Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Kompaktheit von Familien von Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum

Seminararbeit

Seminar Evolutionsgleichungen
Prof. Dr. Etienne Emmrich
Sommersemester 2011

vorgelegt von:
Mareike Esser

Bielefeld, den 27. August 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Klassische Kompaktheitsresultate **4**

3 Variation des Lemmas von Lions-Aubin **9**

3.1 Nicht-diskreter Fall 9

3.2 Diskreter Fall 14

4 Ausblick **20**

5 Anhang **22**

1 Einleitung

Bei der Untersuchung parabolischer partieller Differentialgleichungen ist zunächst von Interesse, ob mögliche Lösungen eines Problems existieren und ob diese eindeutig sind. Das Vorgehen bei der Überprüfung von Existenz und Einzigkeit solcher Lösungen in unendlichdimensionalen Räumen besteht üblicherweise darin, das gegebene Problem zu diskretisieren. Es wird eine Familie endlichdimensionaler Probleme konstruiert, auf dessen Basis sich die Existenz einer stationären Lösung mit etwa dem Lemma von Lax-Milgram nachweisen lässt. Anschließend folgt die Überprüfung von Apriori-Abschätzungen, die zusammen mit entsprechenden Kompaktheitsargumenten die Existenz eines Grenzwertes der Folge endlichdimensionaler Probleme liefern. Üblicherweise gilt dies jedoch nur für Teilfolgen. Zuletzt wird bei der Suche nach der Existenz von Lösungen parabolischer Probleme geprüft, ob der erhaltene Grenzwert dem ursprünglichen Anfangsproblem genügt. Die Einzigkeit, falls vorhanden, wird häufig aus den Apriori-Abschätzungen geschlossen.
Diese Seminararbeit zum Thema "Kompaktheit von Familien von Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum"basiert auf einer Ausarbeitung von Thierry Gallouët (Université de Provence) und Jean-Claude Latché (Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire).

Der Fokus dieser Ausarbeitung liegt auf einem Satz, der als eine Generalisierung des Lemmas von Lions-Aubin für parabolische Probleme aufgefasst werden kann. Dieser liefert die Konvergenz einer Folge stückweise konstanter Funktionen in der Zeit, die Werte in einer Folge von endlichdimensionalen Teilräumen eines Banachraumes B annehmen. Problematisch ist hierbei, dass sowohl die diskreten Räume, als auch die darauf initialisierten Normen von einem Laufindex n abhängen.
Um dieses Kompaktheitsresultat beweisen zu können, wird zunächst damit begonnen, einen Satz über relativ kompakte Mengen in $L^p((0,T),B)$ darzulegen. Es folgen weitere notwendige Kompaktheitslemmata. Anschließend wird das oben genannte Kompaktheitsresultat im diskreten und im nicht-diskreten Fall angeführt. Zuletzt wird in einem Ausblick verkürzt ein Turbulenzmodell vorgestellt, in dessen Lösungstheorie die zuvor bewiesenen Kompaktheitsargumente Anwendung finden können.
Die in dieser Arbeit vorgeführten Beweise werden durch Strukturdiagramme unterstützt, die im Anhang wiedergefunden werden können.

2 Klassische Kompaktheitsresultate

Sei $(B, ||\cdot||_B)$ ein beliebiger Banachraum. Diesen Abschnitt beginnen wir mit einem Kompaktheitskriterium für Mengen in $L^p((0,T),B)$, welches auf Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (1903-1987) und Marcel Riesz (1886-1969) zurückgeht. Der Beweis basiert zu einem Großteil auf dem nach Cesare Arzelà (1847-1912) und Giulio Ascoli (1843-1896) benannten Satz von Arzelà-Ascoli. Anschließend findet das Lemma von Ehrling Erwähnung, welches in verschiedenen Versionen aufgeführt wird. Das Lemma von Ehrling ist wegführend für den Beweis des Lemmas von Lions-Aubin und ist dementsprechend zum Teil auch unter dem Namen Lemma von Lions zu finden.

Definition 2.1 *Seien f, g Funktionen mit $f, g\colon \mathbb{R} \to B$. Dann definiert*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy$$

die Faltung von f und g.

Definition 2.2 *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Eine Folge $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Folge von Mittelungskernen genau dann, wenn gilt:*

- $\varphi \in C_c{}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,
- $\int_{\mathbb{R}} \varphi\,dx = 1$ *und* $\varphi \geq 0$,
- $\varphi_n(x) = n\varphi(nx) \quad$ *für* $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Erinnerung (Satz von Arzelà-Ascoli für $C([0,T],B)$)
Sei $F \subset C([0,T],B)$ eine Familie stetiger Funktionen $f : [0,T] \to B$. Dann ist F genau dann relativ kompakt in $C([0,T],B)$, wenn

1. die Menge $\{f(t)|f \in F\}$ für jedes $t \in [0,T]$ relativ kompakt ist in B,
2. F gleichgradig stetig ist von $[0,T]$ zu B für alle $f \in F$.

Satz 2.1 *Vorgelegt sei $F \subset L^p((0,T),B)$ mit $1 \leq p < \infty$. Die Menge F ist relativ kompakt in $L^p((0,T),B)$, wenn F die folgenden Bedingungen erfüllt*

1. *für alle $f \in F$ existiert ein $Pf \in L^p(\mathbb{R},B)$, sodass $Pf = f$ fast überall in $(0,T)$ und $||Pf||_{L^p(\mathbb{R},B)} \leq C$ für ein $C > 0$,*
2. *für alle $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist die Familie $\left\{\int_{\mathbb{R}}(Pf)\varphi\,dt|\ f \in F\right\}$ relativ kompakt in B,*

3. $||Pf(\cdot + h) - Pf||_{L^p(\mathbb{R},B)} \longrightarrow 0$ *für* $h \longrightarrow 0$ *gleichmäßig in* $f \in F$.

Beweis Der Beweis der relativen Kompaktheit von F soll in zwei Schritten erfolgen. Unter der Verwendung des Satzes von Arzelà-Ascoli zeigen wir zunächst, dass die Menge $F_n = \{(Pf * \varphi_n) \restriction_{[0,T]} | f \in F\}$ relativ kompakt ist in $L^p((0,T), B)$, wobei $\{\varphi_n\}$ eine Folge von Mittelungskernen sei. In einem zweiten Schritt prüfen wir anschließend die gleichmäßige Konvergenz von $Pf * \varphi_n$ gegen Pf in $L^p(\mathbb{R}, B)$ in $f \in F$.

Schritt 1 Sofern die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli erfüllt sind, erhalten wir umgehend die relative Kompaktheit von F_n in $C([0,T], B)$. Wir prüfen also zunächst die relative Kompaktheit von $\{Pf * \varphi_n(t) | f \in F\}$ in B.
Für $t \in [0,T]$ definieren wir hierzu die Funktion $\psi(s) := \varphi_n(t-s)$, wobei $s \in \mathbb{R}$. Unter Verwendung der Definition der Faltung erhalten wir für alle $f \in F$, dass

$$Pf * \varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} Pf(s)\varphi_n(t-s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} Pf(s)\psi(s)\,ds.$$

Da mit φ_n offensichtlich auch ψ in der Menge $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ enthalten ist, ist $\left\{\int_{\mathbb{R}} (Pf)\psi\,dt |\ f \in F\right\}$ nach Voraussetzung relativ kompakt in B. Folglich ist auch die Menge $\{Pf * \varphi_n(t) | f \in F\}$ für alle $t \in [0,T]$ relativ kompakt in B.
Kommen wir nun zur gleichgradigen Stetigkeit. Nach Definition der Faltung gilt

$$||Pf * \varphi_n(t_2) - Pf * \varphi_n(t_1)||_B \leq \int_{\mathbb{R}} ||Pf(s)||_B\ |\varphi_n(t_2 - s) - \varphi_n(t_1 - s)|\,ds.$$

Anschließende Anwendung der Hölderschen Ungleichung[1] ergibt

$$\begin{aligned} &||Pf * \varphi_n(t_2) - Pf * \varphi_n(t_1)||_B \\ \leq &\left(\int_{\mathbb{R}} ||Pf(s)||_B^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t_2 - s) - \varphi_n(t_1 - s)|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \\ = &||Pf||_{L^p(\mathbb{R},B)}\ ||\varphi_n(t_2 - \cdot) - \varphi_n(t_1 - \cdot)||_{L^q(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

wobei wir $q = \frac{p}{p-1}$ setzen.

Nach Voraussetzung wissen wir, dass $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $||Pf||_{L^p(\mathbb{R},B)} \leq C$. Somit lässt sich ein $\delta > 0$ in Abhängigkeit von φ und C finden, sodass $||Pf * \varphi_n(t_2) - Pf * \varphi_n(t_1)||_B \leq \varepsilon$ für alle $f \in F$ und $t_1 \in [0,T]$ mit $|t_2 - t_1| \leq \delta$. Dies impliziert die gleichgradige Stetigkeit und dank des Satzes von Arzelà-Ascoli erhalten wir zudem die relative Kompaktheit von $F_n \in C([0,T], B)$.
Letztlich können wir auf Grund der stetigen und dichten Einbettung von $C([0,T], B)$ in $L^p((0,T), B)$ zusätzlich auch die relative Kompaktheit von $F_n \in L^p((0,T), B)$ folgern.

[1] Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega)$. Definiere $p = 1$ für $q = \infty$ und $p = \infty$ für $q = 1$. Dann ist $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ und

$$\int_{\Omega} f(t) \cdot g(t)\,dt \leq \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \text{ für } t \in \Omega.$$

Schritt 2 In diesem Schritt soll die gleichmäßige Konvergenz in $f \in F$ von $Pf * \varphi_n$ gegen Pf in $L^p(\mathbb{R}, B)$ gezeigt werden. Wir wollen also zeigen, dass $||Pf * \varphi_n - Pf||_{L^p(\mathbb{R},B)} \longrightarrow 0$ gleichmäßig in $f \in F$ für $n \longrightarrow \infty$.

Unter Verwendung der Mittelungskerneigenschaft betrachten wir vorerst

$$\begin{aligned} Pf * \varphi_n - Pf &= \int_{\mathbb{R}} Pf(t-s)\ \varphi_n(s)\, ds - Pf \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(s)\, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} (Pf(t-s) - Pf(t))\ \varphi_n(s)\, ds. \end{aligned}$$

Anwenden der Norm und anschließende Substitution mit $\bar{s} = ns$ ergibt in diesem Fall

$$\begin{aligned} ||Pf * \varphi_n(t) - Pf(t)||_B &\leq \int_{-1}^{1} (Pf(t - \frac{\bar{s}}{n}) - Pf(t))\ \varphi_n\left(\frac{\bar{s}}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}\ d\bar{s} \\ &= \int_{-1}^{1} (Pf(t - \frac{\bar{s}}{n}) - Pf(t))\ \varphi(\bar{s})\ d\bar{s}. \end{aligned}$$

Nun bilden wir die p-te Potenz und nutzen die Höldersche Ungleichung und betrachten

$$\begin{aligned} ||Pf * \varphi_n - Pf||_B^p &\leq \left(\int_{-1}^{1} ||Pf(t - \frac{\bar{s}}{n}) - Pf(t)||_B\ |\varphi(\bar{s})|\ d\bar{s} \right)^p \\ &\leq \left(\int_{-1}^{1} ||Pf(t - \frac{\bar{s}}{n}) - Pf(t)||_B^p\ d\bar{s} \right)^p \cdot \left(\int_{-1}^{1} |\varphi(\bar{s})|^q\ d\bar{s} \right)^{\frac{p}{q}} \\ &\leq \int_{-1}^{1} ||Pf(t - \frac{\bar{s}}{n}) - Pf(t)||_B^p\ d\bar{s}\ \ ||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}).}^p \end{aligned}$$

Indem wir die obige Ungleichung nach t integrieren und den Satz von Fubini anwenden, folgt schließlich

$$\begin{aligned} ||Pf * \varphi_n - Pf||_{L^p(\mathbb{R},B)}^p &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} ||Pf(t - \frac{\bar{s}}{n}) - Pf(t)||_B^p\, d\bar{s}\ ||\varphi||_{L^q(\mathbb{R})}^p\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} ||Pf(\cdot - \frac{\bar{s}}{n}) - Pf||_{L^p(\mathbb{R},B)}^p\, d\bar{s}\ ||\varphi||_{L^q(\mathbb{R})}^p \\ &\leq 2 \sup_{s \in [-1,1]} ||Pf(\cdot - \frac{\bar{s}}{n}) - Pf||_{L^p(\mathbb{R},B)}^p\ ||\varphi||_{L^q(\mathbb{R})}^p \\ &\leq 2 \sup_{|h| \leq \frac{1}{n}} ||Pf(\cdot + h) - Pf||_{L^p(\mathbb{R},B)}^p\ ||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}).}^p \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert offensichtlich $h \to 0$. Da aber nach Voraussetzung $||Pf(\cdot + h) - Pf||_{L^p(\mathbb{R},B)} \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$ gleichmäßig in $f \in F$ und $||\varphi||^p_{L^q(\mathbb{R})} \leq \text{const}$ erhalten wir die gleichmäßige Konvergenz in $L^p(\mathbb{R}, B)$.

Da also $F_n = \{(Pf * \varphi_n) \restriction_{[0,T]} | f \in F\}$ relativ kompakt ist in $L^p((0,T), B)$ und $Pf * \varphi_n$ gegen Pf konvergiert für $n \to \infty$, können wir letztlich folgern, dass die Menge $F \subset L^p((0,T), B)$ relativ kompakt ist.

$\square$

Bemerkung 1 *Die Rückrichtung des Satzes gilt ebenfalls. Da diese jedoch für die weitere Beweisführung nicht benötigt wird, soll sie innerhalb dieser Ausarbeitung nicht dargestellt werden. Es sei hierzu auf [**?**] verwiesen.*

Lemma 2.1 (Lemma von Ehrling) *Seien* $(X, ||\cdot||_X), (B, ||\cdot||_B)$ *und* $(Y, ||\cdot||_Y)$ *Banachräume, sodass*

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y.$$

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ *eine Konstante* $C(\varepsilon) > 0$*, sodass für alle* $v \in X$ *gilt*

$$||v||_B \leq \varepsilon ||v||_X + C(\varepsilon)||v||_Y. \tag{2.1}$$

Beweis Dieser Beweis soll durch Widerspruch geführt werden. Es sei also angenommen, dass (2.1) nicht gilt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und Folgen $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X und $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ mit $d_n \to \infty$ für $n \to \infty$, sodass

$$||v_n||_B > \varepsilon ||v_n||_X + d_n ||v_n||_Y \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit $w_n = \frac{v_n}{||v_n||_X}$ erhalten wir

$$||w_n||_B = \frac{||v_n||_B}{||v_n||_X} \geq \varepsilon + d_n \frac{||v_n||_Y}{||v_n||_X} = \varepsilon + d_n ||w_n||_{Y.} \tag{2.2}$$

Die Konstruktion von w_n impliziert, dass $||w_n||_X = 1$ und da X stetig dicht eingebettet ist in B, gilt zusätzlich

$$||w_n||_B \leq c\ ||w_n||_X = c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}.$$

Somit ist w_n beschränkt in B und mit (2.2) folgt, dass $||w_n||_Y \leq \frac{c}{d_n}$. Da nach Voraussetzung $d_n \to \infty$ für $n \to \infty$, konvergiert folglich auch

$$||w_n||_Y \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{2.3}$$

Aus der kompakten Einbettung von X in B können wir allerdings weiterhin folgern, dass eine Teilfolge $\{w_{n'}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$w_{n'} \longrightarrow w \quad \text{in } B$$

existiert. Wegen der stetigen Einbettung von B in Y ergibt sich zudem sofort die Konvergenz von

$$w_{n'} \longrightarrow w \quad \text{in } Y.$$

Zusammen mit (2.3) liefert dies $w = 0$. Insgesamt haben wir somit gezeigt, dass $||w_{n'}||_B \to 0$, welches mit (2.2) den Widerspruch zu $\varepsilon > 0$ bildet. $\square$

Für das Lemma von Ehrling können wir zusätzlich eine alternative Formulierung angeben, die unter anderem dazu dienen kann, die Definitionen von stetiger und kompakter Einbettung in Erinnerung zu rufen.

Lemma 2.2 *Seien* $(X, ||\cdot||_X), (B, ||\cdot||_B)$ *und* $(Y, ||\cdot||_Y)$ *Banachräume mit* $X \subset B \subset Y$*, für die folgende Eigenschaften gelten:*

- *jede in* X *beschränkte Folge* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *besitzt eine in* B *konvergente Teilfolge* $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$*,*

- *aus* $v_n \longrightarrow v$ *in* B *und* $||v_n||_Y \longrightarrow 0$*, folgt* $v = 0$*.*

Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ *eine Konstante* $C(\varepsilon) > 0$*, sodass für alle* $v \in X$ *gilt*

$$||v||_B \leq \varepsilon ||v||_X + C(\varepsilon)||v||_Y.$$

Falls der betrachtete Banachraum zudem ein Hilbertraum ist, können wir auf einen Spezialfall des Lemmas verweisen, dessen Beweis denkbar einfach ist.

Lemma 2.3 *Sei* $(B, (\cdot,\cdot)_B, ||\cdot||_B)$ *ein Hilbertraum und* $(X, ||\cdot||_X)$ *ein Banachraum mit* $X \subset B$*. Ferner sei*

$$||\cdot||_{X^*} = \sup_{\substack{u\in X,\\ ||u||_X\leq 1}} (\cdot, u)_B,$$

die zu $||\cdot||_X$ *definierte duale Norm. Dann gilt für alle* $\varepsilon > 0$ *und* $v \in X$ *die Abschätzung*

$$||v||_B \leq \varepsilon ||v||_X + \frac{1}{\varepsilon}||v||_{X^*}.$$

Beweis
Sei $v \in X$. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$||v||_B = (v,v)_B^{\frac{1}{2}} \leq (||v||_X ||v||_{X^*})^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon ||v||_X + \frac{1}{\varepsilon}||v||_{X^*}.$$

□

3 Variation des Lemmas von Lions-Aubin

In diesem Abschnitt geht es um die Frage, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit eine Folge von Funktionen konvergiert, die Werte in einem Banachraum B annimmt. Bestimmt wird also, unter welchen Bedingungen die Existenz eines Grenzwertes gefolgert werden kann. Dies wird zunächst im nicht-diskreten Fall geschildert und anschließend im diskreten Fall. Insbesondere letzterer ist von immenser Bedeutung für die Untersuchung der Existenz von Lösungen parabolischer partieller Diffentialgleichungen. Dieser kann als eine Spezifizierung des Lemmas von Lions-Aubin angesehen werden, welches auf die zwei französischen Mathematiker Jacques-Louis Lions (1928-2001) und Jean-Pierre Aubin (geb. 1939) zurückgeht.

3.1 Nicht-diskreter Fall

Bemerkung 2 *Sei $u \in L^1((0,T),X)$ und gilt für die distributionelle Ableitung $\frac{du}{dt} \in L^1((0,T),Y)$, dann ist $u \in C([0,T],Y)$ und es gilt*

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \frac{du}{dt}(s)\,ds \qquad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Ferner ist u absolut stetig als Funktion mit Werten in Y.

Beweis Sei $v = \frac{du}{dt}$ im schwachen Sinne und definiere $w \in C([0,T])$ durch

$$w(t) = \int_0^t v(s)\,ds \qquad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Weiterhin seien $t_1, t_2 \in (0,T)$ mit $t_1 < t_2$. Für $t \in (0,T)$ setzen wir

$$\psi_n(t) = \int_0^t \varphi_n(t_1 - s)\,ds - \int_0^t \varphi_n(t_1 - s)\,ds,$$

wobei $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mittelungskernen sei mit

- $\varphi \in {C_c}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$,
- $\int_\mathbb{R} \varphi\,dx = 1$ und $\varphi \geq 0$,
- $\varphi_n(x) = n\varphi(nx) \quad$ für $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Falls $\frac{1}{n} < t_1$ und $\frac{1}{n} < T - t_2$, so ist $\psi \in C_c^\infty((0,T),\mathbb{R})$ und

$$(\psi_n)'(t) = \varphi_n(t_1 - t) - \varphi(t_2 - t) \qquad \text{für alle } t \in (0,T).$$

Dann gilt nach Definition der Faltung und der schwachen Ableitung

$$\begin{aligned} u * \varphi_n(t_1) - u * \varphi_n(t_2) &= \int_0^T u(s)\ (\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2))\, ds \\ &= \int_0^T u(s)\ (\psi_n)'(s)\, ds \ = \ -\int_0^T v(s)\psi_(s)\, ds. \end{aligned}$$

Da ψ_n in $(0,T)$ fast überall gegen die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{[t_1,t_2]}$ konvergiert, können wir folgern, dass

$$-\int_0^T v(s)\psi_n(s)\, ds \ \longrightarrow \ -\int_0^T v(s)\mathbb{1}_{[t_1,t_2]}\, ds = -\int_{t_1}^{t_2} v(s)\, ds \qquad \text{in } Y.$$

Für fast alle t_1, t_2 aus $(0,T)$ schließen wir somit, dass

$$u(t_1) - u(t_2) = -\int_{t_1}^{t_2} v(s)\, ds = w(t_1) - w(t_2).$$

Dies zeigt, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $u = w + c$ und folglich $u \in C([0,T],Y)$.

□

Satz 3.1 *Seien $(X, ||\cdot||_X), (B, ||\cdot||_B)$ und $(Y, ||\cdot||_Y)$ Banachräume, sodass*

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y.$$

Ferner sei $1 \leq p < \infty$ und $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen mit den Eigenschaften

1. *$||u_n||_{L^p((0,T),X)} < M$ für ein $M > 0$,*
2. *$||\frac{du_n}{dt}||_{L^p((0,T),Y)} < K$ für ein $K > 0$.*

Dann existiert ein $u \in L^p((0,T),B)$ und eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{u_n\}$, sodass $u_{n_k} \to u$ in $L^p((0,T),B)$.

Beweis Ziel des Beweises ist die Anwendung von Satz 2.1. Insofern werden wir nachfolgend die einzelnen Voraussetzungen des Satzes überprüfen. Hierfür sei $\varphi \in C_c^\infty([-T,2T],\mathbb{R})$ so gewählt, dass $\varphi(t) = 1$ für $t \in [0,T]$ und $\varphi(t) \leq 1$ für jedes $t \in [-T,2T]$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für die angehende Rechnung definiere mit

$$\bar{u}_n(t) = \begin{cases} u_n(t), & \text{für } t \in [0,T] \\ u_n(-t), & \text{für } t \in (-T,0) \end{cases}$$

$$\bar{u}_n(t+T) = u_n(T-t) \text{ für } t \in (0,T).$$

die Fortsetzung von $u_n(t)$ auf das Intervall $(-T, 2T)$. Die Grundidee dieser Fortsetzung besteht in einer Spiegelung der ursprünglichen Funktion zu den Zeitpunkten 0 und T. Dementsprechend lässt sich leicht erkennen, dass für einen beliebigen Banachraum V die Gleichung

$$||\bar{u}||^p_{L^p((-T,2T),V)} = 3||u_n||^p_{L^p((0,T),V)} \tag{3.1}$$

gilt. Wir definieren weiterhin

$$Pu_n(t) = \varphi(t)\bar{u}_n(t) \text{ für alle } t \in (-T, 2T).$$

Voraussetzung 1 Nach Konstruktion ist $Pu_n(t) = \varphi(t)\bar{u}_n(t) = u_n(t)$ für $t \in (0,T)$. Weiterhin können wir festhalten, dass

$$||Pu_n||^p_{L^p(\mathbb{R},B)} \;=\; ||\varphi\ \bar{u}_n||^p_{L^p((-T,2T),B)} \;\leq\; ||\bar{u}_n||^p_{L^p((-T,2T),B)} \;=\; 3||u_n||^p_{L^p((0,T),B)}.$$

Aufgrund der kompakten Einbettung von X in B und nach Voraussetzung ist

$$||u_n||_{L^p((0,T),B)} \leq C||u_n||_{L^p((0,T),X)} \leq CM.$$

Somit können wir folgern, dass Pu_n in der $L^p(\mathbb{R}, B)$-Norm beschränkt ist, welches die erste Voraussetzung des Satzes 2.1 zeigt.

Voraussetzung 2 Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Um die zweite Voraussetzung des Satzes - die relative Kompaktheit von $\{\int_{\mathbb{R}} Pu_n(t)\psi(t)\,dt | n \in \mathbb{N}\}$ in B - zu zeigen, genügt es die Beschränktheit eben dieser Menge in X zu zeigen. Denn aufgrund der kompakten Einbettung von X in B besitzt jede in X beschränkte Folge auch eine in B konvergente Teilfolge.
Wir können die Höldersche Ungleichung anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\left|\left|\int_{\mathbb{R}} Pu_n(t)\psi(t)\,dt\right|\right|_X &\leq ||\psi||_\infty \int_{-T}^{2T} ||Pu_n(t)||_X\,dt \\
&\leq ||\psi||_\infty \left(\int_{-T}^{2T} 1^{\frac{p}{p-1}}\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{-T}^{2T} ||Pu_n(t)||^p_X\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq ||\psi||_\infty\,(3T)^{1-\frac{1}{p}}\ ||Pu_n||_{L^p(\mathbb{R},X)}.
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion und der ersten Voraussetzung ist zudem

$$||Pu_n||_{L^p(\mathbb{R},X)} \;\leq\; ||\bar{u}_n||_{L^p((-T,2T),X)} \;\leq\; 3||u_n||^p_{L^p((0,T),X)} \;\leq\; \text{const.}$$

Dies impliziert die relative Kompaktheit.

Voraussetzung 3 Für die dritte Voraussetzung werden wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die gleichmäßige Konvergenz von $||Pu_n(\cdot+h) - Pu_n||_{L^p(\mathbb{R},B)} \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$ zeigen. Hierfür wähle $\delta > 0$ so, dass $\varphi \in C_c^\infty([-T+\delta, 2T-\delta], \mathbb{R})$. Ohne Beschränkung der

Allgemeinheit sei außerdem $0 < h < \delta$ so gewählt, dass $t + h \in (-T, 2T)$.
Wir können zunächst eine Abschätzung in der B-Norm treffen. Mit dem Lemma von Lions erhalten wir:

$$\begin{aligned}||Pu_n(t+h) - Pu_n(t)||_B &= ||(\varphi(t+h) - \varphi(t))\bar{u}_n(t+h) + \varphi(t)(\bar{u}_n(t+h) - \bar{u}_n(t))||_B \\ &\leq h||\varphi'||_\infty||\bar{u}_n(t+h)||_B + \varepsilon||\varphi||_\infty||\bar{u}_n(t+h)||_X \\ &\quad + \varepsilon||\varphi||_\infty||\bar{u}_n(t)||_X + C(\varepsilon)||\bar{u}_n(t+h) - \bar{u}_n(t)||_{Y.}\end{aligned}$$

Da $|\cdot|^p$ konvex ist, folgt mit der Jensenschen Ungleichung[1]

$$\begin{aligned}||Pu_n(t+h) - Pu_n(t)||_B^p \leq \quad & 4\ (h||\varphi'||_\infty||\bar{u}_n(t+h)||_B)^p \\ & + 4(\varepsilon||\varphi||_\infty||\bar{u}_n(t+h)||_X)^p \\ & + 4(\varepsilon||\varphi||_\infty||\bar{u}_n(t)||_X)^p \\ & + 4(C(\varepsilon)||\varphi||_\infty||\bar{u}_n(t+h) - \bar{u}_n(t)||_Y)^p.\end{aligned}$$

Integration nach t ergibt weiterhin

$$\begin{aligned}||Pu_n(t+h) - Pu_n(t)||_{L^p(\mathbb{R},B)} \leq \quad & 4(h||\varphi'||_\infty||\bar{u}_n(\cdot+h)||_{L^p((-T,2T),B)})^p \\ & + 4(\varepsilon||\varphi||_\infty||\bar{u}_n(\cdot+h)||_{L^p((-T,2T),X)})^p \\ & + 4(\varepsilon||\varphi||_\infty||\bar{u}_n||_{L^p((-T,2T),X)})^p \\ & + 4(C(\varepsilon)||\varphi||_\infty)^p \int\limits_{\mathbb{R}} ||\bar{u}_n(t+h) - \bar{u}_n(t)||_Y^p\, dt.\end{aligned}$$

Nun können wir den zweiten und dritten Term der rechten Seite zusammenfassen und wegen (3.1) gilt ferner

$$\begin{aligned}||Pu_n(t+h) - Pu_n(t)||_{L^p(\mathbb{R},B)} \leq\ & 4(3h||\varphi'||_\infty||u_n||_{L^p((0,T),B)})^p \\ & + 8(3\varepsilon||\varphi||_\infty||u_n||_{L^p((0,T),X)})^p \\ & + 4(C(\varepsilon)||\varphi||_\infty)^p \int\limits_{-T}^{2T} ||\bar{u}_n(t+h) - \bar{u}_n(t)||_Y^p\, dt.\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ beziehungsweise $h \to 0$ konvergieren die ersten zwei Terme der rechten Seite gegen 0. Lediglich für den dritten Term müssen wir eine weitere Abschätzung vornehmen. Konstruiere hierfür wie zuvor für die Funktion u_n auch für die Ableitung von u_n eine Fortsetzung auf dem Intervall $(-T, 2T)$. Sie basiert ebenfalls auf Spiegelungen zu den Zeitpunkten 0 und T.

[1]Für eine konvexe Funktion f und für nicht negative Zahlen $c_i \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right) \ \leq\ \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

$$v_n(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt} u_n(t), & \text{für } t \in [0,T] \\ \frac{d}{dt} u_n(-t), & \text{für } t \in (-T,0) \end{cases}$$

$$v_n(t+T) = -\frac{d}{dt} u_n(T-t) \quad \text{für } t \in (0,T)$$

Wegen Bemerkung 2 ist $u \in C([0,T],Y)$. Entsprechend gilt für $t_1, t_2 \in (-T, 2T)$ im Sinne des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{t_1}^{t_2} v_n(s)\, ds = |u_n(t_1) - u_n(t_2)|.$$

Mit Hilfe dessen und unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung können wir folgern, dass

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{2T} ||\bar{u}_n(t+h) - \bar{u}_n(t)||_Y^p \, dt &\leq \int_{-T}^{2T-\delta} \left(\int_t^{t+h} ||v_n(s)||_Y \, ds \right)^p dt \\
&\leq \int_{-T}^{2T-\delta} \left(\left(\int_t^{t+h} 1^{\frac{p}{p-1}} \, dt \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_t^{t+h} ||v_n(s)||_Y^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dt \\
&\leq h^{p-1} \int_{-T}^{2T-\delta} \left(\int_t^{t+h} ||v_n(s)||_Y^p \, ds \right) dt \\
&\leq h^{p-1} \int_{-T}^{2T-\delta} \left(\int_{-T}^{2T-\delta} \mathbb{1}_{[t,t+h](s)} ||v_n(s)||_Y^p \, ds \right) dt.
\end{aligned}$$

Anwenden des Satzes von Fubini liefert uns weiterhin

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{2T} ||\bar{u}_n(t+h) - \bar{u}_n(t)||_Y^p \, dt &\leq h^{p-1} \int_{-T}^{2T-\delta} \left(\int_{-T}^{2T-\delta} \mathbb{1}_{[s-h,s](t)} \, dt \right) ||v_n(s)||_Y^p \, ds \\
&\leq h^p ||v_n||^p_{L^p((-T,2T),Y)} \; = \; 3h^p ||\tfrac{d}{dt} u_n||^p_{L^p((0,T),Y)}.
\end{aligned}$$

Da $||\frac{d}{dt} u_n||^p_{L^p((0,T),Y)}$ nach Voraussetzung beschränkt ist, konvergiert für $h \to 0$ nun auch der dritte Term gegen 0. Dies komplettiert den Beweis, da mit Satz 2.1 gefolgert werden kann, dass die Menge $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt ist in $L^p((0,T),B)$. Folglich existiert eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{u_n\}$, sodass $u_{n_k} \to u$ in $L^p((0,T),B)$.

$\square$

3.2 Diskreter Fall

Lemma 3.1 (Diskretes Lemma von Ehrling) *Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge endlich-dimensionaler Teilräume eines Banachraumes $(B, ||\cdot||_B)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $||\cdot||_{X_n}$ und $||\cdot||_{Y_n}$ zwei Normen auf B_n, sodass*

1. *jede bezüglich $||\cdot||_{X_n}$ beschränkte Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine in B konvergente Teilfolge $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt,*
2. *aus $v_n \longrightarrow v$ in B und $||v_n||_{Y_n} \longrightarrow 0$, folgt $v = 0$.*

Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \in B_n$ gilt

$$||v||_B \leq \varepsilon||v||_{X_n} + C(\varepsilon)||v||_{Y_n}. \tag{3.2}$$

Beweis Wir beweisen die Aussage dieses Lemmas durch Widerspruch. Die Problematik besteht in der Unabhängigkeit der Konstante $C(\varepsilon)$ von n.
Angenommen (3.2) ist falsch, dann lässt sich ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ angeben, sodass für alle $m \in \mathbb{N}$ ein n_m existiert, sodass $u_m \in B_{n_m}$ und

$$||u_m||_B > \varepsilon||u_m||_{X_{n_m}} + m||u_m||_{Y_{n_m}}, \tag{3.3}$$

wobei $n_m \to \infty$ für $m \to \infty$. Betrachten wir eine Folge $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, die für alle $m \in \mathbb{N}$ definiert wird durch

$$v_m = \frac{1}{||u_m||_B} u_m.$$

Offensichtlich ist $||v_m||_B = 1$ und wir erkennen, dass

$$||v_m||_{X_{n_m}} \leq \frac{1}{\varepsilon}||v_m||_B = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Somit ist v_m bezüglich X_{n_m} beschränkt und aufgrund der ersten Voraussetzung existiert eine Teilfolge $\{v_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{v_m\}$, mit

$$v_{m_k} \longrightarrow v \quad \text{in B.}$$

Daraus ergibt sich, dass $||v||_B = 1$. Wegen (3.3) gilt allerdings auch, dass

$$||v_m||_{Y_{n_m}} \leq \frac{1}{m}||v_m||_B = \frac{1}{m},$$

also $\lim_{m\to\infty} ||v_m||_{Y_{n_m}} = 0$. Es folgt unmittelbar, dass $v = 0$, welches den Widerspruch zu $||v_m||_B = 1$ bildet.

□

Lemma 3.2 *Die erste Voraussetzung aus Lemma 3.1 impliziert, dass eine Konstante $C_X \in \mathbb{R}$ existiert, sodass jedes $v \in B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ der Ungleichung*

$$||v||_B \leq C_X||v||_{X_n} \tag{3.4}$$

genügt.

Beweis Unter der Annahme, dass die Behauptung (3.4) falsch ist, gibt es eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein m_n existiert mit $u_n \in B_{m_n}$ und $||u_n||_{X_{m_n}} = 1$, sowie $||u_n||_B \geq n$, wobei $m_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Da u_n beschränkt in X_{m_n} ist, existiert nach der ersten Voraussetzung von Lemma 3.1 eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{u_n\}$, sodass

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad \text{in B.}$$

Dies liefert den Widerspruch dazu, dass $||u_n||_B \to \infty$ für $n \to \infty$.

$\square$

Definition 3.1 *Sei $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zeitgittern. Das Intervall $[0,T)$ sei im Weiteren äquidistant zerlegt mit den Zeitschritten $\tau_n = \frac{T}{N_n}$, d.h*

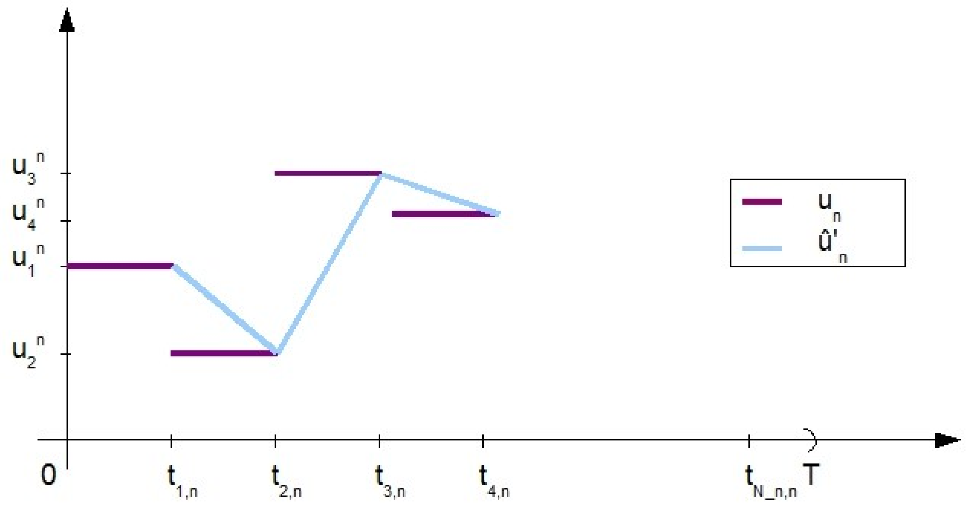
$$0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \ \ldots \ < t_{N_n,n} \ ; \qquad t_{i,n} = i\tau_n \quad \text{für } 1 \leq i \leq N_n.$$

Sei B_n ein endllichdimensionaler Banachraum. Wir definieren den ebenfalls endlichdimensionalen Raum H_n als den Raum aller stückweise konstanten Funktionen über jedem Intervall $\mathbb{I}_{i,n} := [t_{i-1,n}, t_{i,n})$ für $1 \leq i \leq N_n$ mit Werten in B_n, d.h

$$H_n := \{u_n : [0,T) \to B_n | \ u_n(t) = u_i^n \ \text{für } t \in \mathbb{I}_{i,n}\}.$$

Definiere weiterhin für die Folge $\{\hat{u}_n\}_n \in B_n$ eine Folge stückweise linearer Funktionen auf B_n durch

$$\hat{u}_n'(t) = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\tau_n} \qquad \text{für } t \in I_{i,n}.$$



Lemma 3.3 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.2 existiert eine Konstante $C_F \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1,\infty)$ die folgende Apriori-Abschätzung gilt:*

$$\sum_{i=1}^{N_n} \tau_n ||u_i^n||_{X_n}^p + \sum_{i=2}^{N_n} \tau_n ||\hat{u}_{i,n}'||_{Y_n}^p \leq C_F.$$

Satz 3.2 (Diskreter Satz von Aubin-Simon) *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, sodass $u_n \in H_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge endlichdimensionaler Teilräume eines Banachraumes $(B, ||\cdot||_B)$. Weiterhin seien $||\cdot||_{X_n}$ und $||\cdot||_{Y_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei Normen auf B_n, sodass*

1. *jede bezüglich $||\cdot||_{X_n}$ beschränkte Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine in B konvergente Teilfolge $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt,*

2. *aus $v_n \longrightarrow v$ in B und $||v_n||_{Y_n} \longrightarrow 0$, folgt $v = 0$.*

Dann gibt es eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{u_n\}$, sodass $u_{n_k} \longrightarrow u$ in $L^p((0,T), B)$.

Beweis Der Beweis basiert auf der Anwendung des Satzes 2.1. Hierfür prüfen wir nachfolgend die geforderten Voraussetzungen. Zunächst müssen wir dazu den Definitionsbereich der Funktion u_n erweitern. Damit u_n auf $L^p(\mathbb{R}, B)$ diskret fortgesetzt werden kann, definieren wir $\tilde{u}_n = \tilde{u}_n(t)$ auf dem Intervall $(-T, 2T)$ wie folgt:

$$\tilde{u}_n(t) = \begin{cases} u_i^n(t), & \text{für } t \in (-t_{i,n}\ , -t_{i-1,n}) \cup (t_{i-1,n}, t_{i,n}), \quad 1 \le i \le N_n \\ u^n_{N_n+1-i}(t), & \text{für } t \in (T + t_{i-1,n}\ , T + t_{i,n}), \quad 1 \le i \le N_{n.} \end{cases}$$

Des weiteren sei $\varphi \in C_c^\infty([-T, 2T], \mathbb{R})$ mit $0 \le \varphi \le 1$ und $\varphi(t) = 1$ für $t \in [0, T]$. Betrachte weiterhin die Fortsetzung von u_n auf $L^p(\mathbb{R}, B)$, bezeichnet mit $\bar{u}_n = \bar{u}_n(t)$, welche durch

$$\bar{u}_n(t) = \varphi(t)\tilde{u}_n(t).$$

beschrieben wird. *Voraussetzung 1* Nach Konstruktion ist $\bar{u}_n = u_n$ fast überall auf dem Intervall $[0, T]$. Um die erste Voraussetzung des Satzes 2.1 zu prüfen, bleibt zu zeigen, dass $\bar{u}_n$ unabhängig von n in der $L^p(\mathbb{R}, B)$-Norm beschränkt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} ||\bar{u}_n||^p_{L^p(\mathbb{R},B)} \ \le \ \int_{-T}^{2T} ||\tilde{u}_n(t)||^p_B \, dt &= \ 2\sum_{i=1}^{N_n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} ||u_i^n||^p_B \, dt + \sum_{i=1}^{N_n} \int_{T+t_{i-1}}^{T+t_i} ||u^n_{N_n+1-i}||^p_B \, dt \\ &= 2\sum_{i=1}^{N_n} \tau_n ||u_i^n||^p_B + \sum_{i=1}^{N_n} \tau_n ||u^n_{N_n+1-i}||^p_B \\ &= 3\sum_{i=1}^{N_n} \tau_n ||u_i^n||^p_B. \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme von Lemma 3.2 können wir die B-Norm mit der entsprechenden X_n-Norm abschätzen, sodass

$$||\bar{u}_n||^p_{L^p(\mathbb{R},B)} \ \le \ 3\ C_X^p \sum_{i=1}^{N_n} \tau_n ||u_i^n||^p_{X_n} \ \le \ 3\ C_X^p\ C_F. \qquad (3.5)$$

Der letzte Schritt konnte hierbei aus der Apriori-Abschätzung von Lemma 3.3 gefolgert werden.

Voraussetzung 2 Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Um zu zeigen, dass $\{\int_\mathbb{R} \bar{u}_n\ \psi(t)\,dt | n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt ist in B, genügt es auf Grund der ersten Voraussetzung zu zeigen, dass die beschriebene Menge in der X_n-Norm beschränkt ist. Wir betrachten

$$\int_\mathbb{R} \bar{u}_n\,\psi(t)\,dt \ \le \int\limits_{-T}^{2T} \tilde{u}_n\varphi(t)\,\psi(t)\,dt \ = \ 2\sum_{i=1}^{N_n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} u_i^n\,\psi(t)\,dt + \sum_{i=1}^{N_n}\int\limits_{T+t_{i-1}}^{T+t_i} u_{N_n+1-i}^n\,\psi(t)\,dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\xi \in [t_{i-1}, t_i]$ und ein $\xi' \in [T + t_{i-1}, T + t_i]$, sodass

$$\begin{aligned}\int_\mathbb{R} \bar{u}_n\ \psi(t)\,dt &= 2\sum_{i=1}^{N_n}\psi(\xi)\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} u_i^n\,dt + \sum_{i=1}^{N_n}\psi(\xi')\int\limits_{T+t_{i-1}}^{T+t_i} u_{N_n+1-i}^n\ dt \\ &\le 3\ C_\xi\sum_{i=1}^{N_n}\tau_n\ u_i^n,\end{aligned}$$

wobei $C_\xi = \psi(\xi) + \psi(\xi')$. Durch Anwenden der X_n-Norm und der diskreten Hölderschen Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}||\int_\mathbb{R} \bar{u}_n\ \psi(t)\,dt||_{X_n} &\le\ 3C_\xi\ \tau_n\sum_{i=1}^{N_n}||u_i^n||_{X_n} \\ &\le\ 3C_\xi\ \tau_n\left(\sum_{i=1}^{N_n}1^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{N_n}||u_i^n||_{X_n}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 3\ C_\xi\ (N_n\cdot\tau_n)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{N_n}\tau_n^p\ ||u_i^n||_{X_n}^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Nun können wir die Apriori-Abschätzung verwenden und nutzen, dass $T = N_n \cdot \tau_n$ und erhalten

$$||\int_\mathbb{R} \bar{u}_n\ \psi(t)\,dt||_{X_n}\ \le\ 3C_\xi T^{1-\frac{1}{p}}\ C_F.$$

Da T endlich ist, folgt die Beschränktheit von $\{\int_\mathbb{R} \bar{u}_n\ \psi(t)\,dt|n \in \mathbb{N}\}$ in der X_n-Norm und somit auch die relative Kompaktheit in B.

Voraussetzung 3 Für die dritte Voraussetzung des Satzes 2.1 zeigen wir die gleichmäßige Konvergenz von $||\bar{u}_n(\cdot + h) - \bar{u}_n||_{L^p(\mathbb{R},B)} \to 0$ für $h \to 0$ in $u_n \in B_n$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wir werden zeigen, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass $||\bar{u}_n(\cdot + h) - \bar{u}_n||_{L^p(\mathbb{R},B)} < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$ gilt.

Ohne Einschränkung wähle $0 < h < T$. Die Dreiecksungleichung liefert uns

$$\begin{aligned}||\bar{u}_n(\cdot + h) - \bar{u}_n||_{L^p(\mathbb{R},B)} &= ||\varphi(\cdot + h)\tilde{u}_n(\cdot + h) - \varphi\ \tilde{u}_n||_{L^p(\mathbb{R},B)} \\ &\le ||(\varphi(\cdot + h) - \varphi)\ \tilde{u}_n(\cdot + h)||_{L^p((-T,2T),B)} \\ &\quad + ||\varphi(\tilde{u}_n(\cdot + h) - \tilde{u}_n)||_{L^p((-T,2T),B)}.\end{aligned}$$

Wir wollen den ersten Term der rechten Seite mit T_1 und den zweiten mit T_2 bezeichnen. Demnach gilt

$$|T_1| \;\leq\; ||\varphi'||_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot h\; ||\tilde{u}_n(\cdot + h)||_{L^p((-T,2T),B)}.$$

Mit (3.5) folgt ferner, dass

$$|T_1| \;\leq\; ||\varphi||_{W^{1,\infty}} \cdot h\; C_X (3C_F)^{\frac{1}{p}},$$

welches für $h \to 0$ gegen 0 konvergiert. Für den zweiten Term der oberen rechten Seite können wir das Lemma von Ehrling, sowie die Jensensche Ungleichung anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} |T_2|^p &\leq \int_{-T}^{2T} ||\tilde{u}_n(t+h) - \tilde{u}_n(t)||_B^p \, dt \\ &\leq \frac{\varepsilon^p}{2^p} \int_{-T}^{2T} ||\tilde{u}_n(t+h) - \tilde{u}_n(t)||_{X_n}^p \, dt + \frac{(C(\varepsilon))^p}{2^p} \int_{-T}^{2T} ||\tilde{u}_n(t+h) - \tilde{u}_n(t)||_{Y_n}^p \, dt. \end{aligned}$$

Erneute Verwendung der Dreiecksungleichung liefert für den ersten Term der rechten Seite, bezeichnet mit $T_{2,1}$, die Ungleichung

$$T_{2,1} \;\leq\; \frac{\varepsilon^p}{2^{2p}} \left(\int_{-T}^{2T} ||\tilde{u}_n(t+h)||_{X_n}^p \, dt + \int_{-T}^{2T} ||\tilde{u}_n(t)||_{Y_n}^p \, dt \right) \;\leq\; \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p 6\; C_X^p\; C_F.$$

Es bleibt eine Abschätzung für den zweiten Term der rechten Seite zu zeigen. Hierzu bezeichnen wir mit $\Delta\tilde{u}_i^n$ den Sprung der stückweise konstanten Funktion $\tilde{u}_n$ an der Stelle $t_{i,n}$, wobei $-N_n \leq i \leq 2N_n$, d.h $\tilde{u}_i^n$ lässt sich darstellen als $\Delta\tilde{u}_i^n = u_i^n - u_{i-1}^n$. Weiterhin sei $\chi_i^h = \chi_i^h(t)$ die charakteristische Funktion auf dem Intervall $[t_{i,n} - h, t_{i,n}]$, welche durch

$$\chi_i^h(t) = \begin{cases} 1 & t < t_i < t+h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden kann. Offensichtlich gilt für $-N_n \leq i \leq 2N_n$, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_i^h(t)\, dt \;=\; \int_{t_i - h}^{t_i} 1\, dt \;=\; h, \tag{3.6}$$

sowie

$$\tau_n \sum_{i>-N_n}^{i<2N_n} \chi_i^h(t) \;\leq\; h + \tau_n. \tag{3.7}$$

Außerdem können wir mit Hilfe der Funktion $\chi_i^h(t)$ die Differenz zwischen $\tilde{u}_n(t+h)$ und $\tilde{u}_n(t)$ für $t \in (0,T)$ umschreiben, sodass:

$$\tilde{u}_n(t+h) - \tilde{u}_n(t) \;=\; \sum_{i>-N_n}^{i<2N_n} \chi_i^h(t)\; \Delta\tilde{u}_i^n.$$

Somit erhalten wir für den Term $T_{2,2}$ die Gleichung

$$T_{2,2} = \frac{(C(\varepsilon))^p}{2^p} \int\limits_{-T}^{2T} || \sum_{i>-N_n}^{i<2N_n} \chi_i^h(t) \Delta \tilde{u}_i^n ||_{Y_n}^p \, dt.$$

Anwendung der diskreten Hölderschen Ungleichung und (3.6) führen zu:

$$\begin{aligned}
T_{2,2} &\leq \frac{(C(\varepsilon))^p}{2^p} \int\limits_{-T}^{2T} \sum_{i>-N_n}^{i<2N_n} ||\Delta \tilde{u}_i^n||_{Y_n}^p \left(\left(\sum_{i>-N_n}^{i<2N_n} (\chi_i^h(t))^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right)^p \\
&\leq \frac{(C(\varepsilon))^p}{2^p} \sum_{i>-N_n}^{i<2N_n} ||\Delta \tilde{u}_i^n||_{Y_n}^p \int\limits_{-T}^{2T} \left(\sum_{i>-N_n}^{i<2N_n} \chi_i^h(t) \right)^{p-1} dt \\
&= \frac{(C(\varepsilon))^p}{2^p} \sum_{i>-N_n}^{i<2N_n} \tau_n || \frac{\Delta \tilde{u}_i^n}{\tau_n} ||_{Y_n}^p \int\limits_{-T}^{2T} \chi_i^h(t) \left(\sum_{i>-N_n}^{i<2N_n} \tau_n \; \chi_i^h(t) \right)^{p-1} dt \\
&\leq \frac{(C(\varepsilon))^p}{2^p} \sum_{i>-N_n}^{i<2N_n} \tau_n ||\hat{u}_{i,n}'||_{Y_n}^p \int\limits_{-T}^{2T} \chi_i^h(t) (h+\tau_n)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit (3.7) und der Apriori Abschätzung aus Lemma 3.3 folgern wir, dass

$$T_{2,2} \;\leq\; \frac{(C(\varepsilon))^p}{2^p} \, 3 \; C_F \; h(h+\tau_n)^{p-1}.$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned}
||\bar{u}_n(\cdot + h) - \bar{u}_n||_{L^p(\mathbb{R},B)} &\leq ||\varphi||_{W^{1,\infty}} \cdot h \; C_X (3C_F)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p 6 \; C_X^p \; C_F + \frac{(C(\varepsilon))^p}{2^p} 3 \; C_F \; h(h+\tau_n)^{p-1} \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

welches für ein entsprechend gewähltes δ die geforderte gleichmäßige Konvergenz zeigt. Dies vervollständigt den Beweis, da wir nun mit Hilfe des Satzes 2.1 schließen können, dass die Menge $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt ist in $L^p((0,T),B)$. Folglich existiert eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{u_n\}$, sodass $u_{n_k} \to u$ in $L^p((0,T),B)$.

□

4 Ausblick

In diesem Abschnitt soll kurz eine numerische Störungssimulation vorgestellt werden, mittels der die in den vorhergehenden Kapiteln erworbenen Erkenntnisse Anwendung finden können. Konkret geht es um die Darstellung eines Turbulenzmodells, welches in Anlehnung an die statistische Modellierung mittels RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) entstand. Diese Art der Modellierung ist für die Beschreibung von Turbulenzen derzeit am verbreitetsten und bietet die Möglichkeit Turbulenzen sowohl räumlich, als auch zeitlich in sehr kleinen Skalen zu betrachten.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \{2, 3\}$ ein beschränktes Gebiet, welches polygonale Gestalt für $d = 2$ beziehungsweise polyhedrale Form für $d = 3$ aufweise. Weiterhin seien:

$\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega \times (0,T))^d$	...äußere Kräfte
$\boldsymbol{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$	...Reynoldsche Geschwindigkeit
$p : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$	...skalares Druckfeld/ Druck
$k : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$	...Fluktuationsschwankung
$\mu > 0$	...Diffusität, mit

- $\mu(k) = \mu_0 + \mu_t(k), \quad \mu_0 > 0,$
- $\mu_t(k) = \min[k^{\frac{1}{2}},\ \mu_{t,\infty}], \quad \mu_{t,\infty} > 0.$

Vorgelegt sei nun das parabolische Problem (P)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu(k)\nabla \boldsymbol{u}) + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ in } \Omega \times (0,T) \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ in } \Omega \times (0,T) \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu(k)\nabla k) + \operatorname{div}(k\boldsymbol{u}) = \mu_t(k)|\nabla \boldsymbol{u}|^2. \tag{4.3}$$

Mit den homogenen Dirichletschen Randbedingungen an $\boldsymbol{u}$ und k

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0,T)$$

$$k(\boldsymbol{x}, t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0,T)$$

und den Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{u}(\cdot, 0) = \boldsymbol{u}_0 \in L^2(\Omega)^d \text{ in } \Omega$$

$$k(\cdot, 0) = k_0 \in L^1(\Omega) \text{ in } \Omega$$

Die Gleichungen (4.1) – (4.2) erlauben $\boldsymbol{u} \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega)^d)$, wohingegen (4.3) lediglich $\boldsymbol{u} \in L^1(\Omega \times (0,T))$ zulässt.

Indem wir jeweils mit einer Testfunktion - die den Anfangsbedingungen genügt - multiplizieren, anschließend integrieren und im Hauptteil partiell differenzieren, können wir zu der schwachen Formulierung des Problems (P) übergehen. Hierfür definiere

$$\boldsymbol{V} = \{v \in H_0^1(\Omega)^d : \text{div } v = 0 \text{ fü in } \Omega\}.$$

Zu gegebenem $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega \times (0,T))^d$, $\boldsymbol{u}_0 \in L^2(\Omega)^d$ und $k_0 \in L^1(\Omega)$ finde also

- $\boldsymbol{u} \in L^2((0,T), V) \cap L^\infty((0,T), L^2(\Omega)^d)$,
- $k \in L^p((0,T), W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \forall\, p \in [1, (d+2)/(d+1)]$,

sodasss für alle $\boldsymbol{v} \in \cap\, C_c^\infty(\Omega \times [0,T))^d$, mit div$v = 0$ für alle $t \in [0,T]$, $w \in C_c^\infty(\Omega \times [0,T))$ und $Q = \Omega \times (0,T)$ gilt:

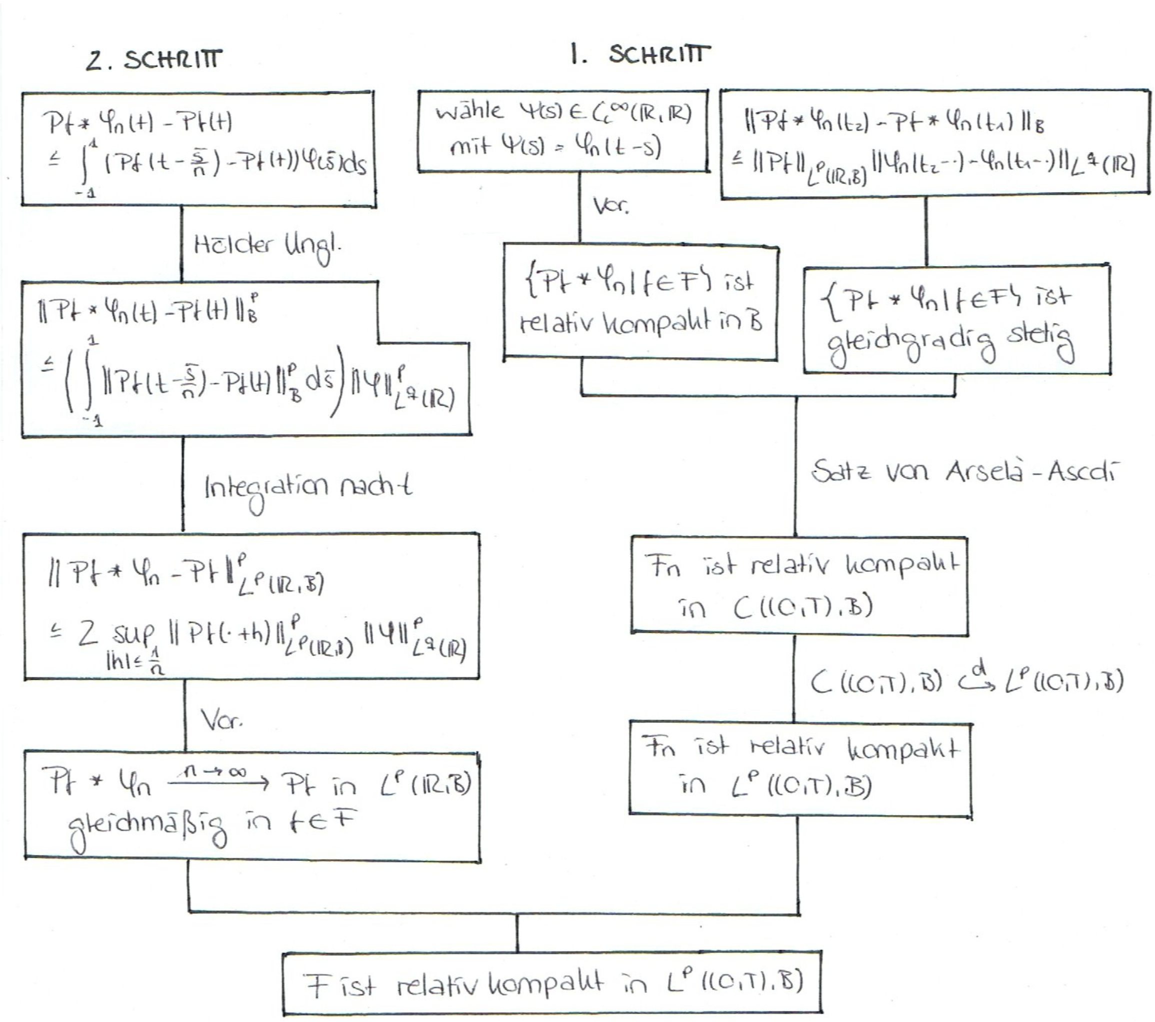
$$-\int_Q \boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\ d\boldsymbol{x}dt + \int_Q \mu(k) \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}\ d\boldsymbol{x}dt = \int_Q \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\ d\boldsymbol{x}dt + \int_\Omega \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{v}\ d\boldsymbol{x}.$$

$$-\int_Q k\ \frac{\partial w}{\partial t}\ d\boldsymbol{x}dt + \int_Q \mu(k) \nabla k \ \cdot\ \nabla w\ d\boldsymbol{x}dt - \int_\Omega k\boldsymbol{u} \cdot \nabla w\, d\boldsymbol{x}dt$$
$$= \int_Q \mu_t(k)\ |\nabla \boldsymbol{u}|^2 w\ d\boldsymbol{x}dt + \int_\Omega k_0 w\ d\boldsymbol{x}$$

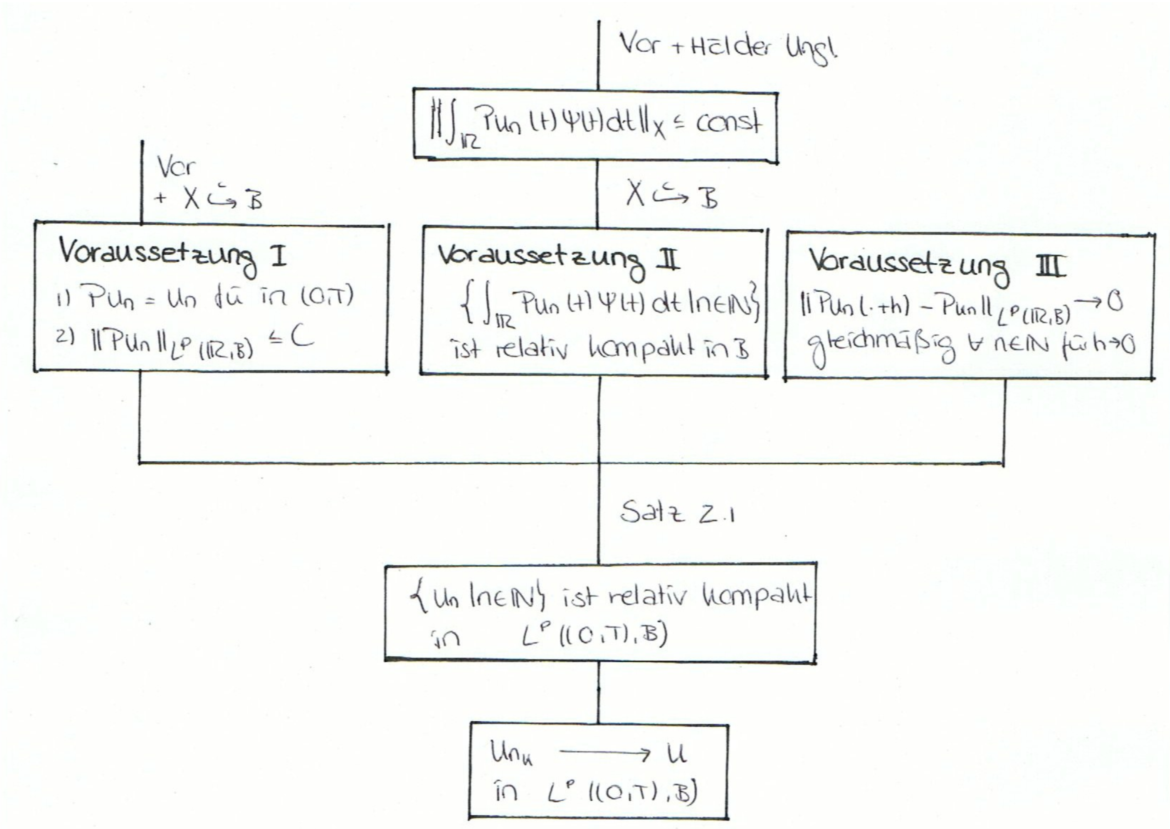
Durch Konstruktion einer Diskretisierung für das System (4.1) – (4.3) lässt sich zeigen, dass erhaltene numerische Lösungen gegen eine schwache Lösung des Problems konvergieren, d.h gegen einen Grenzwert, der den Gleichungen (4.4), (4.5) genügt. Die Diskretisierung erfordert in diesem Fall sowohl eine Diskretisierung in der Zeit, als auch im Ort.
Die Raumdiskretisierung lässt sich hierbei mit Hilfe einer Ausgangstriangulierung des Gebietes Ω realisieren, welches entsprechend in reguläre d-Siplizes unterteilt wird. Die Zeitdiskretisierung basiert hingegen auf einer äquidistanten Unterteilung des Zeitintervalls $(0,T)$. Anhand dieser Konstruktion und der Verwendung von Verfahren aus der finiten Volumen und finiten Elemente Theorie kann man letztlich die Existenz eines Grenzwertes für das obige Turbulenzmodell nachweisen. Das genaue Verfahren soll jedoch im Rahmen dieser Seminararbeit nicht näher erläutert werden. Hierfür sei auf die Arbeiten [**?**], [**?**] und [**?**] verwiesen.

5 Anhang

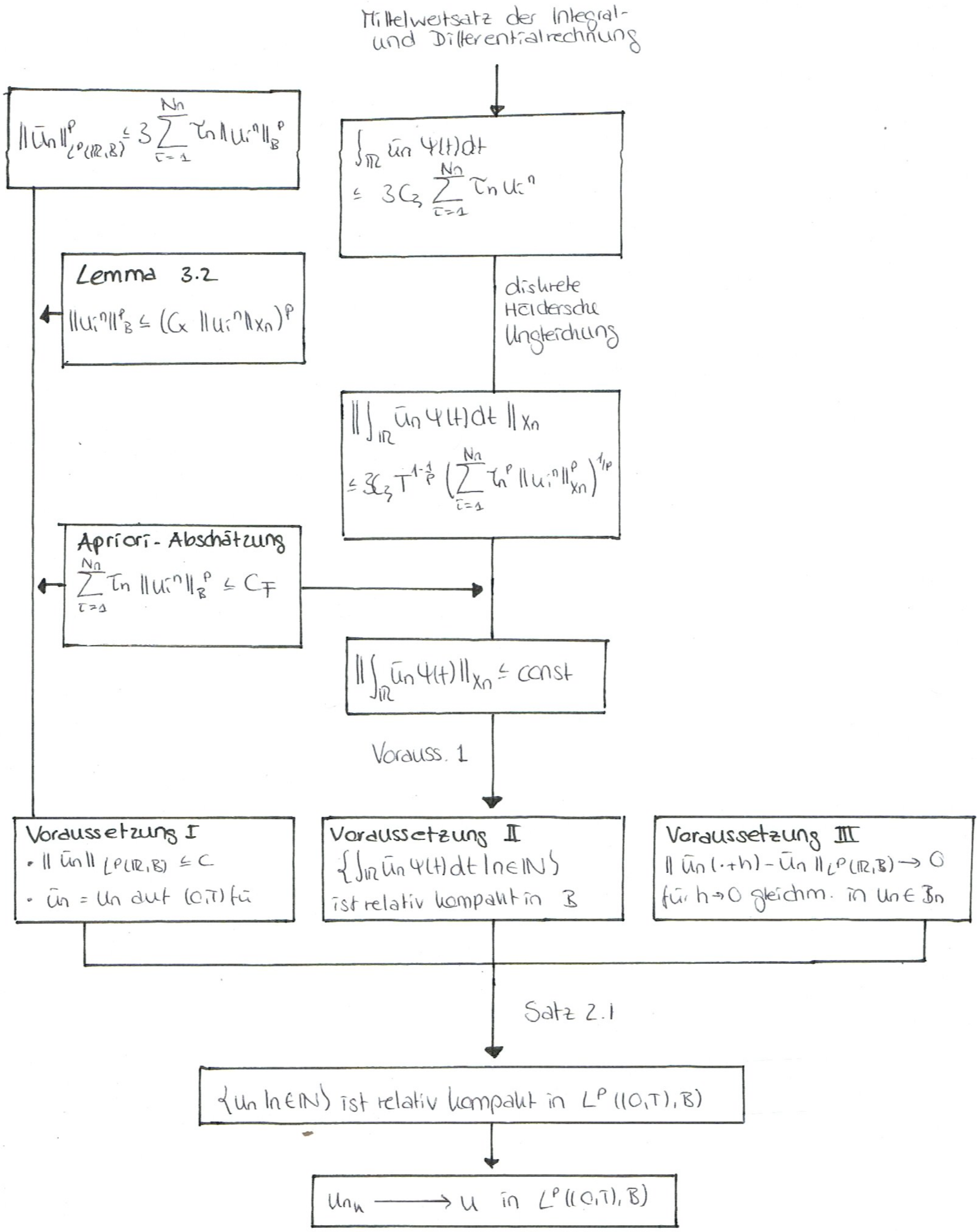
Beweisskizze zu Satz 2.1



Beweisskizze zu Satz 3.1



Beweisskizze zu Satz 3.2



Literaturverzeichnis

[] Emmrich, E.: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen: Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende*. 1. Aufl. Wiesbaden: Vieweg, 2004

[] Gallouët, T.; Herbin, R.; Latché, J.-C.: A convergent finite element-finite volume scheme for the compressible Stokes problem: Part 1, the isothermal case. *Mathematics of Computation* 267 (2009), 1333–1352

[] Gallouët, T. ; Latché, J.-C.: Compactness of discrete approximate solutions to parabolic PDEs: Application to a turbulence model. `http://www.cmi.univ-mrs.fr/ gallouet/art.d/gl-ausid.pdf`

[] Gallouët, T.; Latché, J.-C.; Larcher, A.: Convergence of a finite volume scheme for the convection-diffusion equation with L^1 data. `http://www.cmi.univ-mrs.fr/ gallouet/art.d/gll-l1.pdf`

[] Ruzicka, M.: *Nichtlineare Funktionalanalysis: Eine Einführung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004

[] Simon, J.: Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 146 (1987), 65–96