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i : x_i \in X, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

Mittels der konvexen Hülle kann man den Begriff des Simplex definieren.

Definition 2.9. Sei $N \in \mathbb{N}$ und X ein Vektorraum über \mathbb{R} . Es seien $u_0, \dots, u_N \in X$ gegeben, so dass die Menge $\{u_1 - u_0, \dots, u_N - u_0\}$ linear unabhängig ist. Dann heißt die Menge

$$\mathcal{S} := \text{conv} \{u_0, \dots, u_N\}$$

N -Simplex oder Simplex und die u_0, \dots, u_N heißen **Ecken**.

Der folgende Satz fasst im Weiteren wichtige Eigenschaften eines Simplexes zusammen.

Satz 2.10. Ein N -Simplex ist konvex, abgeschlossen und beschränkt.

Beweis. Die Konvexität und Beschränktheit folgt unmittelbar aus der Definition des Simplexes. Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, benutzen wir eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{S} . Dann ist

$$v_n = \sum_{j=0}^N \alpha_j^n u_j,$$

wobei das n als ein weiterer Index zu verstehen ist. Weiter ist

$$0 \leq \alpha_j^n \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^N \alpha_j^n = 1 \quad \text{für alle } j, n \in \mathbb{N}.$$

Da \mathcal{S} beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(\alpha_j^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, so dass

$$\alpha_j^{n_k} \rightarrow \alpha_j \quad \text{für } k \rightarrow \infty \quad \text{und alle } j = 1, \dots, N.$$

2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Daher gilt

$$0 \leq \alpha_j \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^N \alpha_j = 1 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, N.$$

Mit $v := \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$ erhält man $v \in S$ und $v_{n_k} \rightarrow v$ für $k \rightarrow \infty$. Damit ist S abgeschlossen. \square

2.2.2 Homeomorphie zwischen Simplexen und beliebigen Mengen

Eine wichtige Vorbereitung für den Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes, ist zu zeigen, unter welchen Voraussetzungen eine beliebige Menge auf einen Simplex homeomorph abgebildet werden kann. Dazu zeigen wir zunächst folgendes Lemma.

Lemma 2.11. *Sei M eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe, nichtleere Teilmenge eines normierten Vektorraumes X , so dass M einen inneren Punkt besitzt. Dann ist M homeomorph zu der abgeschlossenen Einheitskugel $\bar{B}_1(0) := \{u \in X : \|u\| \leq 1\}$.*

Dieses Lemma werden wir in drei Schritten beweisen. Im ersten Schritt werden wir den Minkowski-Operator und dessen Eigenschaften kennenlernen. Im zweiten Schritt werden wir einen Homeomorphismus mittels des Minkowski-Operators konstruieren und anschließend im dritten Schritt zeigen, dass der konstruierte Homeomorphismus die Behauptung aus Lemma 2.11 erfüllt.

Beweis. Angenommen $X = \{0\}$, dann ist auch $M = \{0\}$ und die Behauptung ist gezeigt.

Sei nun $X \neq \{0\}$ und sei u_0 ein innerer Punkt von M . Ohne Einschränkungen kann man $u_0 = 0$ annehmen, denn sonst kann man alle $u \in X$ homeomorph um u_0 verschieben.

Erster Schritt: Für alle $u \in X$ definieren wir das Minkowski Funktional auf der Menge M durch

$$p(u) := \inf \{ \lambda : \lambda^{-1}u \in M, \lambda > 0 \}.$$

Dies definiert einen Strahl, der im Ursprung beginnt und durch den Punkt u geht. Dieser Strahl schneidet den Rand ∂M von M im Punkt $p(u)^{-1}u$. Im Weiteren sollen folgende Behauptungen gezeigt werden:

1. $a\|u\| \leq p(u) \leq b\|u\|$ für alle $u \in X$ und feste $a, b > 0$.
2. $p(\alpha u) = \alpha p(u)$ für alle $\alpha \geq 0$.
3. $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ für alle $u, v \in X$
4. $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
5. $M = \{u \in X : p(u) \leq 1\}$.

Zu 1. Da $0 \in \overset{\circ}{M}$, existiert ein $r > 0$, so dass $\|u\| \leq r$ und somit $u \in M$ folgt. Offensichtlich gilt $p(0) = 0$. Nun wählen wir ein $u \in X$ mit $u \neq 0$. Dann können wir $\lambda := r^{-1}\|u\|$ definieren. Damit ist $r = \|\lambda^{-1}u\|$ und somit auch $\lambda^{-1}u \in M$. Daraus folgt

$$p(u) \leq r^{-1}\|u\| \quad \text{für alle } u \in X.$$

Da M beschränkt ist, gilt

$$\|u\| \leq R \quad \text{für alle } u \in M \text{ und } R > 0.$$

Falls $\lambda^{-1}u \in M$, so gilt auch $\|\lambda^{-1}u\| \leq R$ und somit $\lambda \geq R^{-1}\|u\|$. Das impliziert

$$p(u) \geq R^{-1}\|u\| \quad \text{für alle } u \in X.$$

Mit $a = R^{-1}$ und $b = r^{-1}$ folgt die Behauptung 1.

Zu 2. Die Behauptung ist klar für $\lambda = 0$.

Sei $\alpha > 0$. Dann ist $\lambda^{-1}u \in M$ mit $\lambda > 0$ genau dann, wenn $(\alpha\lambda)^{-1}\alpha u \in M$, da

$$\lambda^{-1}u = \lambda^{-1}(\alpha^{-1}\alpha)u = (\alpha\lambda)^{-1}\alpha u.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p(u) &= \inf \{ \lambda : \lambda^{-1}u \in M \} \\ &= \inf \{ \lambda : (\alpha\lambda)^{-1}(\alpha u) \in M \} \\ &= \frac{1}{\alpha} \inf \{ \lambda : \lambda^{-1}(\alpha u) \in M \} \\ &= \frac{1}{\alpha} p(\alpha u). \end{aligned}$$

Zu 3. Seien $u, v \in X$. Für ein festes $\varepsilon > 0$ wählen wir feste $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$p(u) < \alpha < p(u) + \varepsilon \quad \text{und} \quad p(v) < \beta < p(v) + \varepsilon.$$

Dann ist auch $\alpha^{-1}u, \beta^{-1}v \in M$. Sei $\gamma := \alpha + \beta$. Da $\gamma^{-1}\alpha + \gamma^{-1}\beta = 1$ und M konvex ist, muss der Punkt

$$\gamma^{-1}(u + v) = \gamma^{-1}\alpha(\alpha^{-1}u) + \gamma^{-1}\beta(\beta^{-1}v)$$

auch in M liegen. Mit der Definition des Minkowski-Operators folgt

$$p(u + v) \leq \gamma = \alpha + \beta < p(u) + p(v) + 2\varepsilon.$$

Behauptung 3 folgt direkt für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Zu 4. Nach Behauptung 3 gilt

$$p(u) = p(v + (u - v)) \leq p(v) + p(u - v).$$

Benutzt man Behauptung 1, so folgt

$$\begin{aligned} |p(u) - p(v)| &\leq \max \{ p(u - v), p(v - u) \} \\ &\leq b \|u - v\| \quad \text{für alle } u, v \in X, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Daher ist p (Lipschitz-)stetig in X .

2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Zu 5. Sei $u \in M$. Da $0 \in M$ und die Menge M konvex ist, erhält man $\mu u \in M$ für alle μ mit $0 \leq \mu \leq 1$. Also ist $\lambda^{-1}u \in M$ für alle $\lambda \geq 1$. Dann ist auch $p(u) \leq 1$.

Um die Umkehrung zu zeigen, nehmen wir $p(u) \leq 1$ an. Falls $u = 0$ ist, gilt auch $u \in M$. Betrachte nun $u \neq 0$. Dann folgt aus der ersten Behauptung $p(u) > 0$ und

$$\lambda^{-1}u \in M \quad \text{für alle } \lambda \geq p(u) + \varepsilon.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$, folgt $p(u)^{-1}u \in M$, da M abgeschlossen ist. Da $0 \in M$ und $p(u)^{-1} \geq 1$, folgt mit der Konvexität von M auch $u \in M$.

Zweiter Schritt: Sei

$$A(u) := \begin{cases} \frac{p(u)}{\|u\|}u & \text{für } u \in X, u \neq 0 \\ 0 & \text{für } u = 0. \end{cases}$$

Mit der Behauptung 1 folgt

$$\|A(u)\| \leq b\|u\| \quad \text{für alle } u \in X.$$

Weiter zeigen wir nun, dass $A : X \rightarrow X$ stetig ist. Sei dazu eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$u_n \rightarrow u \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gegeben. Falls $u = 0$ ist, folgt $\|A(u_n)\| \leq b\|0\|$ und damit $A(u_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Falls $u \neq 0$, folgt wegen der Stetigkeit von p und der Norm mit $\|u\| \neq 0$, dass $A(u_n) \rightarrow A(u)$ für $n \rightarrow \infty$. Damit ist A eine stetige Abbildung. Für $v := p(u)\|u\|^{-1}u$ mit $u \neq 0$ gilt, ist die Umkehrabbildung von A gegeben durch

$$A^{-1}(v) := \begin{cases} \frac{\|v\|}{p(v)}v & \text{für } v \in X, v \neq 0 \\ 0 & \text{für } v = 0. \end{cases}$$

Mit gleicher Argumentation wie oben, ist $A^{-1} : X \rightarrow X$ stetig. Damit ist $A : X \rightarrow X$ ein Homeomorphismus.

Dritter Schritt: Offensichtlich gilt $A(M) \subseteq \bar{B}_1(0)$ und $A^{-1}(\bar{B}_1(0)) \subseteq M$ und damit auch $A(M) = \bar{B}_1(0)$. Durch $A : M \rightarrow \bar{B}_1(0)$ ist ein konkreter Homeomorphismus konstruiert und das Lemma somit bewiesen. \square

Satz 2.12. *Es sei M eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe und nichtleere Teilmenge eines endlichdimensionalen, normierten Vektorraumes X . Dann ist M homeomorph zu einem N -Simplex \mathcal{S} in X mit $N \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Angenommen M bestehe aus einem Punkt, dann ist die Aussage klar für $N = 0$.

Nehmen wir nun an, M bestehe aus mindestens zwei Punkten. Dann ist $N \geq 1$. Da $\dim X < \infty$ ist, gibt es eine Menge $u_0, \dots, u_N \in M$, so dass $u_1 - u_0, \dots, u_N - u_0$ linear unabhängig sind für ein $N \in \mathbb{N}$. Nun kann man auf M eine Verschiebung anwenden, so dass $u_0 = 0$ ist. Setze

$$L := \text{lin} \{u_1, \dots, u_N\} \quad \text{und} \quad \mathcal{S} := \text{conv} \{u_1, \dots, u_N\},$$

wobei $\text{lin}\{u_1, \dots, u_N\}$ die lineare Hülle von $\{u_1, \dots, u_N\}$ bezeichnet. Da N maximal ist, folgt $M \subseteq L$ und wegen der Konvexität von M folgt $\mathcal{S} \subseteq M$. Da \mathcal{S} im normierten Raum L einen inneren Punkt besitzt, hat auch M einen inneren Punkt in L . Nach Lemma 2.11 auf den normierten Raum L angewandt, ist M homeomorph zu $\bar{B}_1(0)$. Außerdem ist nach Lemma 2.11 auch \mathcal{S} homeomorph zu $\bar{B}_1(0)$, da \mathcal{S} nach Satz 2.10 abgeschlossen, beschränkt und konvex ist. Es existieren also zwei Homeomorphismen

$$A : M \rightarrow \bar{B}_1(0) \quad \text{und} \quad C : \mathcal{S} \rightarrow \bar{B}_1(0).$$

Dann ist durch die Abbildung

$$C^{-1} \circ A : M \rightarrow \mathcal{S}$$

ein konkreter Homeomorphismus von M in \mathcal{S} konstruiert und der Satz somit bewiesen. \square

2.2.3 Lemma von Sperner

Es sei ein Simplex

$$\mathcal{S} = \text{conv}\{u_0, \dots, u_N\}$$

mit $N \in \mathbb{N}$ gegeben.

Definition 2.13. Eine endliche Folge

$$\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_J, \quad J \in \mathbb{N}$$

von Simplexen heißt **Triangulation** von \mathcal{S} , falls

$$\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^J \mathcal{S}_j$$

und falls der Durchschnitt $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k$ für $j \neq k$, $k \in \mathbb{N}$, entweder leer ist oder eine gemeinsame Fläche mit Dimension kleiner oder gleich $N - 1$ bildet.

Im Folgenden werden wir das Lemma von Sperner kennenlernen. Dem Lemma geht die Idee voraus, die Ecken eines Simplexes mit verschiedenen natürlichen Zahlen zu nummerieren. Bevor wir das Lemma von Sperner formulieren, führen wir noch folgende Definition ein.

Definition 2.14. Ein Simplex heißt genau dann **Sperner-Simplex**, wenn alle seine Ecken mit verschiedenen Zahlen beschriftet sind.

Lemma 2.15 (Lemma von Sperner). Es sei jede Ecke v des Simplexes \mathcal{S}_j mit den Zahlen $0, 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$ beschriftet. Weiter sei angenommen, dass

$$v \in \text{conv}\{u_{i_0}, \dots, u_{i_k}\}, \quad k = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

und v mit einer Zahl i_0, \dots, i_k beschriftet sei.

Dann ist die Anzahl der Sperner-Simplexe in \mathcal{S} ungerade.

2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Beweis. Im Folgenden bezeichnen wir eine $(N - 1)$ -Fläche als ausgezeichnet genau dann, wenn sie die Zahlen $0, 1, \dots, N - 1$ enthält. Es gibt genau zwei Möglichkeiten:

- (a) Entweder hat \mathcal{S}_j genau eine ausgezeichnete $(N - 1)$ -Fläche (beispielsweise wenn \mathcal{S}_j ein Sperner-Simplex ist),
- (b) oder \mathcal{S}_j hat genau zwei oder keine ausgezeichnete $(N - 1)$ -Fläche (beispielsweise wenn \mathcal{S}_j kein Sperner-Simplex ist).

Wir führen im Folgenden einen Induktionsbeweis durch.

Betrachte zunächst den Fall $N = 1$ als Induktionsanfang. Dann sind die Ecken von \mathcal{S} mit 0 und 1 nummeriert. Weiter ist $v \in \text{conv}\{u_0, u_1\}$ mit 0 oder 1 nummeriert. Eine 0-Fläche heißt ausgezeichnet, wenn es die 0 enthält. In diesem Fall entspricht eine 0-Fläche einer Ecke. Es kann nur eine 0-Fläche auftreten. Folglich ist die Anzahl der Sperner-Simplexe ungerade.

Wir betrachten nun den Fall $N = 2$. Die Ecken von \mathcal{S} sind mit den Zahlen 0, 1 und 2 nummeriert. Dann ist \mathcal{S}_j ein 2-Simplex. Eine 1-Fläche von \mathcal{S}_j heißt ausgezeichnet genau dann, wenn es die Zahlen 0, 1 enthält. Die ausgezeichneten 1-Flächen treten zweimal im Inneren auf. Nach Voraussetzung sind die ausgezeichneten 1-Flächen, die im Rand liegen, Teilmengen von $\text{conv}\{u_0, u_1\}$. Mit dem Induktionsanfang folgt sofort, dass die Anzahl der ausgezeichneten 1-Flächen in $\text{conv}\{u_0, u_1\}$ ungerade ist. Damit ist auch die gesamte Anzahl an ausgezeichneten 1-Flächen ungerade und damit ist auch die Anzahl an Sperner-Simplexen ungerade.

Wir nehmen nun an, die Behauptung sei für $N - 1$ erfüllt. Der Fall N folgt analog zu $N = 2$. \square

2.2.4 Lemma von Knaster, Kuratowski und Mazurkiewicz

Lemma 2.16. Sei $\mathcal{S} := \text{conv}\{u_0, \dots, u_N\}$ ein N -Simplex mit $N \in \mathbb{N}$ in einem endlich dimensionalen, normierten Raum X . Weiter seien abgeschlossene Mengen $C_0, \dots, C_N \subset X$ gegeben, so dass

$$\text{conv}\{u_{i_0}, \dots, u_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{m=0}^k C_{i_m}$$

für alle möglichen Systeme von Indizes $\{i_0, \dots, i_k\}$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann existiert ein Punkt $v \in \mathcal{S}$, so dass $v \in C_j$ für alle $j = 0, \dots, N$.

Der Beweis dieses Lemmas benutzt im Wesentlichen das Lemma von Sperner. Zunächst brauchen wir allerdings noch die Definition des Durchmessers einer Menge.

Definition 2.17. Sei M eine nichtleere Teilmenge eines normierten Raumes X . Dann ist der **Durchmesser** definiert durch

$$\text{diam}M := \sup_{u, v \in M} \|u - v\|.$$

Beweis. (Lemma 2.16) Für den Fall $N = 0$ ist die Aussage klar, da \mathcal{S} in diesem Fall nur aus einem Punkt besteht.

Sei nun $N \geq 1$. Wir betrachten zunächst eine Triangulierung $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_J$ von \mathcal{S} . Sei v eine Ecke von \mathcal{S}_j mit $j \in \{1, \dots, J\}$, $J \in \mathbb{N}$, wobei

$$v \in \text{conv} \{u_{i_0}, \dots, u_{i_k}\} \quad \text{für ein } k \in \{0, \dots, N\}.$$

Nach Voraussetzung existiert eine Menge C_k , so dass $v \in C_k$. Nun kann man die Ecke v mit k nummerieren. Aus dem Lemma von Sperner folgt, dass ein Sperner Simplex existiert, dessen Ecken mit $0, \dots, N$ durchnummeriert sind. Folglich erfüllen die Ecken v_0, \dots, v_N von \mathcal{S}_j die Bedingung

$$v_k \in C_k \quad \text{für alle } k \in \{0, \dots, N\}.$$

Nun betrachten wir eine Folge von Triangulierungen des Simplexes \mathcal{S} , so dass der Durchmesser der Simplexe der Triangulierung gegen Null geht. Wie oben existieren Punkte

$$v_k^n \in C_k \quad \text{für alle } k \in \{0, \dots, N\} \text{ und } n \in \mathbb{N},$$

so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam conv} \{v_0^n, \dots, v_N^n\} = 0. \tag{2.9}$$

Da \mathcal{S} abgeschlossen und beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $(v_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass

$$v_1^n \rightarrow v \quad \text{für } n \rightarrow \infty \text{ und } v \in \mathcal{S}.$$

Nach (2.9) gilt auch

$$v_k^n \rightarrow v \quad \text{für } n \rightarrow \infty \text{ für alle } k \in \{0, \dots, N\}.$$

Da die Menge C_k abgeschlossen ist, folgt

$$v \in C_k \quad \text{für alle } k \in \{0, \dots, N\}.$$

□

2.2.5 Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer

Nun haben wir alle nötigen Erkenntnisse gewonnen, um den Fixpunktsatz von Brouwer mit Hilfe der Simplexe zu beweisen.

Beweis. (Satz 1.1). Wir wissen bereits, dass M nach Satz 2.12 homeomorph zu einem Simplex S ist. Es reicht daher zu zeigen, dass f als stetige Selbstabbildung definiert auf einem N -Simplex S , mit $N \in \mathbb{N}$, in einem endlichdimensionalen, normierten Vektorraum, einen Fixpunkt besitzt.

Falls $N = 0$ ist, besteht S aus einem einzigen Punkt und die Behauptung ist klar.

2 Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Sei nun $N \geq 1$. Dann ist \mathcal{S} gegeben durch $\text{conv} \{u_0, \dots, u_N\}$. Nach der Definition der konvexen Hülle lässt sich jeder Punkt in \mathcal{S} darstellen durch

$$u = \sum_{j=0}^N \alpha_j(u) u_j,$$

wobei

$$\sum_{j=0}^N \alpha_j(u) = 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

Mit

$$\begin{aligned} u - u_0 &= \sum_{j=0}^N \alpha_j(u) u_j - \sum_{j=0}^N \alpha_j(u) u_0 \\ &= \sum_{j=0}^N \alpha_j(u) (u_j - u_0) \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j(u) (u_j - u_0) \end{aligned}$$

und $\alpha_0(u) = 1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j(u)$, folgt aus der linearen Unabhängigkeit von $u_1 - u_0, \dots, u_N - u_0$, dass die Koordinaten $\alpha_0(u), \dots, \alpha_N(u)$ eindeutig durch u bestimmt sind und stetig von u abhängen.

Wir definieren nun

$$C_j := \{u \in \mathcal{S} : \alpha_j(f(u)) \leq \alpha_j(u)\}, \quad j = 0, \dots, N$$

und zeigen, dass durch diese Definition die Voraussetzungen für das Lemma von Knaster, Kuratowski und Mazurkiewicz erfüllt sind. Die Menge C_j ist abgeschlossen, da $0 \leq \alpha_j \leq 1$ und weiter $\alpha_j(\cdot)$ und f stetig auf \mathcal{S} sind. Dass

$$\text{conv} \{u_{i_0}, \dots, u_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{m=0}^k C_{i_m}, \quad \text{für } k \in \{0, \dots, N\}$$

erfüllt ist, zeigen wir durch einen Widerspruch. Denn wäre dies nicht so, würde ein Punkt $u \in \text{conv} \{u_{i_0}, \dots, u_{i_k}\}$ existieren, so dass $u \notin \bigcup_{m=0}^k C_{i_m}$ und damit insbesondere

$$\alpha_{i_m}(f(u)) > \alpha_{i_m}(u) \quad \text{für alle } m \in \{0, \dots, k\} \text{ und ein } k \in \{0, \dots, N\}.$$

Dies stellt einen Widerspruch zu (2.10) dar, denn für eine geeignete Nummerierung der Ecken von \mathcal{S} erhält man

$$\alpha_j(f(u)) > \alpha_j(u) \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, k\} \text{ und ein } k \in \{0, \dots, N\}.$$

Mit (2.10) erhält man

$$1 = \sum_{j=0}^N \alpha_j(u) < \sum_{j=0}^N \alpha_j(f(u)) = 1$$

und damit einen Widerspruch in sich. Damit sind alle Voraussetzungen für Lemma 2.16 erfüllt.

Wir erhalten also die Existenz eines Punktes $v \in \mathcal{S}$, so dass

$$v \in C_j \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, k\}.$$

Damit gilt auch

$$\alpha_j(f(v)) \leq \alpha_j(v) \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, k\}$$

und somit

$$1 = \sum_{j=0}^N \alpha_j(f(v)) \leq \sum_{j=0}^N \alpha_j(v) = 1.$$

Es ergibt sich $\alpha_j(f(v)) = \alpha_j(v)$ für $j \in \{1, \dots, N\}$ und damit $f(v) = v$, v ist also ein Fixpunkt von f . \square

3 Anwendungen des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Eine besonders interessante Anwendung ist die Existenzaussage über eine Lösung eines Gleichungssystems. Da insbesondere nichtlineare Gleichungssysteme häufig nicht analytisch lösbar sind, ist es von Bedeutung zu wissen, dass eine Lösung existiert.

Wir werden zunächst ein Korollar aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz folgern und anschließend ein nichtlineares Gleichungssystem betrachten, dessen Gleichungen durch Polynome in zwei Variablen gegeben sind.

3.1 Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme

Mittels des Satzes von Brouwer (Satz 1.1) bzw. mit dem Spezialfall in Satz 2.1 lässt sich eine Aussage über die Existenz einer Lösung für nichtlineare Gleichungssysteme treffen. Das nachfolgende Korollar stammt aus [2, Lemma 4.2.1].

Korollar 3.1. Sei $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf der abgeschlossenen Kugel

$$\bar{B}_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$$

für ein $R > 0$ stetig. Gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = R$

$$h(x) \cdot x := \sum_{j=1}^n h_j(x)x_j \geq 0,$$

so gibt es ein $\hat{x} \in \bar{B}_R(0)$ mit $h(\hat{x}) = 0$.

Beweis. Wir führen einen indirekten Beweis. Sei dazu angenommen, für alle $x \in \bar{B}_R(0)$ gelte $h(x) \neq 0$. Dann wird durch die Abbildung g mit

$$g(x) := -R \frac{h(x)}{\|h(x)\|}$$

eine wohldefinierte und stetige Abbildung auf $\bar{B}_R(0)$ definiert. Nach dem Satz von Brouwer existiert mindestens ein $x^* \in \bar{B}_R(0)$ mit $g(x^*) = x^*$. Wegen $\|g(x)\| = R$ bildet g die Kugel $\bar{B}_R(0)$ auf ihren Rand ab. Demnach liegt der Fixpunkt x^* der Abbildung g im Rand von $\bar{B}_R(0)$ und es folgt $\|x^*\| = R > 0$. Damit gilt für x^* nach Voraussetzung

$$0 < x^* \cdot x^* = g(x^*) \cdot x^* = -R \frac{h(x^*)}{\|h(x^*)\|} \cdot x^* \leq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch in sich. Daher muss die Annahme falsch sein. □

3.2 Beispiel eines nichtlinearen Gleichungssystems

Betrachten wir nun ein nichtlineares Gleichungssystem, bestehend aus zwei Gleichungen, die jeweils durch Polynome in zwei Variablen gegeben sind.

Es sei also ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} x_1^i x_2^j &= 0 \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} x_1^i x_2^j &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

gegeben, wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zwei gesuchte Variablen sind. Die gegebenen Koeffizienten a_{ij} und b_{ij} seien ebenfalls reell, wobei wir annehmen, dass $a_{10} \neq 0$ und $b_{01} \neq 0$ ist.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit führen wir eine neue Notation ein. Wir notieren

$$\sum_{(i,j)}^* := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m.$$

In dieser Notation kann man das Gleichungssystem (3.1) in der Form

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)}^* a_{ij} x_1^i x_2^j &= 0 \\ \sum_{(i,j)}^* b_{ij} x_1^i x_2^j &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

schreiben. Das Gleichungssystem (3.2) lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} a_{10}x_1 + \sum_{(i,j) \neq (1,0)}^* a_{ij} x_1^i x_2^j &= 0 \\ b_{01}x_2 + \sum_{(i,j) \neq (0,1)}^* b_{ij} x_1^i x_2^j &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

woraus sich durch Äquivalenzumformung

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{a_{10}} \sum_{(i,j) \neq (1,0)}^* a_{ij} x_1^i x_2^j \\ x_2 &= -\frac{1}{b_{01}} \sum_{(i,j) \neq (0,1)}^* b_{ij} x_1^i x_2^j \end{aligned} \quad (3.4)$$

ergibt. Im Sinne des Brouwerschen Fixpunktsatzes lässt sich das Gleichungssystem (3.4) auffassen als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x = f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_{10}} \sum_{(i,j) \neq (1,0)}^* a_{ij} x_1^i x_2^j \\ -\frac{1}{b_{01}} \sum_{(i,j) \neq (0,1)}^* b_{ij} x_1^i x_2^j \end{pmatrix}.$$

3 Anwendungen des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Damit hat das Gleichungssystem (3.2) mindestens eine Lösung, wenn die Abbildung f einen Fixpunkt hat. Der Satz von Brouwer liefert eine Aussage für die Existenz einer Lösung, falls x aus einer konvexen, abgeschlossenen und beschränkten, nichtleeren Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ stammt und $f: M \rightarrow M$ stetig ist.

Die Stetigkeit der Funktion f ist offensichtlich, da die Einträge von f Polynome in zwei Variablen sind und damit ihrerseits stetig sind.

Falls es zwei Zahlen $r_1, r_2 > 0$ gibt, so dass

$$\frac{1}{|a_{10}|} \sum_{(i,j) \neq (1,0)}^* |a_{10}| r_1^i r_2^j \leq r_1$$

und

$$\frac{1}{|b_{01}|} \sum_{(i,j) \neq (0,1)}^* |b_{ij}| r_1^i r_2^j \leq r_2$$

gilt, bildet f das abgeschlossene Rechteck

$$M = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq r_1 \text{ und } |x_2| \leq r_2\}$$

in sich selbst ab. Damit ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (3.2) gegeben. Zur Herleitung dieser Bedingung siehe auch [6, S. 110].

Im Allgemeinen muss der Spezialfall $a_{10} \neq 0$ bzw. $b_{01} \neq 0$ nicht gelten. Damit wird die obige Herleitung wesentlich komplizierter. Eine allgemeine Formulierung des soeben gewonnenen hinreichenden Kriteriums ist somit nicht möglich. Das nachfolgende Beispiel verdeutlicht jedoch den praktischen Nutzen der obigen Rechnung.

Beispiel. Im Folgenden betrachten wir ein konkretes nichtlineares Gleichungssystem. Es sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1^2 - x_2^2 - 8x_1 &= 0 \\ x_1^2 + x_1x_2 - 4x_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Dann folgt durch Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{8}x_2^2 \\ x_2 &= \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich das Gleichungssystem schreiben in der Form

$$x = f(x).$$

3.2 Beispiel eines nichtlinearen Gleichungssystems

Nun ist eine geeignete Menge M zu wählen, so dass $f: M \rightarrow M$. Wir wollen nun zeigen, dass man M als Einheitskugel bezüglich der Supremumsnorm wählen kann, d.h

$$M = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq 1 \text{ und } |x_2| \leq 1\}.$$

Sei also $(x_1, x_2) \in M$, dann gilt

$$\left| \frac{1}{4} \right| |x_1|^2 + \left| -\frac{1}{8} \right| |x_2|^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \leq 1$$

und

$$\left| \frac{1}{4} \right| |x_1|^2 + \left| \frac{1}{4} \right| |x_1| \cdot |x_2| + \left| \frac{1}{4} \right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \leq 1.$$

Damit liegt das Bild $f(M)$ wieder in M .

Mit dem Computerprogramm *Mathematica* kann man zeigen, dass das Gleichungssystem näherungsweise gelöst wird durch

$$\begin{aligned} x_1 &\approx -0,007768 \\ x_2 &\approx 0,24953, \end{aligned}$$

wobei man das angewandte iterative Verfahren (*Newton-Verfahren*) auf M beschränken kann.

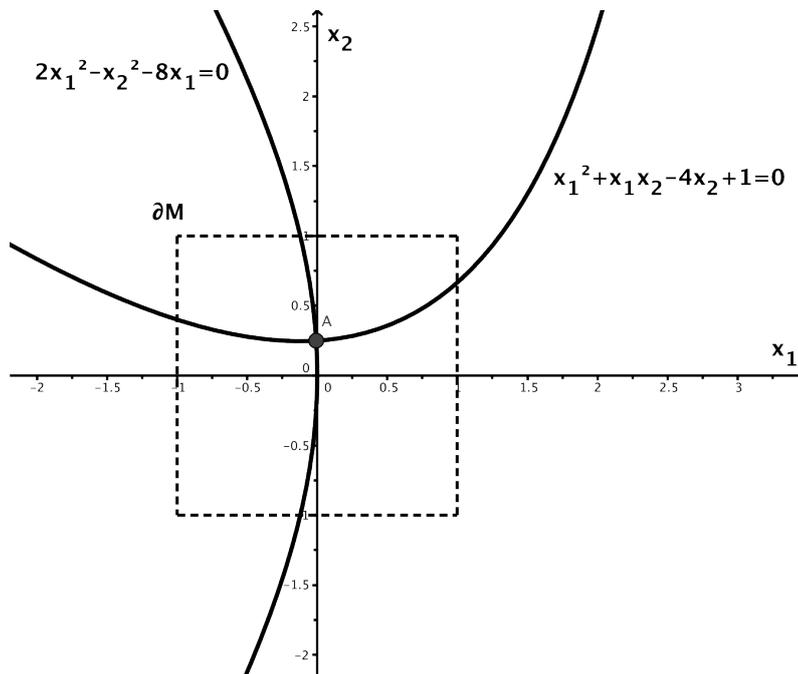


Abbildung 3.1: Plot der Gleichungen mit eingezeichnetem Rand der Menge M .

3 Anwendungen des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Abbildung 3.1 stellt die beiden Gleichungen graphisch dar. Die Lösung des Gleichungssystems wird hier als Schnittpunkt der beiden Graphen interpretiert. Man kann erkennen, dass ein Schnittpunkt innerhalb der Menge M existiert.

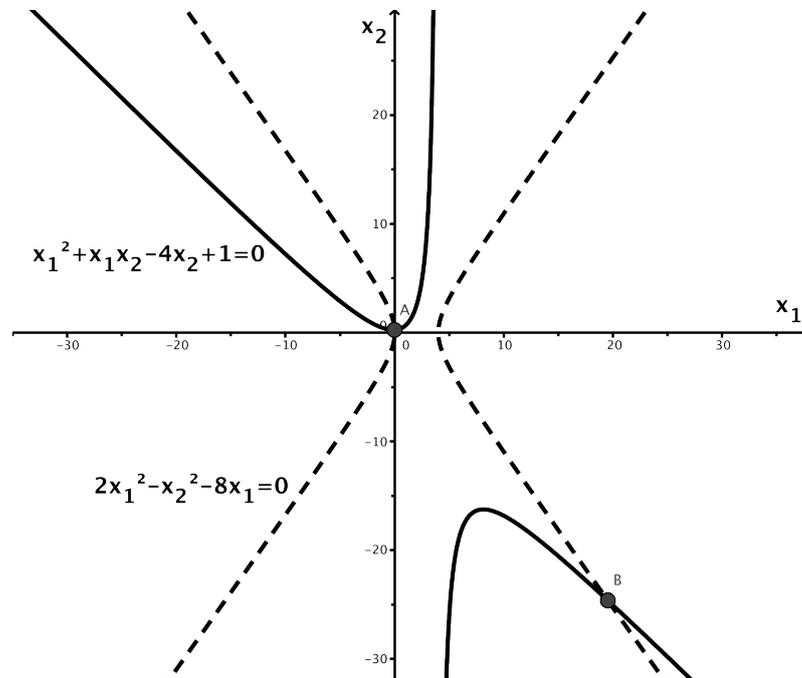


Abbildung 3.2: Plot der beiden Gleichungen in einem größeren Bereich. Um die beiden Graphen besser unterscheiden zu können, wurde hier der zu $2x_1^2 - x_2^2 - 8x_1 = 0$ gehörige Graph gestrichelt.

Abbildung 3.2 zeigt die Graphen der beiden Gleichungen in einem verkleinerten Maßstab. Es wird deutlich, dass noch ein zweiter Schnittpunkt existiert.

4 Resumee und Ausblick

In dieser Ausarbeitung haben wir zwei verschiedene Beweise zum Brouwerschen Fixpunktsatz kennengelernt. Praktische Anwendung findet der Brouwersche Fixpunktsatz bei der Untersuchung von Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme.

Eine weitere, hier nicht diskutierte Anwendung stammt aus der Wirtschaftsmathematik, konkreter dem Marginalsummenverfahren. Siehe dazu [4, Kap. 6.4]. In der linearen Algebra stellt der Satz von Frobenius und Perron eine wichtige Anwendung dar (vgl. [1, Satz 11.9]). Dieser liefert eine Existenzaussage über positive Eigenwerte und Eigenvektoren von nichtnegativen Matrizen.

In der Literatur wird der Brouwersche Fixpunktsatz häufig herangezogen, um den Schauderschen Fixpunktsatz zu beweisen. Dadurch erhält man eine Aussage über die Fixpunkteigenschaft von stetigen Funktionen auf kompakten, konvexen und nichtleeren Teilmengen eines Banach-Raumes (vgl. [6, Kap. 11]). Der Schaudersche Fixpunktsatz kann wiederum als Hilfsmittel zum Beweis von wichtigen Existenzsätzen in der Theorie von Operator- und Differentialgleichungen verwendet werden, z.B. den Satz von Scorza Dragoni.

Literaturverzeichnis

- [1] Jürgen Appell and Martin Väth. *Elemente der Funktionalanalysis, Vektorräume, Operatoren und Fixpunktsätze*. Vieweg, Wiesbaden, 2005.
- [2] Etienne Emmrich. *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg, Wiesbaden, 2004.
- [3] Otto Forster. *Analysis 2*. Vieweg, Wiesbaden, 2006.
- [4] Alfred Göpfert. *Angewandte Funktionalanalysis*. Vieweg, Wiesbaden, 2009.
- [5] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis Teil 2*. Studium. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.
- [6] Josef Naas and Wolfgang Tutschke. *Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik*. Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2009.
- [7] Eberhard Zeidler. *Applied Functional Analysis*. Springer, New York, 1999.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Christian Hund, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen angefertigt habe.

Bielefeld, den _____
Christian Hund