Eine Einführung in das Navier-Stokes-Problem

Hausarbeit zum Seminar Differentialgleichungen bei

Prof. Dr. P. Wittbold

betreut von

Dr. Etienne Emmrich

vorgelegt von

Dario Götz

goetz@math.tu-berlin.de

Wintersemester 2006/2007

TU Berlin, Institut für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Das mathematische Modell

Beim Navier-Stokes-Problem geht es um die mathematische Beschreibung der Bewegung zäher, in unserem Fall inkompressibler Flüssigkeiten. In diesem Abschnitt werden wir uns mit der physikalischen Herleitung dieser Gleichung befassen. Dieser Abschnitt ist in Anlehnung an [1] verfasst.

Dazu betrachten wir zunächst zwei verschiedene Darstellungen des Geschwindigkeitsvektors u.

1.1 Die Eulerschen und Lagrangeschen Koordinaten

Seien dazu $\underline{x} = (x_1, ..., x_d)$ die Orts-Koordinaten in einem festen, kartesischen System und t die Zeit. Wir betrachten den Geschwindigkeitsvektor $\underline{u} = (u_1, ..., u_d)$.

Verstehen wir $\underline{u}$ nun als Funktion, die einem Partikel im Ort $\underline{x}$ und zur Zeit t seine Geschwindigkeit $\underline{u}$ zuordnet, so sprechen wir von *Eulerschen Koordinaten*. Wir schreiben

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t) \ .$$

Man kann jedoch auch ein festes Flüssigkeitselement (hier ist nicht ein einziges Molekül, sondern ein im Vergleich zum Volumen des betrachteten Körpers kleines, jedoch im Vergleich zu zwischenmolekularen Abständen großes Volumenelement gemeint) betrachten, welches sich zur Zeit $t = 0$ im Ort $\underline{X_0}$ befand. Dieses wird nun verfolgt, sodass es sich zum Zeitpunkt t im Ort

$$\underline{X} = \underline{X}(t) = \Phi(\underline{X_0}, t)$$

befindet. In diesem Zusammenhang spricht man von *Lagrangeschen Koordinaten.*

Für den Geschwindigkeitsvektor erhalten wir dann

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \frac{d}{dt}\Phi(\underline{X_0}, t) = \frac{d}{dt}\underline{X}(t)$$

Wir nehmen an, dass Φ invertierbar ist, d. h. zwei am Anfang unterschiedliche Teilchen bleiben unterscheidbar.

Die Substantielle Ableitung. Für eine skalare Funktion f, die von Ort und Zeit in Eulerschen Koordinaten abhängt, konstruieren wir für ein gegebenes $\underline{X_0}$ in Lagrangeschen Koordinaten die zugehörige Funktion $\tilde{f}$. Es gilt dann

$$\tilde{f}(t) = f(\underline{X}(t), t) = f(\Phi(\underline{X_0}, t), t)$$

Nun wollen wir die Ableitung dieser Funktion $\tilde{f}$ betrachten. Wir erhalten mit der Kettenregel

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}\big(\Phi(\underline{X_0}, t), t\big) = Df(\underline{x}, t) \cdot \begin{pmatrix} \Phi'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \nabla f \cdot \underline{u}(\underline{X}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{x}, t)$$

und somit

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{x}, t) + (\underline{u} \cdot \nabla) f \ .$$

Diesen Zusammenhang von Eulerschen und Lagrangeschen Koordinaten nennt man die *substantielle Ableitung.*

1.2 Die Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung geht aus dem Gesetz der Massenerhaltung hervor. Sie führt in unserem Falle inkompressibler Fluide zu einer Bedingung, die wir an das gesuchte Geschwindigkeitsvektorfeld stellen werden.

Sei V ein Kontrollvolumen einer Flüssigkeitsmenge mit der Dichte $\varrho = \varrho(\underline{x}, t)$. Die Masse erhalten wir nun durch Integration

$$m(t) = \int_V \varrho \, dV \ .$$

Durch ein infinitesimales Oberflächenelement $\underline{dA}$ fließt pro Zeiteinheit die Fluidmenge $\varrho \, \underline{u} \, \underline{dA}$. Der Betrag des Vektors $\underline{dA}$ ist daher gleich der Fläche des Elements und $\underline{dA}$ zeigt in Richtung der äußeren Normalen. Man kann also auch schreiben

$$\varrho \, \underline{u} \, d\underline{A} = \varrho \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, dA \ .$$

mit der äußeren Normalen $\underline{n}$.

Nun gilt nach dem Gesetz der Massenerhaltung, dass die über die Oberfläche von V austretende Masse gleich der gesamten Massenänderung in dem Volumen ist

$$\frac{d}{dt} m(t) = \frac{d}{dt} \int_V \varrho \, dV = \int_V \frac{d}{dt} \varrho dV = - \int_{\partial V} \varrho \, \underline{u} \cdot \underline{n} \, dA \ .$$

Mit dem Satz von Gauß erhalten wir dann

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, dV + \int_V \mathrm{div}(\varrho \underline{u}) \, dV = 0 \ .$$

Falls ϱ hinreichend glatt ist (z.B. sei die Ableitung bzgl. t beschränkt) erhalten wir mit dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz

$$\int_V \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}(\varrho \underline{u}) \right) dV = 0 \ .$$

Da dieser Zusammenhang für beliebige Kontrollvolumina V gilt, muss der Integrand gleich Null sein. Es ergibt sich die sogenannte *konservative* oder *Erhaltungsform der Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}(\varrho \underline{u}) = 0 \ .$$

Unter Verwendung der substantiellen Ableitung und der Kettenregel folgt in Lagrangeschen Koordinaten:

$$\left(\frac{d\varrho}{dt} - (\underline{u} \cdot \nabla) \varrho \right) + \mathrm{div}(\varrho \underline{u}) = \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \ \mathrm{div} \, \underline{u} = 0$$

Wir wollen speziell die inkompressiblen Fluide näher untersuchen, also jene, für die $\varrho(\underline{x}, t) = const$ gilt.

Hier ist zu beachten, dass manche Autoren unter inkompressiblen Fluiden solche verstehen, die nur konstant in der Zeit sind, also $\varrho(\underline{x}, t) = \varrho(\underline{x})$. Wir müssten also dann noch zusätzlich die Homogenität fordern. Es muss nun also folgende Bedingung gelten:

$$\mathrm{div} \, \underline{u} = 0$$

Ein Vektorfeld $\underline{u}$ mit div $\underline{u} = 0$ nennt man *solenoidal.*

1.3 Die Bewegungsgleichung

Wir gehen von einem Flüssigkeitselement mit infinitesimal kleinem Volumen dV, der Masse dm und der Oberfläche dA aus, das sich mit dem Fluid mitbewegt. Die Newtonsche Bewegungsgleichung ist also dargestellt bezüglich Lagrange-Koordinaten.

Die Resultierende aller auf das Fluidelement wirkenden Kräfte ist gleich der totalen zeitlichen Änderung des Impulses; im nicht-relativistischen Fall gleich dem Produkt aus seiner Masse und der totalen Änderung der Geschwindigkeit,

$$d\underline{F} = dm\,\frac{d\underline{u}}{dt} = \varrho\,dV\,\frac{d\underline{u}}{dt}\ .$$

Die substantielle Ableitung liefert komponentenweise

$$dF_i = \varrho\,dV\,\frac{du_i}{dt} = \varrho\,dV\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)u_i\right)$$

beziehungsweise

$$\frac{dF_i}{dV} = \varrho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)u_i\right) \tag{1}$$

Ist die Dichte $\varrho \neq 0$ konstant, so können wir auf beiden Seiten durch diese teilen und erhalten unsere gewünschte Form. Im allgemeinen Fall kann man diese Gleichung noch etwas umformen. Für den ersten Term bekommen wir dann mit der Produktregel

$$\varrho\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial t} - u_i\frac{\partial \varrho}{\partial t}\ . \tag{2}$$

Betrachten wir nun den zweiten Term.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\varrho u_i\underline{u}) &= \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial(\varrho u_i u_j)}{\partial x_j} \\
&= \sum_{j=1}^{d}\left(\varrho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i\frac{\partial(\varrho u_j)}{\partial x_j}\right) \\
&= \varrho\sum_{j=1}^{d}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial(\varrho u_j)}{\partial x_j} = \varrho(\underline{u}\cdot\nabla)u_i + u_i\operatorname{div}(\varrho\underline{u})\ , \quad (3)
\end{aligned}$$

also

$$\varrho(\underline{u}\cdot\nabla)u_i = \operatorname{div}(\varrho u_i\underline{u}) - u_i\operatorname{div}(\varrho\underline{u})\ . \tag{4}$$

Setzen wir nun (2) und (4) in (1) ein, so erhalten wir

$$\frac{dF_i}{dV} = \varrho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)u_i\right) = \frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial t} - u_i\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho u_i\underline{u}) - u_i\operatorname{div}(\varrho\underline{u})\ . \tag{5}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung wissen wir, dass $\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\operatorname{div}(\varrho\underline{u}) = 0$. Damit verkürzt sich (5) zu

$$\frac{dF_i}{dV} = \varrho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)u_i\right) = \frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho u_i\underline{u})\ .$$

Wir führen jetzt die spezifische Kraft, also die Kraft je Masse ein,

$$\underline{f} = \frac{d\underline{F}}{dm} \ .$$

Dann ist

$$\frac{dF_i}{dV} = f_i \frac{dm}{dV} = \varrho f_i = \frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho u_i \underline{u})$$

Wir möchten hier noch einmal bemerken, dass diese Differentialgleichung nicht nur für inkompressible Fluide gilt.

Für inkompressible Fluide ist $\varrho = const$ und $\operatorname{div} \underline{u} = 0$. Wir erhalten mit (3)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) u_i = f_i \ .$$

Dies ist die Grundlage für unsere Navier-Stokes-Gleichung.

Kräfte Nun stellt sich die Frage, wie sich $\underline{f}$ zusammensetzt. Wir unterscheiden dazu

- spezifische *äußere Kräfte* $\underline{f}^a$, wie Gravitationsfelder oder elektromagnetische Felder;
- die spezifische *Druckkraft* $\underline{f}^p$, die auf die Oberfläche des Fluidelements wirkt;
- *innere Kräfte* $\underline{f}^i$ aus dissipativen Erscheinungen, wie Wärmeleitung, innere Reibung oder Zähigkeit.

Die Druckkraft Sei $p = p(\underline{x}, t)$ der Druck. Die Kraft, die von außen auf ein beliebiges Volumen V mit Oberfläche ∂V wirkt, ist gegeben durch $-\int_{\partial V} p\underline{n}\, dA$. Mit dem Satz von Gauß gilt

$$-\int_{\partial V} p\underline{n}\, dA = -\int_V \nabla p \, dV \ .$$

Auf jedes Volumenelement dV wirkt also, verursacht von der Flüssigkeit in der Umgebung, die Druckkraft $-dV \nabla p$. Das bedeutet, dass die spezifische Druckkraft durch

$$\underline{f}^p = -\frac{1}{\varrho} \nabla p$$

gegeben ist.

Würde man die anderen Kraftkomponenten vernachläsigen, so bekäme man die sogenannte *inkompressible Eulersche Gleichung*, die eine Grundgleichung der Termodynamik bildet.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p$$

Innere Kräfte Zu den rein reversiblen Impulsübertragungen bei idealen Gasen (Euler-Gleichung) kommen jetzt durch die Zähigkeit des Fluids irreversible Prozesse hinzu. Diese werden durch den sogenannten *zähen Spannungstensor* $(\sigma_{ij})_{i,j=1\ldots d}$ beschrieben. Die auf ein Volumenelement V wirkende Kraft ist dann gegeben durch

$$\int_{\partial V} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, dA = \int_V \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}\, dV \ .$$

Auf ein infinitisimales Volumenelement dV wirkt also die innere Kraft $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}\, dV$, also die spezifische innere Kraft

$$\underline{f^i} = \frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \ .$$

Nun werden wir uns den zähen Spannungstensor etwas näher ansehen. Er beschreibt die Prozesse der inneren Reibung. Diese treten jedoch nur auf, wenn die Flüssigkeitsteile Relativbewegungen zueinander haben. Der Tensor muss also von den örtlichen Ableitungen der Geschwindigkeit abhängen. Außerdem soll er verschwinden, wenn die Geschwindigkeit konstant ist. Also hat er die Form $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\nabla u, \Delta u, ...)$. Man nimmt nun eine Näherung in Kauf, indem man alle höheren Ableitungen vernachlässigt. Wenn die Geschwindigkeitsgradienten nicht besonders groß sind, macht die Annahme Sinn, dass der Spannungstensor linear ist.

Die allgemeine Form des Spannungstensors ist dann:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\eta \underline{\underline{\epsilon}} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta) \underline{\underline{\mathrm{Id}}} \operatorname{div} u$$

mit dem ersten und zweiten Zähigkeitskoeffizienten η und ζ. Man bezeichnet den Tensor $\underline{\underline{\epsilon}} = (\epsilon_{ij})_{i,j=1\ldots d}$, der durch

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

definiert wird, als *Deformationstensor*.

In unserem Fall fällt der zweite Teil des Spannungstensors weg, da das Geschwingkeitsvektorfeld nach der Kontinuitätsgleichung divergenzfrei ist,

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \ .$$

Die spezifische innere Kraft ist also komponentenweise gegeben durch

$$\frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \underline{\delta}_i = \frac{\eta}{\varrho} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \ .$$

Man bezeichnet $\nu = \frac{\eta}{\varrho}$ als die *kinematische Viskosität*.

Mit dem Satz von Schwarz und der Divergenzfreiheit von u erhalten wir

$$\frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \underline{\delta}_i = \nu \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{=0} \right) = \nu \Delta u_i \ .$$

Die kinematische Viskosität ist eine Stoffkonstante. Einige Werte sind (in $10^{-6}\, m^2 s^{-1}$):

- Wasser: 1,01,
- Luft: 14,
- Glycerin: 680,
- Alkohol: 2,2.

1.4 Die Navier-Stokes-Gleichung

Setzen wir die Kräfte in unsere Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich folgende Gleichung:

Komponentenweise

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i - \nu \Delta u_i + (\underline{u} \cdot \nabla) u_i - \frac{1}{\varrho} (\nabla p)_i = (f^a)_i \ ,$$

oder vektorwertig

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} - \nu \Delta \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} - \frac{1}{\varrho} \nabla p = \underline{f^a}$$

mit den äußeren Kräften f^a.

Entdimensionalisierung Ist die Gestalt eines Körpers gegeben, so reicht irgendeine seiner linearen Abmessungen (z.B. der Radius einer Kugel) aus, um ihn vollständig zu beschreiben. Somit lassen sich geometrisch ähnliche Körper allein anhand dieser Größe beschreiben.

Stationären Strömungen Bei stationären Strömungen, also zum Beispiel Umströmungen eines festen Körpers, bei denen die anströmende Flüssigkeit kleine konstante Geschwindigkeit hat, kann man die Gleichung dann noch etwas abstrahieren.

Jeder Strömungstyp wird durch drei Parameter beschrieben. Das sind die kinematische Viskosität ν, die Geschwindigkeit der anströmenden Flüssigkeit u_∞ und eine beliebig gewählte lineare Abmessung des umströmten Körpers l. Die Größen haben die Einheiten

$$[\nu] = \frac{m^2}{s} \ , \qquad [l] = m \qquad \text{und} \qquad [u_\infty] = \frac{m}{s} \ .$$

Aus diesen Größen kann man nun nur eine dimensionslose Zahl bilden, die sogenannte Reynoldszahl

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty l}{\nu} \ . \tag{6}$$

Jeder andere dimensionslose Parameter kann als Funktion von Re geschrieben werden. Nun sagt das sogenannte *Ähnlichkeitsgesetz* (O. Reynolds, 1883), dass geometrisch ähnliche Körper bei gleicher Reynoldszahl hydrodynamisch ähnliche Strömungen erzeugen.

Wir möchten nun mit entdimensionalisierten Größen rechnen, also z.B. mit $\underline{\tilde{x}} = \frac{x}{l}$ und $\underline{\tilde{u}} = \frac{u}{u_\infty}$. Für den Laplace-Term bekommen wir beispielsweise

$$\nu \Delta u_i = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \nu \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \tilde{u}_i u_\infty}{\partial \tilde{x}_j^2 l^2} = \nu \frac{u_\infty}{l^2} \Delta \tilde{u}_i \ .$$

Mit (6) erhalten wir

$$\nu \frac{u_\infty}{l^2} \Delta \tilde{u}_i = \frac{u_\infty l}{\mathrm{Re}} \frac{u_\infty}{l^2} \Delta \tilde{u}_i = \frac{u_\infty^2}{l} \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \tilde{u}_i \ .$$

Hier ist $\frac{1}{\mathrm{Re}}$ dimensionslos. Wir multiplizieren nun unsere Differentialgleichung für stationäre Strömungen (bei zeitlich konstantem $\underline{u}$) mit diesem Term $\frac{u_\infty^2}{l}$ und erhalten die *stationäre Navier-Stokes-Gleichung*

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \underline{\tilde{u}} + (\underline{\tilde{u}} \cdot \nabla) \underline{\tilde{u}} + \frac{1}{\varrho} \nabla \tilde{p} = \tilde{f} \ .$$

Man könnte zwar so skalieren, dass $\mathrm{Re} = 1$, jedoch würde dann das Ähnlichkeitsgesetz nicht mehr gelten.

Instationären Strömungen Bei instationären Strömungen kommt noch eine für die Strömung charakteristische Zeit τ hinzu, die die zeitliche Änderung der Strömung festlegt. Aus diesen vier Größen kann man nun neben der Reynoldszahl noch eine weitere dimensionslose Zahl konstruieren. So nennt man

$$\mathrm{St} = \frac{u_\infty \tau}{l}$$

die *Strouhal-Zahl*. Im instationären Fall sind zwei Strömungen ähnlich, wenn sowohl Reynolds- als auch Strouhal-Zahl übereinstimmen.

Für den instationären Teil der Differentialgleichung erhalten wir dann mit der Entdimensionalisierung

$$\frac{l}{u_\infty^2} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \frac{l}{u_\infty^2} \frac{u_\infty}{\tau} \frac{\partial \underline{\tilde{u}}}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{St}} \frac{\partial \underline{\tilde{u}}}{\partial t} \ .$$

Die *instationäre Navier-Stokes-Gleichung* hat dann di Form

$$\frac{1}{\mathrm{St}} \frac{\partial \underline{\tilde{u}}}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \underline{\tilde{u}} + (\underline{\tilde{u}} \cdot \nabla) \underline{\tilde{u}} + \frac{1}{\varrho} \nabla \tilde{p} = \tilde{f} \ .$$

In der mathematischen Literatur wird stets ohne physikalische Rechtfertigung $\mathrm{St} = 1$, also $\tau = \frac{l}{u_\infty}$ gesetzt.

2 Das stationäre Stokes-Problem

2.1 Die variationelle Formulierung des Problems

Ist Re klein, so kann der Term $(u \cdot \nabla)u$ vernachlässigt werden. In diesem Fall spricht man von dem *Stokes-Problem.* Wir betrachten den hydrodynamischen Druck $\frac{p}{\varrho}$ und setzen $\frac{1}{\mathrm{Re}} = \nu$.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und $\partial\Omega$ hinreichend glatt. Meistens wird ausreichen, dass der Rand lokal lipschitzstetig ist. Sei $u = (u_1, \cdots, u_d)$ die Geschwindigkeit, p der hydrodynamische Druck und f die äußeren Kräfte.

Gesucht ist eine hinreichend glatte Funktion $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$. Für $\nu > 0$ und gegebenes f ist

$$-\nu\Delta u + \nabla p = f \qquad \text{in } \Omega$$

unter den Bedingungen

$$\operatorname{div} u = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

und

$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \ ,$$

wobei Δu komponentenweise zu verstehen ist. Die Randbedingung lässt sich physikalisch als Haftung des Fluids am Rand erklären.

Dazu führen wir den Raum

$$\mathscr{V} = \left\{ v \in C_0^\infty(\Omega)^d : \operatorname{div} v = 0 \right\}$$

ein.

Um zur variationellen Formulierung überzugehen, multiplizieren (Skalarprodukt in $\mathbb{R}^d$) wir die Differentialgleichung mit einer Funktion $v \in \mathscr{V}$. Danach integrieren wir über Ω. Im Prinzip nehmen wir also auf beiden Seiten das L^2-Skalarprodukt $(.,.)$ mit v,

$$(-\nu\Delta u + \nabla p, v) = (f, v) \ ,$$

oder anders geschrieben

$$-\nu(\Delta u, v) + (\nabla p, v) = (f, v) \ .$$

Betrachten wir nun die beiden Terme etwas genauer:

1. Wir werden sehen, dass

$$(\Delta u, v) = \int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

   für Funktionen $u, v \in \mathscr{V}$. Damit wird es uns möglich sein, den Definitionsbereich des Laplace-Operators auf $H_0^1(\Omega)^d$ zu erweitern.

   Zunächst jedoch die Herleitung der Formel mit Hilfe des Satzes von Gauß.

   Für skalare Funktionen f, g gilt

$$\Delta f \cdot g = \sum_{i=1}^{d} (\partial_i^2 f) g \ .$$

Nach der Produktregel ist $\partial_i((\partial_i f)g) = (\partial_i^2 f)g + \partial_i f \partial_i g$. Somit folgt

$$\Delta f \cdot g = \sum_{i=1}^{d} (\partial_i((\partial_i f)g) - \partial_i f \partial_i g) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i((\partial_i f)g) - \sum_{i=1}^{d} \partial_i f \partial_i g \ ,$$

oder anders geschrieben

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} (\partial_1 f)g \\ \vdots \\ (\partial_d f)g \end{pmatrix} - \nabla f \nabla g = \operatorname{div}(\nabla f \cdot g) - \nabla f \nabla g \ .$$

Demnach ist für den betrachteten Term

$$-\nu \int_\Omega \Delta u_i \cdot v_i \, dx = -\nu \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u_i \cdot v_i) \, dx + \nu \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i \, dx \ .$$

Nun folgern wir mit dem Satz von Gauß, dass

$$-\nu \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u_i \cdot v_i) dx = -\nu \int_{\partial\Omega} \nabla u_i \, v_i \, n \, dA = 0 \ ,$$

da v_i auf $\partial\Omega$ verschwindet.

Es gilt also

$$-\nu \int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx = -\nu \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \Delta u_i \cdot v_i \, dx = \nu \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i \, dx =: \nu \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \ .$$

2. In der variationellen Formulierung kann der Druck aus der Gleichung eliminiert werden,

$$\int_\Omega \nabla p \cdot v \, dx = 0 \qquad \text{für } v \in \mathscr{V} \ .$$

Dies leiten wir wieder mit dem Satz von Gauß her.

Mit der Produktregel folgt ähnlich wie oben

$$\begin{aligned} \nabla p \cdot v &= \sum_{i=1}^{d} (\partial_i p) v_i \\ &= \sum_{i=1}^{d} \partial_i (p \, v_i) - \sum_{i=1}^{d} (\partial_i v_i) p \\ &= \operatorname{div}(p \cdot v) - (\operatorname{div} v) p \\ &= \operatorname{div}(p \cdot v) \end{aligned}$$

da $v \in \mathscr{V}$. Daher gilt also nach dem Satz von Gauß

$$\int_\Omega \nabla p \cdot v \, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(p \cdot v) \, dx = \int_{\partial\Omega} p \, v \, n \, dA = 0 \ .$$

Von der ursprünglichen Differentialgleichung bleibt also folgendes über:

$$\nu \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \ .$$

Betrachten wir das $H_0^1(\Omega)^d$-Skalarprodukt

$$(\!(u,v)\!) := \sum_{i=1}^d \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i \, dx$$

und das $L^2(\Omega)^d$-Skalarprodukt

$$(u,v) := \sum_{i=1}^d \int_\Omega u_i \, v_i \, dx \ ,$$

so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\nu (\!(u,v)\!) = (f,v) \ .$$

Da beide Seiten stetig von v in $H_0^1(\Omega)^d$ abhängen, macht es Sinn, statt $\mathscr{V}$ den Abschluss $V = \overline{\mathscr{V}}^{\|.\|_{1,2}}$ bezüglich der $H_0^1(\Omega)^d$-Norm $\|.\|_{1,2}$ zu betrachten. Weil $L^2(\Omega)^d \hookrightarrow^d V^*$, lassen wir $f \in V^*$ zu, indem wir das L^2-Skalarprodukt stetig auf V^* fortsetzen. Im Dualraum haben wir wie gewöhnlich

$$\|f\|_* := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle f,v \rangle}{\|v\|}$$

mit der dualen Paarung

$$\langle f,v \rangle = \int_\Omega f \cdot v \, dx \ .$$

Wir kommen somit zu unserer variationellen Formulierung des stationären Stokes-Problems:

Problem. *Zu gegebenem $f \in V^*$ finde $u \in V$ so, dass für alle $v \in V$ gilt*

$$\nu (\!(u,v)\!) = \langle f,v \rangle \ .$$

2.2 Der Funktionenraum V

Um $\overline{\mathscr{V}}^{H_0^1(\Omega)^d}$ besser verstehen zu können, betrachten wir folgenden

Satz. *Wenn Ω ein Lipschitz-Gebiet ist, gilt*

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^d : \operatorname{div} v = 0\} \ .$$

Beweis. Der Beweis ist gut in [2] nachzulesen. □

2.3 Der Stokes-Operator A

Die Abbildung $u, v \in V \longmapsto ((u, v)) \in \mathbb{R}$ ist bilinear und beschränkt. Also gibt es für jedes $u \in V$ ein Element $Au \in V^*$ mit $((u, v)) = \langle Au, v\rangle$ für alle $v \in V$.

Natürlich ist auch die Abbildung $u \longmapsto Au$ von V nach V^* linear und beschränkt. Es gibt also einen linearen, beschränkten Operator $A : V \longrightarrow V^*$ mit

$$\langle Au, v\rangle = ((u, v)) \qquad \forall u, v \in V \ .$$

Lemma. *Für den Operator $A : V \to V^*$ gilt*

$$\|Au\|_* = \|u\| \qquad \forall u \in V \ .$$

Beweis. Es ist

$$\|Au\|_* = \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{((u, v))}{\|v\|} \leq \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\|u\|\|v\|}{\|v\|} = \|u\|$$

und

$$\|Au\|_* = \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{((u, v))}{\|v\|} \geq \frac{((u, u))}{\|u\|} = \|u\| \ .$$

□

Der Operator $A : V \to V^*$ wird *energetische Erweiterung des klassischen Stokes-Operators* genannt.

2.4 Existenz und Einzigkeit

Satz. *Zu jedem $f \in V^*$ gibt es genau eine Lösung $u \in V$ des stationären Stokes-Problems.*

Beweis. Für die Existenz einer Lösung und deren Einzigkeit wenden wir das Lemma von Lax-Milgram (siehe auch [4]) an. Dazu ist zu zeigen, dass $((.,.))$ bilinear, beschränkt und stark positiv ist.

i) Nach Definition eines Skalarproduktes ist $((.,.))$ bilinear.

ii) Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist $((.,.))$ beschränkt,

$$|((u, v))| \leq \|u\|\|v\| \ .$$

iii) Nach der Definition der induzierten Norm ist $((.,.))$ stark positiv,

$$((v, v)) = \|u\|^2 \ .$$

□

2.5 Stabilität

Satz. *Für Lösungen $u_1, u_2 \in V$ des stationären Stokes-Problems zu den rechten Seiten $f_1, f_2 \in V^*$ gilt*

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\nu} \|f_1 - f_2\| \ .$$

Beweis. Nach Testen der Differentialgleichungen mit $v = u_1 - u_2$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\nu \|u_1 - u_2\|^2 &= \nu(\!(u_1 - u_2, u_1 - u_2)\!) \\
&= \nu(\!(u_1, u_1 - u_2)\!) - \nu(\!(u_2, u_1 - u_2)\!) \\
&= \langle f_1, u_1 - u_2 \rangle - \langle f_2, u_1 - u_2 \rangle \\
&= \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \\
&\leq \|f_1 - f_2\|_* \|u_1 - u_2\| \ .
\end{aligned}$$

Teilen durch ν und $\|u_1 - u_2\|$ ergibt die Behauptung. □

3 Das stationäre Navier-Stokes-Problem

Kommen wir nun zum nichtlinearen Problem

$$-\nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \qquad \text{in } \Omega$$

unter den Bedingungen

$$\operatorname{div} u = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

und

$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega$$

Wir betrachten also zusätzlich die Nichtlinearität $(u \cdot \nabla)u$. In der variationellen Formulierung erhalten wir dafür

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla)u \cdot v \, dx = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega u_i(\partial_i u_j)v_j \, dx$$

oder allgemeiner

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla)v \cdot w \, dx = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega u_i(\partial_i v_j)w_j \, dx =: b(u, v, w)$$

Insgesamt ergibt sich die variationelle Formulierung:

Problem. *Zu gegebenem $f \in V^*$ finde $u \in V$ so, dass für alle $v \in V$ gilt*

$$\nu(\!(u, v)\!) + b(u, u, v) = \langle f, v\rangle$$

3.1 Die Nichtlinearität b

Wir wollen nun die Nichtlinearität b genauer untersuchen. Hierbei stellt sich zunächst das Problem, dass b für $u, v, w \in V$ nicht unbedingt wohldefiniert ist. Klarheit liefert uns folgendes

Lemma. *Die Abbildung $b : V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^d$ hat folgende Eigenschaften:*

i) *$b : V \times V \times V \to \mathbb{R}^d$ ist trilinear*

ii) *$b(u, v, w) = -b(u, w, v) \quad \forall u \in V,\ v, w \in H_0^1(\Omega)^d$ und daher $b(u, v, v) = 0$*

iii) *Es existiert ein $\beta > 0$ so, dass für alle $u \in L^p(\Omega)^d$, $v \in H_0^1(\Omega)^d$, $w \in L^q(\Omega)^d$ und $p, q \in (0, \infty)$ gilt:*

$$|b(u, v, w)| \le \beta \|u\|_{L^p(\Omega)^d} \|v\| \|w\|_{L^q(\Omega)^d} \qquad \text{für} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}\ . \tag{7}$$

Beweis. zu i) trivial

zu ii) Sei $u \in \mathscr{V}$, $v, w \in C_0^1(\Omega)^d$. Dann gilt, ähnlich wie oben, mit dem Satz von Gauß

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega u_i(\partial_i v_j)w_j \, dx = -\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega ((\partial_i u_i)v_j w_j + u_i v_j \partial_i w_j) \, dx\ .$$

Nun erhalten wir nach Aufteilen der Summe und wegen der Divergenzfreiheit von u

$$-\sum_{j=1}^{d}\int_{\Omega}(\operatorname{div} u)v_j w_j\,dx-\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\Omega}u_i v_j\partial_i w_j\,dx=-b(u,v,w)\ .$$

Weil $\mathscr{V}\hookrightarrow^{d} V$ und $C_0^1(\Omega)^d\hookrightarrow^{d} H_0^1(\Omega)^d$ folgt nach iii) die Behauptung.

zu iii) Es gilt

$$|b(u,v,w)|\leq\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{d}|u_i||\partial_i v_j||w_j|\,dx\ .$$

Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz im $\mathbb{R}^d$ (für Summen) rechnet man leicht nach, dass dies kleiner oder gleich

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{d}|u_i|^2|w_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,j=1}^{d}|\partial_i v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

ist. Nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im $L^2(\Omega)^d$ (für Integrale) erhalten wir so die obere Schranke

$$\left(\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\Omega}|u_i|^2|w_j|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\Omega}|\partial_i v_j|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Nun ist der rechte Term gleich der $H_0^1(\Omega)^d$-Norm von v. Mit der Hölder-Ungleichung ergibt sich für $p,q\in(1,\infty)$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$|b(u,v,w)|\leq\left(\sum_{i,j=1}^{d}\left(\int_{\Omega}|u_i|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}\left(\int_{\Omega}|w_j|^q dx\right)^{\frac{2}{q}}\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|$$

und also

$$\begin{aligned}|b(u,v,w)| &\leq \left(\sum_{i=1}^{d}\|u_i\|^2_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{d}\|w_j\|^2_{L^q(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|\\ &= \beta\|u\|_{L^p(\Omega)^d}\,\|v\|\,\|w\|_{L^q(\Omega)^d}\ .\end{aligned}$$

□

In dem Navier-Stokes-Problem ist ein $u\in V$ gesucht. Das heißt, dass u nicht unbedingt in $L^p(\Omega)^d$ sein muss. Die Frage ist nun, unter welchen Bedingungen der Raum $H^1(\Omega)^d\supset V$ in einen L^p-Raum eingebettet ist.

Aufschluss darüber geben uns die *Sobolevschen Einbettungssätze.* Für ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand gilt

$$W^{k,p'}(\Omega)^d\hookrightarrow W^{m,q'}(\Omega)^d\ ,$$

wenn $0\leq m\leq k$ und $\frac{1}{p'}-\frac{k}{d}\leq\frac{1}{q'}-\frac{m}{d}$. Uns interessiert speziell $k=1$, $p'=2$ und $m=0$.

1. Für die Fälle $d \leq 4$ gilt

$$H_0^1(\Omega)^d \hookrightarrow L^4(\Omega)^d$$

und somit für $p = q = 4$

$$|b(u,v,w)| \leq \beta \|u\| \|v\| \|w\|$$

b ist also stetig auf $V \times V \times V$.

2. Der Fall $d > 4$ ist jedoch etwas problematisch. Man rechnet nach, dass

$$H_0^1(\Omega)^d \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)^d \ .$$

Für $p = \frac{2d}{d-2}$ ist $q = d$. Wir würden also folgende Abschätzung erhalten:

$$|b(u,v,w)| \leq \|u\| \|v\| \|w\|_{L^d(\Omega)^d} \ .$$

Die Abbildung b wäre dann stetig auf $V \times V \times (V \cap L^d(\Omega)^d)$. Das würde bedeuten, dass die Differentialgleichung mit Funktionen getestet würde, die nicht aus dem Raum stammen, in dem wir die Lösung suchen. Damit wollen wir uns in dieser Arbeit nicht befassen.

3.2 Existenz und Einzigkeit

Wir werden sehen, dass wir die Existenz von Lösungen für $d \leq 3$ beweisen können. Tatsächlich kann man dies sogar für alle Dimensionen d zeigen. Wir verwenden dazu den Satz über monotone Operatoren mit verstärkt stetiger Störung.

Eindeutigkeit werden wir für $d \leq 4$ und vor allem nur unter bestimmten Bedingungen an die Daten zeigen können.

Satz. *Zu jedem $f \in V^*$ gibt es eine Lösung $u \in V$ des stationären Navier-Stokes-Problems für $d \leq 3$.*

Beweis. Sei $d \leq 3$. Wir benutzen den Satz über monotone Operatoren mit verstärkt stetiger Störung (siehe auch [4]). Dazu betrachten wir

$$A : V \longrightarrow V^*, \qquad u \longmapsto Au; \quad \langle Au, v \rangle := \nu((u,v))$$

und

$$B : V \longrightarrow V^*, \qquad u \longmapsto Bu; \quad \langle Bu, v \rangle := b(u,u,v)$$

Diese Operatoren sind wohldefiniert, weil $(\nu(u,\cdot))$ und $b(u,u,\cdot)$ stetig und linear auf V sind.

Nun ist zu zeigen, dass A monoton i) und radialstetig ii), B verstärkt stetig iii) und $A + B$ koerzitiv iv) ist.

i) Es gilt

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \langle A(u-v), u - v \rangle \\ &= \nu((u-v, u-v)) \\ &= \nu \|u - v\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

und somit ist A sogar stark monoton.

ii) A ist stetig und somit ist A auch radialstetig.

iii) Sei $(u_n)_n$ eine in V schwach gegen $u \in V$ konvergente Folge. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|Bu_n - Bu\|_* &= \sup_{\|v\|\le 1} |b(u_n, u_n, v) - b(u, u, v)| \\
&= \sup_{\|v\|\le 1} |b(u_n - u, u_n, v) + b(u, u_n, v) - b(u, u, v)| \\
&= \sup_{\|v\|\le 1} |b(u_n - u, u_n, v) + b(u, u_n - u, v)| \\
&\le \sup_{\|v\|\le 1} (|b(u_n - u, u_n, v)| + |b(u, u_n - u, v)|) \\
&= \sup_{\|v\|\le 1} (|b(u_n - u, u_n, v)| + |b(u, v, u_n - u)|) \\
&\le \sup_{\|v\|\le 1} \big(\beta\|u_n - u\|_{L^4(\Omega)^d}\|u_n\|\|v\|_{L^4(\Omega)^d} \\
&\qquad +\beta\|u\|_{L^4(\Omega)^d}\|v\|\|u_n - u\|_{L^4(\Omega)^d}\big) \ .
\end{aligned}$$

Da $u_n \rightharpoonup u$ in V, gibt es ein $M > 0$ so, dass $\|u_n\| \le M$ für alle u_n gilt. Außerdem wissen wir nach den Sobolevschen Einbettungssätzen, dass $H_0^1(\Omega)^d \hookrightarrow^c L^4(\Omega)^d$ für $d \le 3$. Daher folgt aus der schwachen Konvergenz von u_n in V die starke Konvergenz in $L^4(\Omega)^d$. Damit bekommen wir die verstärkte Stetigkeit von B:

$$\sup_{\|v\|\le 1} \big(\beta\|u_n - u\|_{L^4(\Omega)^d}\|u_n\|\|v\|_{L^4(\Omega)^d} + \beta\|u\|_{L^4(\Omega)^d}\|v\|\|u_n - u\|_{L^4(\Omega)^d}\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

iv)
$$\langle (A+B)v, v\rangle = \langle Av, v\rangle + \langle Bv, v\rangle = \|v\|^2 + b(v, v, v) = \|v\|^2 \ ,$$

denn $b(v, v, v) = 0$. Also ist

$$\frac{\langle (A+B)v, v\rangle}{\|v\|} = \|v\| \overset{\|v\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ ,$$

und $A + B$ ist koerzitiv.

□

Einzigkeit der Lösung werden wir nur für „kleine Daten“finden. Doch zunächst benötigen wir eine für den Beweis der Einzigkeit hilfreiche A-priori-Abschätzung:

Lemma. *Für eine Lösung $u \in V$ des stationären Navier-Stokes-Problems gilt*

$$\|u\| \le \frac{1}{\nu}\|f\|_* \ . \tag{8}$$

Beweis. Wir testen die Differentialgleichung mit $v = u$ (Energiemethode), verwenden $b(u, v, v) = 0$ und erhalten

$$\nu\|u\|^2 = \nu(\!(u, u)\!) + b(u, u, u) = \langle f, u\rangle \le \|f\|_*\|u\| \ .$$

Teilen durch ν und $\|u\|$ ergibt die Behauptung. □

Satz. *Für $\frac{\beta}{\nu^2}\|f\|_* < 1$ ist eine Lösung $u \in V$ des stationären Navier-Stokes-Problems eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in V$ zwei Lösungen des Navier-Stokes-Problems. Es gilt

$$\nu((u_1, v)) + b(u_1, u_1, v) = \langle f, v\rangle = \nu((u_2, v)) + b(u_2, u_2, v) \ .$$

Dies ist äquivalent zu

$$\nu((u_1-u_2, v)) = -b(u_1, u_1, v)+b(u_2, u_2, v) = -b(u_1-u_2, u_1, v)-b(u_2, u_1-u_2, v) \ .$$

Testen wir nun mit $v = u_1 - u_2$, so erhalten wir

$$\nu\|u_1 - u_2\|^2 = -b(u_1 - u_2, u_1, u_1 - u_2) + b(u_2, u_1 - u_2, u_1 - u_2) \ .$$

Da der zweite Term der rechten Seite verschwindet, ergibt sich mit der Beschränktheit von b

$$\nu\|u_1 - u_2\|^2 \leq \beta\|u_1 - u_2\|^2\|u_1\| \ .$$

Gemäß der obigen a-priori-Abschätzung (8) gilt

$$\|u_1\| \leq \frac{1}{\nu}\|f\|_* \ .$$

Zusammen ist also

$$\nu\|u_1 - u_2\|^2 \leq \beta\|u_1 - u_2\|^2\|f\|_*\frac{1}{\nu} \ .$$

Dies ist äquivalent zu

$$\nu(1 - \frac{\beta}{\nu^2}\|f\|_*)\|u_1 - u_2\|^2 \leq 0 \ .$$

Damit gilt nach der Voraussetzung, dass $u_1 = u_2$ in V. □

3.3 Stabilität

Satz. *Für zwei Lösungen $u_1, u_2 \in V$ des stationären Navier-Stokes-Problems zu rechten Seiten $f_1, f_2 \in V^*$ gilt, sofern $\beta\frac{1}{\nu^2}\|f_1\|_* < 1$,*

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{\|f_1 - f_2\|}{\nu - \frac{\beta}{\nu}\|f_1\|} \ .$$

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der Eindeutigkeitsbeweis. □

Auffällig ist hierbei der Term im Nenner. Wir erhalten durch ihn Stabilität nur im Fall kleiner Daten. Dies ist aber sinnvoll, da nur dann die eindeutige Lösbarkeit gesichert ist. Andernfalls könnte zwischen Lösungsästen gesprungen werden.

4 Das instationäre Stokes-Problem

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu A u + \nabla p = f \qquad \text{in } \Omega \times (0,T)$$

mit den Bedingungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\cdot,0) &= u_0 \qquad \text{in } \Omega \ . \end{aligned}$$

Wir fassen die Funktion u als abstrakte Funktion $u = u(t)$ in einem Funktionenraum (z.B. $L^2(0,T;V)$) auf. Das heißt, dass $u(t)$ für jedes $t \in [0,T]$ eine Funktion in x ist. Weiterhin werden wir wie im stationären Fall den Hilbertraum

$$V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega)^d : \operatorname{div} v = 0 \right\}$$

mit Norm $\|\cdot\|$ und Skalarprodukt $(\!(\cdot,\cdot)\!)$ verwenden. Nun kommt jedoch ein weiterer Raum hinzu:

4.1 Der Raum H

Uns interessiert der Hilbertraum

$$H = \overline{\mathscr{V}}^{\|\cdot\|_{0,2}} \ .$$

Wie V können wir auch diesen Raum etwas anschaulicher beschreiben.

Satz. *Sei Ω ein Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand. Dann gilt*

$$H = \left\{ v \in L^2(\Omega)^d : \operatorname{div} v = 0, (v \cdot n)|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \ .$$

Die Beziehung $\operatorname{div} v = 0$ ist zunächst im H^{-1}-Sinne zu verstehen. Ist aber $\operatorname{div} v = 0$, so gilt auch $\operatorname{div} v \in L^2(\Omega)^d$. Wir betrachten dann vorerst den Raum

$$E(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega)^d : \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)^d \} \ .$$

Die Definition von $(v \cdot n)|_{\partial\Omega} = 0$ geschieht, mathematisch korrekt, durch einen Spuroperator auf $E(\Omega)$. Dazu benötigen wir einen Spursatz

Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten linearen Operator $\gamma_n : E(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ mit*

$$\gamma_n u = (u \cdot n)|_{\partial\Omega} \qquad \forall u \in C^1(\Omega)^d$$

wobei n die äußere Normale auf Ω bezeichnet. Ferner gilt

$$ker\, \gamma_n = \overline{C_0^\infty(\Omega)^d}^{E(\Omega)} \ .$$

Genaueres dazu ist in [2] nachzulesen. Wir bekommen nun einen *Gelfand-Dreier* mit sogar kompakten Einbettungen

$$V \hookrightarrow^{c,d} H \cong H^* \hookrightarrow^{c,d} V^*$$

4.2 Die Variationelle Formulierung des Problems

Wir testen unsere Differentialgleichung mit $v \in V$ und erhalten für die zeitliche Ableitung

$$\int_\Omega u'(t)v\,dx\ .$$

Nun gilt für differenzierbare $u \in V$

$$\left|\int_\Omega u'(t)v\,dx\right| \leq \|u'\|_* \,\|v\|\ ,$$

und wir können die zeitliche Ableitung $u'(t) \in V^*$ im schwachen Sinne verstehen. Ein Dichteschluss rechtfertigt also die Betrachtung von

$$\langle u'(t), v\rangle\ .$$

Die anderen Terme erhalten wir analog zum stationären Fall.

Es sei

$$W(0,T) := \{u \in L^2(0,T;V) \text{ mit } u' \in L^2(0,T;V^*)\}\ .$$

Für $u \in W(0,T)$ gilt fast überall

$$\langle u'(t), v\rangle = \frac{d}{dt}(u(t), v)\ ,$$

(siehe auch [4]).

Warum aber können wir $u' \in L^2(0,T;V^*)$ voraussetzen? Wir schreiben die Differentialgleichung dazu in Operatorform.

$$u' = f - Au$$

Der zunächst auf V definierte Operator $A : V \to V^*$ kann zu einem Operator auf $L^2(0,T;V)$ fortgesetzt werden. Wir definieren für abstrakte Funktionen $v = v(t)$

$$(Av)(t) := Av(t)\ ,$$

und erhalten so den Operator

$$A : L^2(0,T;V) \longrightarrow L^2(0,T;V^*)\ ,$$

weil $\|Au\|_* = \|u\|$ und damit

$$\int_0^T \|Au\|_*^2 dx = \int_0^T \|u\|^2 dx < \infty\ .$$

Bei der exakten Formulierung des Problems werden wir $f \in L^2(0,T;V^*)$ voraussetzen. Damit ist

$$u' = f - Au \in L^2(0,T;V^*)$$

Wir kommen so zur variationellen Formulierung des instationären Stokes-Problems:

Problem. *Zu* $u_0 \in H$, $f \in L^2(0,T;V^*)$ *finde* $u \in W(0,T)$ *so, dass für alle* $v \in V$ *fast überall in* $[0,T]$ *gilt*

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + \nu(\!(u(t),v)\!) = \langle f(t),v\rangle$$

mit $u(0) = u_0$.

Wir wissen, dass $u \in W(0,T)$. Damit ist u fast überall gleich einer stetigen Funktion in $C([0,T],H)$. Damit ist die Konvergenz der Lösung für $t \to 0$ gegen den Anfangswert in H gesichert.

4.3 Existenz und Einzigkeit

Satz. *Das instationäre Stokes-Problem hat genau eine Lösung.*

Beweis. Wir wenden den Satz von Lions an (siehe auch [4]). Für dessen Voraussetzungen ist zu zeigen, dass die Abbildung $a : [0,T] \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $a(t,v,w) = \nu(\!(v,w)\!)$, bezüglich t Lebesgue-messbar, gleichmäßig beschränkt ist und gleichmäßig in t einer Gårdingschen Ungleichung genügt.

Dies ist aber trivial, da a bezüglich t konstant ist. Die gleichmäßige Beschränktheit haben wir also schon im stationären Fall gezeigt und aus der starken Positivität folgt sofort die Gårdingsche Ungleichung. □

Wir erinnern uns an die Gårdingschen Ungleichung:

Definition. Eine Abbildung $a : [0,T] \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ genügt bezüglich t gleichmäßig einer *Gårdingschen Ungleichung*, falls es Zahlen $\mu > 0$ und $\kappa \geq 0$ gibt so, dass für alle $t \in [0,T], v \in V$ gilt

$$a(t,v,v) \geq \mu\|v\|_V^2 - \kappa|v|_H^2 \ .$$

5 Das instationäre Navier-Stokes-Problem

Wir werden uns im Folgenden, wie teilweise auch schon beim stationären Navier-Stokes-Problem, auf die Dimensionen $d = 2, 3$ beschränken. Es gilt, folgendes Problem zu analysieren:

Problem. *Für gegebenes $u_0 \in H$ und $f \in L^2(0, T; V^*)$ finde $u \in L^2(0, T; V)$ so, dass für alle $v \in V$ fast überall in $(0, T)$ gilt*

$$\langle u'(t), v\rangle + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = \langle f, v\rangle$$

mit $u(0) = u_0$ gilt. Dabei ist die Zeitableitung als verallgemeinerte Ableitung aus $L^1_{loc}(0, T; V^*)$ zu verstehen.

5.1 Abschätzungen und Hilfsresultate

In welchem Sinne die Anfangsbedingung angenommen wird ist noch unklar, da wir noch nicht genug über b wissen. Wir werden also noch ein paar weitere Eigenschaften aufklären müssen. Dazu werden wir die wichtigen *interpolatorischen Ungleichungen* benötigen.

Lemma. *Es gilt für $p \geq q$ und $u \in L^p(\Omega)^d$*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)^d} \leq \|u\|^s_{L^p(\Omega)^d} \|u\|^{1-s}_{L^q(\Omega)^d}$$

für $\frac{s}{p} + \frac{1-s}{q} = \frac{1}{r}$ und $s \in [0, 1]$.

Beweis. Die Ungleichung folgt aus der Hölder-Ungleichung mit $|u|^r = |u|^{rs}|u|^{r(1-s)}$. □

Wir erhalten nun mit der Einbettung $H^1_0(\Omega)^d \hookrightarrow L^p(\Omega)^d$ für $p \leq \frac{d-2}{2d}$ leicht

$$\|u\|_{L^r(\Omega)^d} \leq c|u|^{1-s}\|u\|^s$$

für $\frac{1}{r} + \frac{s}{d} = \frac{1}{2}$ und $s \in [0, 1], r \in [2, \infty)$, und speziell

$$\|u\|_{L^3(\Omega)^d} \leq c \begin{cases} |u|^{\frac{2}{3}}\|u\|^{\frac{1}{3}} & \text{für } d = 2 \\ |u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}} & \text{für } d = 3 \end{cases} , \tag{9}$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)^d} \leq c \begin{cases} |u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}} & \text{für } d = 2 \\ |u|^{\frac{1}{4}}\|u\|^{\frac{3}{4}} & \text{für } d = 3 \end{cases} , \tag{10}$$

$$\|u\|_{L^6(\Omega)^d} \leq c\|u\| . \tag{11}$$

Lemma. *Für den zu b gehörigen Operator $B(\cdot)$, definiert durch*

$$\langle (Bu)(t), v\rangle := b(u(t), u(t), v) ,$$

gilt

i) $B(\cdot) : L^2(0, T; V) \longrightarrow L^1(0, T; V^*)$,

ii) $B(\cdot) : L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \longrightarrow \begin{cases} L^2(0, T; V^*) & \text{für } d = 2 \\ L^{\frac{4}{3}}(0, T; V^*) & \text{für } d = 3 \end{cases}$.

Beweis. Zu i) Sei $u \in L^2(0,T;V)$. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit von b

$$\int_0^T \|(Bu)(t)\|_* dt \leq \int_0^T \beta \|u\|^2 dt < \infty \ .$$

zu ii) Sei nun $d = 2$. Wir wählen in (7) $p = q = 4$ und erhalten mit der interpolatorischen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_0^T \|(Bu)(t)\|_*^2 dt &\leq \int_0^T \beta^2 \|u(t)\|_{L^4(\Omega)^d}^4 dt \leq \beta^2 \int_0^T |u(t)|^2 \|u(t)\|^2 dt \\ &\leq \beta^2 \|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 < \infty \ . \end{aligned}$$

Für $d = 3$ wählen wir $p = 3$ und $q = 6$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \|(Bu)(t)\|_*^{\frac{4}{3}} dt &\leq \int_0^T (\beta \|u(t)\|_{L^3(\Omega)^d} \|u(t)\|_{L^6(\Omega)^d})^{\frac{4}{3}} dt \\ &\leq \beta^{\frac{4}{3}} \int_0^T |u(t)|^{\frac{2}{3}} \|u(t)\|^2 dt \\ &\leq \beta^{\frac{4}{3}} \|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^{\frac{2}{3}} \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 < \infty \ . \end{aligned}$$

□

Nun wissen wir, dass für eine Lösung $u \in L^2(0,T;V) \subset L^1(0,T;V^*)$ zur rechten Seite $f \in L^2(0,T;V^*)$ gilt

$$u' = f - \nu Au + B(u) \in L^2(0,T;V^*) + L^1(0,T;V^*) \subset L^1(0,T;V^*)$$

Damit ist $u \in W^{1,1}(0,T;V^*)$ und somit fast überall gleich einer stetigen Funktion mit Werten in V^*. Somit ist die Konvergenz gegen den Anfangswert in V^* gesichert.

Außerdem gilt fast überall folgende Gleichung:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) = \langle u'(t), v \rangle \in L^1(0,T)$$

Somit können wir das Problem auch mit $\frac{d}{dt}(u(t), v)$ formulieren.

5.2 Existenz und Eindeutigkeit

Existenz

Satz. *Es gibt mindestens eine schwache Lösung u des instationären Navier-Stokes-Problems. Für diese gilt $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$.*

Beweis. Wir werden den Beweis nur skizzieren. Man findet den Beweis genauer in [5]. Er verläuft in vielerlei Hinsicht ähnlich zum Beweis des Satzes von Lions für ein lineares Problem (siehe [4]). Es wird mit dem impliziten Euler-Verfahren bezüglich der Zeit diskretisiert. Die Existenz der diskreten Lösungen erhalten wir mit dem Satz über monotone Operatoren mit verstärkt stetiger Störung (siehe auch [4]). Es wird dann eine kontinuierliche Lösung konstruiert und mit Hilfe einiger Abschätzungen kann unter bestimmten Voraussetzungen deren Konvergenz gezeigt werden.

Diskretisierung Zunächst erhalten wir mit dem impliziten Euler-Verfahren die diskrete Ersatzaufgabe

Problem. *Zu $u_0 \in H$, $f \in L^2(0,T;V^*)$ finde $\{u^n\}_{n=0}^{N-1} \subset V$, $\Delta t = \frac{T}{N}$ so, dass für alle $v \in V$ gilt*

$$\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, v\right) + \nu((u^{n+1}, v)) + b(u^{n+1}, u^{n+1}, v) = \langle f^{n+1}, v\rangle \qquad (12)$$

und $u^0 = u_0$, wobei $f^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)dt$.

Eine Lösung dieses Problems erhalten wir mit dem Satz über monotone Operatoren mit verstärkt stetiger Störung (siehe auch [4]), ähnlich zum Beweis im stationären Fall. Dazu betrachte man statt A den Operator $C : V \longrightarrow V^*$ mit

$$\langle Cu, v\rangle = \frac{1}{\Delta t}(u, v) + \nu((u, v)) \ .$$

Abschätzungen Nun folgen einige Abschätzungen, die für die Konvergenz der konstruierten Lösung benötigt werden (hierbei ist die Konstante c jeweils unabhängig von Δt):

1. Testen wir (12) mit $v = u^{n+1}$, verwenden, dass für ein Skalarprodukt $(.,.)$ $(a-b, a) = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 + |a-b|^2)$ gilt, so erhalten wir durch aufsummieren von (12)
$$|u^n|^2 + \sum_{j=0}^{n-1} |u^{j+1} - u^j|^2 + \nu\Delta t \sum_{j=1}^{n} \|u^j\|^2 \le c \ ,$$
wobei $\{u^n\} \in l^\infty(0,T;H) \cap l^2(0,T;V)$ und
$$(\Delta t)^2 \sum_{j=0}^{n-1} \left|\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta t}\right|^2 \le c \ .$$

2. Mit dem vorangegangenen Lemma und der Definition der dualen Paarung ergibt sich für $d = 2$
$$\Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \left\|\frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t}\right\|_*^2 \le c$$
undfür $d = 3$
$$\Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \left\|\frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t}\right\|_*^{\frac{4}{3}} \le c \ ,$$
womit wir zusätzliche Regularitäten der Lösung erhalten werden.

An dieser Stelle bemerken wir, dass in numerischen Betrachtungen bei Summen von Normen häufig noch mit Δt multipliziert wird. Ohne diesen Faktor wäre oft die Konvergenz in den Funktionenräumen nicht zu zeigen. Er repräsentiert ein Analogon zu der Intervallbreite bei Integralnormen.

Konstruktion von Näherungslösungen Wir konstruieren eine stückweise konstante und eine stetige, stückweise lineare Interpolation. Die stückweise lineare Funktion besitzt dann eine verallgemeinerte Ableitung. Diese Funktion werden wir in dem Ableitungsterm der Differentialgleichung verwenden.

1.

$$\begin{aligned} U_{\Delta t}(t) &:= u^{n+1} \quad \text{für } t \in (t_n, t_{n+1}], n = 0, \ldots, N-1 \\ U_{\Delta t}(0) &:= u^1 \end{aligned}$$

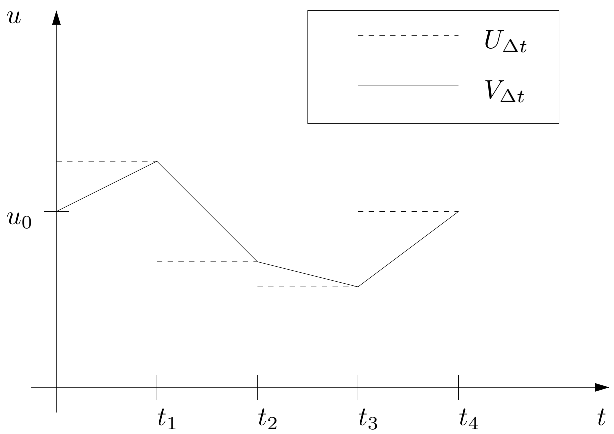
2.

$$\begin{aligned} V_{\Delta t}(t) &:= \frac{u^{n+1} - u_n}{\Delta t}(t - t_n) + u^n \quad \text{für } t \in (t_n, t_{n+1}], n = 0, \ldots, N-1 \\ V_{\Delta t}(0) &:= u_0 \end{aligned}$$

Setzen wir dies in unser diskretes Problem ein, so ist (12) äquivalent zu

$$\langle V'_{\Delta t}(t), v\rangle + \nu((U_{\Delta t}(t), v)) + b(U_{\Delta t}(t), U_{\Delta t}(t), v) = \langle F_{\Delta t}(t), v\rangle \quad \text{f.ü. in } (0, T)$$

mit $F_{\Delta t}$ stückweise konstant gleich f^{n+1}.



Eigenschaften der Näherungslösungen Aus den Abschätzungen erhalten wir nun folgende Eigenschaften von $U_{\Delta t}$ und $V_{\Delta t}$:

1. Für jede Folge $\{\Delta t\}$ sind $\{U_{\Delta t}\}, \{V_{\Delta t}\}$ gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(0, T; H)$ und $L^2(0, T; V)$.

2. $\{V'_{\Delta t}\}$ ist für $d = 2$ in $L^2(0, T; V^*)$ und für $d = 3$ in $L^{\frac{4}{3}}(0, T; V^*)$ gleichmäßig beschränkt.

3.

$$\begin{aligned}\|U_{\Delta t}-V_{\Delta t}\|^2_{L^2(0,T;H)} &= \int_0^T |U_{\Delta t}(t)-V_{\Delta t}(t)|^2 dt\\ &= \sum_{j=0}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|\frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta t}(t-t_j)\right|^2 dt\\ &\leq \Delta t\, const\,(\Delta t)^2 \sum_{j=0}^{N-1}\left|\frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta t}\right|^2\\ &\longrightarrow 0 \quad \text{für } \Delta t \to 0\end{aligned}$$

Konvergenz Wir erhalten nun sukzessive Teilfolgen, die in bestimmten Räumen konvergieren:

Da $L^2(0,T;V)$ und $L^2(0,T;V^*)$ reflexiv sind, existiert eine Teilfolge $\{(\Delta t)'\}$ mit

$$U_{(\Delta t)'}, V_{(\Delta t)'} \rightharpoonup U \quad \text{ in } L^2(0,T;V)$$

und

$$V'_{(\Delta t)'} \rightharpoonup W \quad \text{ in } L^2(0,T;V^*)$$

Mit Hilfe der Definition der schwachen Ableitung kann man leicht zeigen, dass dann auch $W = U'$ gilt.

$L^1(0,T;H)$ ist separabel und mit $L^\infty(0;T;H) = (L^1(0,T;H))^*$ können wir aus der Teilfolge eine schwach*-konvergente Teilfolge auswählen:

$$U_{(\Delta t)'}, V_{(\Delta t)'} \overset{*}{\rightharpoonup} U \quad \text{ in } L^\infty(0,T;H)$$

Mit dem Satz von Lions-Aubin (siehe dazu [4]) erhalten wir

$$U_{(\Delta t)'}, V_{(\Delta t)'} \to U \quad \text{stark in } L^2(0,T;H)$$

Weil $U \in L^\infty(0,T;H)$, gilt wegen der Hölder-Ungleichung sogar

$$U_{(\Delta t)'}, V_{(\Delta t)'} \to U \quad \text{stark in } L^p(0,T;H) \text{ für } p<\infty$$

Um die Konvergenz in der Differentialgleichung zu sehen, schauen wir uns einmal die Konvergenzarten genauer an.

Schwache Konvergenz Es gilt $U_{\Delta t} \rightharpoonup U$ in $L^2(0,T;V)$ genau dann, wenn für alle $g \in L^2(0,T;V^*)$ gilt

$$\langle g, U_{\Delta t}-U\rangle_{L^2(0,T;V^*)\times L^2(0,T;V)} = \int_0^T \langle g(t), U_{\Delta t}(t)-U(t)\rangle\, dt \overset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} 0\ .$$

Schwach*-Konvergenz Es gilt $U_{\Delta t} \overset{*}{\rightharpoonup} U$ in $L^\infty(0,T;H) \cong (L^1(0,T;H))^*$ genau dann, wenn für alle $g \in L^1(0,T;H)$ gilt

$$\begin{aligned}\langle U_{\Delta t}-U, g\rangle_{L^\infty(0,T;H)\times L^1(0,T;H)} &= \int_0^T \langle U_{\Delta t}(t)-U(t), g(t)\rangle\, dt\\ &= \int_0^T (U_{\Delta t}(t)-U(t), g(t))\, dt \overset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} 0\ .\end{aligned}$$

Schwache Konvergenz der Ableitung Wegen der Reflexivität von V gilt $V'_{\Delta t} \rightharpoonup U'$ *schwach in* $L^2(0,T;V^*)$ genau dann, wenn für alle $g \in L^2(0,T;V)$ gilt

$$\langle V'_{\Delta t} - U', g\rangle_{L^2(0,T;V^*)\times L^2(0,T;V)} = \int_0^T \langle V'_{\Delta t}(t) - U'(t), g(t)\rangle \, dt \stackrel{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0 \; .$$

Nun fällt uns auf, dass für die Konvergenz in der Gleichung diese noch zu integrieren ist. Wir erinnern uns daran, dass die zeitliche Ableitung eine schwache Ableitung ist. Mit der Definition der schwachen Ableitung erhalten wir dann folgende Formulierung unserer Gleichung:

Für $\varphi \in C^1[0,T]$, $\varphi(T) = 0$, soll gelten

$$\int_0^T \langle V'_{\Delta t}(t), v\rangle \varphi(t)\, dt + \int_0^T \nu(\!(U_{\Delta t}(t), v)\!)\varphi(t)\, dt + \int_0^T b(U_{\Delta t}(t), U_{\Delta t}(t), v)\varphi(t)\, dt = \int_0^T \langle F_{\Delta t}(t), v\rangle \varphi(t)\, dt \; .$$

Mit Hilfe der Konvergenzen und geeigneten Abschätzungen für $b(.,.,.)$ erhält man dann, dass U schwache Lösung ist.

Wir hatten bei der Konstruktion der Interpolation verlangt, dass $u^0 = u_0$ in V. Die Abschätzungen verlangen jedoch nur $u_0 \in H$. Da aber $V \hookrightarrow^d H$, reicht es mit einem Dichteschluss aus, nur $u_0 \in H$ zu betrachten. $\square$

Bemerkung. Für $d = 2$ ist nun $u \in L^2(0,T;V)$ und $u' \in L^2(0,T;V^*)$. Somit ist $u \in W(0,T) \hookrightarrow C([0,T],H)$. Also konvergiert die Lösung für $t \to 0$ sogar in H gegen den Anfangswert. Man kann sogar zeigen, dass $u \in L^4(0,T;L^4(\Omega)^2)$.

Außerdem gilt somit wieder

$$\langle u'(t), u(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2$$

und wir erhalten damit die Energiegleichung

$$|u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds = |u_0|^2 + 2\int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle \, ds$$

fast überall in $(0,T)$.

Für $d = 3$ kann man zeigen, dass die Lösung

$$u \in L^4(0,T;L^3(\Omega)^3) \cap L^{\frac{8}{3}}(0,T;L^4(\Omega)^3) \cap L^\infty(0,T;H) \cap C_w([0,T];H)$$

und $u' \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*)$ ist. $C_w([0,T];H)$ bezeichnet hier den Raum der bezüglich der schwachen Topologie in H stetigen (oder auch demistetigen) Funktionen. Man erhält die analoge Energieungleichung

$$|u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \le |u_0|^2 + 2\int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle \, ds$$

Eindeutigkeit

Satz. *Für $d = 2$ sind Lösungen des instationären Navier-Stokes-Problems eindeutig.*

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$ zwei Lösungen und $w = u_1 - u_2$. Dann gilt

$$\langle w'(t), v\rangle + \nu(\!(w(t), v)\!) + b(u_1(t), u_1(t), v) - b(u_2(t), u_2(t), v) = 0 \ .$$

Testen wir mit $v = w(t)$, so erhalten wir mit der im zweidimensionalen Fall geltenden Gleichung $\langle u'(t), u(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu\|w(t)\|^2 &= b(u_2(t), u_2(t), w(t)) - b(u_1(t), u_1(t), w(t)) \\
&= -b(w(t), u_1(t), w(t)) \\
&\leq \|w\|^2_{L^4(\Omega)^d}\|u_1(t)\| \\
&\leq \beta|w(t)|\|w(t)\|\|u_1(t)\| \\
&\leq \frac{\nu}{2}\|w(t)\|^2 + \frac{\beta^2}{2\nu}\|u_1(t)\||w(t)| \ .
\end{aligned}$$

Hier wurde außerdem die binomische Ungleichung und eine Abschätzung (10) verwendet.

Sei nun

$$M(t) := \frac{\beta^2}{\nu}\int_0^t \|u_1(s)\|^2 \, ds < \infty \ .$$

Damit ist

$$M'(t) = \frac{\beta^2}{\nu}\|u_1(t)\|^2 \ ,$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{e^{-M(t)}|w(t)|^2\right\} + \nu e^{-M(t)}\|w(t)\|^2 \\
&= e^{-M(t)}M'(t)|w(t)|^2 + e^{-M(t)}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu e^{-M(t)}\|w(t)\|^2 \\
&= 2e^{-M(t)}\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \frac{\nu}{2}\ \|w(t)\|^2 - \frac{\beta^2}{2\nu}\|u_1(t)\|^2|w(t)|^2\right\} \\
&\leq 0 \ .
\end{aligned}$$

Durch integrieren erhalten wir

$$e^{-M(t)}|w(t)|^2 - e^{-M(0)}|w(0)|^2 + \nu\int_0^t e^{-M(s)}\|w(s)\|^2 \, ds \leq 0 \ .$$

Weil $|w(0)| = 0$, ist $w = 0$ in $L^2(0,T;V)$ und $C([0,T];H)$. □

Satz. *Für $d = 3$ gibt es höchstens eine Lösung $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ derart, dass*

$$u \in L^s(0,T;L^r(\Omega)^d) \quad \textit{mit } \frac{2}{s} + \frac{d}{r} = 1,\ r < d,\ s \geq 2$$

Eine solche Lösung wäre in $W(0,T) \hookrightarrow C([0,T];H)$ und würde der Energiegleichung genügen.

Beweis. Siehe [6]. □

Bemerkung. Speziell für $d = 3$ wird oft $s = 8$ und $r = 4$ verwendet:

$$u \in L^8(0, T; L^4(\Omega)^d)$$

Damit kommen wir zu dem Problem, dass für $d = 3$ die Existenz von Lösungen nur in "großen Räumen", Einzigkeit dagegen nur in "kleinen Räumen" bekommt. Anders formuliert:

> In der Klasse der schwachen Lösungen sind die starken Lösungen eindeutig.

Eine schwache Lösung der Differentialgleichung, eine gewisse Regularität besitzt (z.B. $u \in C([0, T]; V)$) und der Energiegleichung genügt, nennt man *starke Lösungen*.

Literatur

[1] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik,Bd. 6, Hydrodynamik*, Harri Deutsch, 1991

[2] Roger Temam: *Navier-Stokes Equation - Theory and numerical Analysis*, North-Holland, 1984

[3] Roger Temam: *Navier-Stokes Equations and Functional Analysis, Second Edition*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 1987

[4] Etienne Emmrich: *Gewöhnliche und Operatordifferentialgleichungen*, Vieweg, 2004

[5] Etienne Emmrich: *Analysis von Zeitdiskretisierungen des inkompressiblen Navier-Stokes-Problems*, Cuvillier Verlag, 2001

[6] J.-L. Lions: *Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier- Villars, 1969