

# Tschebyscheff-Polynome, allgemeine orthogonale Polynome sowie deren Anwendung in der Gauß-Quadratur

Bachelorarbeit im Rahmen des Seminars

„Numerische Mathematik“

Wintersemester 2009/2010

Veranstalter: Prof. Dr. W.-J. Beyn, Prof. Dr. E. Emmrich, Dr. T. Hüls

vorgelegt am 23. März 2010 von:

Mathias Kiekhäfer

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Tschebyscheff-Polynome</b>	<b>4</b>
1.1 Der Fehler bei der Polynominterpolation . . . . .	4
1.2 Definition und grundlegende Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome . . . . .	5
1.3 Die Optimalitätseigenschaften der Tschebyscheff-Stützstellen . . . . .	7
1.4 Weiterführende Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome . . . . .	10
1.5 Exkurs: Tschebyscheff-Polynome zweiter Art . . . . .	13
<b>2 Orthogonale Polynome</b>	<b>14</b>
2.1 Definitionen und Rekursionsformeln für orthogonale Polynome . . . . .	14
2.2 Nullstellen von Orthogonalen Polynomen . . . . .	16
2.3 Beispiele . . . . .	18
2.3.1 Tschebyscheff-Polynome . . . . .	18
2.3.2 Legendre-Polynome . . . . .	19
<b>3 Die Gaußsche Quadraturformel</b>	<b>22</b>
3.1 Allgemeine Quadraturformeln und Exaktheitsgrad . . . . .	22
3.2 Wahl der Stützstellen und Gewichte . . . . .	22
3.3 Die Optimalität der Gaußschen Quadraturformel . . . . .	24
3.4 Alternative Darstellung der optimalen Gewichte . . . . .	25
3.5 Beispiel: Die Gauß-Tschebyscheff-Quadratur . . . . .	26
<b>Zusammenfassung und Literaturhinweise</b>	<b>28</b>
<b>Literatur</b>	<b>29</b>
<b>Eigenständigkeitserklärung</b>	<b>30</b>

# Einleitung

Der zentrale Aspekt dieser Ausarbeitung sind die nach dem russischen Mathematiker Pafnuti L. Tschebyscheff (1821-1894) benannten Tschebyscheff-Polynome. Tschebyscheff hat unter anderem erfolgreich auf dem Gebiet der Approximationstheorie gearbeitet (vgl. Wußing/Arnold [8, Seite 411 ff.]). Die Tschebyscheff-Polynome spielen somit in der Mathematik und speziell in der Approximationstheorie eine gewichtige Rolle, insbesondere bei der Polynominterpolation. Dementsprechend wird eine der zentralen Fragestellungen des ersten Kapitels dieser Arbeit sein, wie die Stützstellen bei der Polynominterpolation optimalerweise gewählt werden sollten. Darüber hinaus werden die Tschebyscheff-Polynome im zweiten Kapitel auf eine größere Klasse von Polynomen, die sogenannten orthogonalen Polynome, verallgemeinert. Im dritten Kapitel geht es grundsätzlich um die Fragestellung, wie sich Integrale durch Quadraturformeln idealerweise approximieren lassen und welche Rolle dabei die zuvor kennengelernten orthogonalen Polynome haben. Im Folgenden wird nun noch ein etwas detaillierterer Ausblick auf den Inhalt dieser Ausarbeitung gegeben.

Zu Beginn der Arbeit wird die Einführung der Tschebyscheff-Polynome dadurch motiviert, dass der bei der Polynominterpolation auftretende Fehler erläutert wird, zu dessen Reduzierung die Tschebyscheff-Polynome entscheidend beitragen können. Nach Definition und Darlegung einiger elementarer Eigenschaften der Polynome wird man schließlich sehen, welcher Zusammenhang zwischen dem Interpolationsfehler und den Tschebyscheff-Polynomen besteht und insbesondere welche Rolle deren Nullstellen dabei spielen. Schließlich werden zum Ende des ersten Kapitels noch eine Vielzahl an interessanten und weitreichenden Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome, die in mehreren Teilbereichen der Mathematik angesiedelt sind, gezeigt. Zur Abrundung der Thematik wird letztlich noch kurz auf die sogenannten Tschebyscheff-Polynome zweiter Art eingegangen, die in ihren Eigenschaften einige Ähnlichkeiten zu den Tschebyscheff-Polynomen erster Art aufweisen.

Das zweite Kapitel behandelt mit den allgemeinen orthogonalen Polynomen nun wie erwähnt eine größere Klasse von Polynomen, zu denen auch die Tschebyscheff-Polynome gehören. Nach einer Klärung, was die orthogonalen Polynome eigentlich ausmacht, wird eine wichtige Rekursionsformel eingeführt, mit deren Hilfe die Polynome bestimmt werden können. Explizit eingegangen wird schließlich noch auf die Nullstellen der orthogonalen Polynome und wie diese berechnet und dargestellt werden können. Anhand der Tschebyscheff-Polynome und den nach dem französischen Mathematiker Adrien-Marie Legendre benannten Legendre-Polynomen, werden die Erkenntnisse des Kapitels letztlich an konkreten Beispielen veranschaulicht.

Im dritten und letzten Kapitel dieser Ausarbeitung geht es schließlich um einen Anwendungsbereich der beschriebenen orthogonalen Polynome. Bei der sogenannten Gauß-Quadratur, einem Spezialfall der zur Approximation von Integralen bestimmten Quadraturformeln, werden die Nullstellen der orthogonalen Polynome zum Tragen kommen. Nachdem dieser Zusammenhang zwischen der Quadratur und den Nullstellen geklärt ist, wird letztlich noch die Güte und der auftretende Fehler der Gauß-Quadratur diskutiert.

Die Ausarbeitung orientiert sich vordergründig an den Ergebnissen aus den Büchern „Numerische Mathematik kompakt“ von Robert Plato [6, Seite 12-17; 134-141] und „Grundlagen der Numerischen Mathematik und Wissenschaftlichen Rechnens“ von Martin Hanke-Bourgeois [5, Seite 284-297; 336-341].

# Kapitel 1

## Tschebyscheff-Polynome

### 1.1 Der Fehler bei der Polynominterpolation

Für eine möglichst gute Approximation einer Funktion durch ein Polynom mittels Polynominterpolation ist es von großer Wichtigkeit, die zu Grunde liegenden Stützstellen richtig zu wählen. Das Ziel dieser Ausarbeitung ist es also zunächst, die bestmöglichen Stützstellen  $x_1, \dots, x_{n+1} \in [a, b] \subset \mathbb{R}$  (paarweise verschieden) zu finden, die den Fehler zwischen der Ausgangsfunktion und dem Interpolationspolynom vom Grad  $n$  auf dem Intervall  $[a, b]$  so gering wie möglich halten.

Um einen Ansatz zur Lösung dieses Problems zu finden, betrachten wir zunächst eine Abschätzung des Fehlers, der bei der Polynominterpolation auftritt:

Ist  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$  und  $p \in P_n$  das Interpolationspolynom zu den Stützstellen  $x_1, \dots, x_{n+1} \in [a, b]$ , dann existiert zu jedem Punkt  $x \in [a, b]$  ein Zwischenwert  $\xi \in [a, b]$ , sodass

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k). \quad (1.1)$$

Ein Beweis dieser Aussage ist beispielsweise in Plato [6, Seite 10] zu finden. Die Darstellung zeigt nun deutlich auf, dass die Wahl der Stützstellen direkt in den Interpolationsfehler eingeht. Als Beispiel ist in Abbildung 1.1 das Polynom  $x \mapsto \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k)$  für  $n = 10$  und äquidistant verteilte Stützstellen auf dem Intervall  $[-1, 1]$  dargestellt.

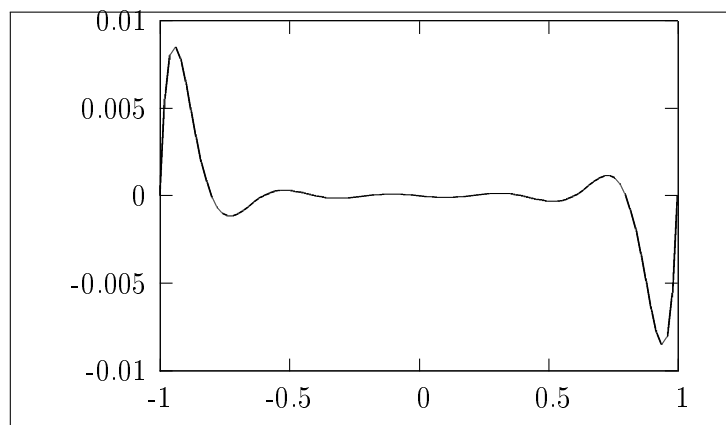


Abbildung 1.1: Fehlerpolynom für  $n = 10$  und äquidistante Stützstellen.

Es ist darauf deutlich zu erkennen, dass das Polynom an den Rändern des Intervalls einen betragsmäßig relativ großen Wert annimmt, was somit auf stärkere Fehler und Oszillationen an den Rändern bei der Polynominterpolation hinweist.

Zur Bestimmung der optimalen Stützstellen ergibt sich also die Aufgabe,  $x_1, \dots, x_{n+1} \in [a, b]$  so zu bestimmen, dass  $\max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k) \right|$  minimal wird. Eine entscheidende Rolle dabei spielen die im folgenden Abschnitt definierten Tschebyscheff-Polynome.

## 1.2 Definition und grundlegende Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome

Wir kommen nun zu der Definition, die diesem Kapitel ihren Namen gibt.

**Definition 1.1.** Die Tschebyscheff-Polynome erster Art werden für  $n \in \mathbb{N}$  definiert als

$$T_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_n(t) := \cos(n \cdot \arccos t).$$

*Anmerkung:* Soweit nicht anders vermerkt, werden die Tschebyscheff-Polynome erster Art im Folgenden einfach als Tschebyscheff-Polynome bezeichnet.

Ausgehend von dieser Definition lässt sich nun bereits der erste Satz formulieren, der einige wichtige Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome zusammenfasst.

**Satz 1.2.** (*Grundlegende Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome*)

Für die Tschebyscheff-Polynome gelten die folgenden Eigenschaften:

i)  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$  für  $\theta \in [0, \pi]$  und  $\max_{t \in [-1, 1]} |T_n(t)| = 1$ .

ii) Es gilt die Rekursionsformel

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_{n+1}(t) = 2t \cdot T_n(t) - T_{n-1}(t) \quad \text{für } t \in [-1, 1].$$

Setzt man den Definitionsbereich der Rekursion auf alle  $t \in \mathbb{R}$  fort, so erhält man  $T_n \in P_n$  mit dem Leitkoeffizienten  $2^{n-1}$  für  $n \geq 1$ . Dabei bezeichnet  $P_n$  den Raum der reellen Polynome vom Höchstgrad  $n$ .

iii)  $T_n$  hat  $(n + 1)$  Extrema  $s_k^{(n)}$  auf  $[-1, 1]$ , nämlich

$$s_k^{(n)} := \cos \frac{k\pi}{n} \quad \text{und es gilt } T_n(s_k^{(n)}) = (-1)^k \quad \text{für } k = 0, \dots, n.$$

iv)  $T_n$  hat  $n$  einfache Nullstellen  $t_k^{(n)}$  auf  $[-1, 1]$ :

$$t_k^{(n)} := \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

*Beweis.*

i) Da  $\nu \mapsto \cos \nu$  auf  $[0, \pi]$  umkehrbar ist mit der Umkehrfunktion  $t \mapsto \arccos t$ , gilt  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ .

Zusätzlich gilt  $T_n(1) = \cos(n \cdot 0) = 1$  und somit wegen der Beschränktheit des Cosinus auch  $\max_{t \in [-1, 1]} |T_n(t)| = 1$ .

ii) Es gilt  $T_0(t) = \cos 0 = 1$  und  $T_1(t) = \cos(\arccos t) = t$  für  $t \in [-1, 1]$ .

Es gilt nun ferner nach den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen die Formel

$$2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right) = \cos x + \cos y. \quad (1.2)$$

Setzt man nun  $x = (n+1)\theta$ ,  $y = (n-1)\theta$ , so gilt  $\frac{x+y}{2} = n\theta$  und  $\frac{x-y}{2} = \theta$ . Schließlich folgt unter Verwendung von Teil i), sowie der Gleichung (1.2) für  $t = \cos(\theta)$

$$2tT_n(t) - T_{n-1}(t) = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta) = T_{n+1}(t),$$

womit die Rekursionsformel für  $t \in [-1, 1]$  gezeigt wurde.

Setzt man diese Rekursionsformel nun für  $t \in \mathbb{R}$  fort, so folgt dass der Leitkoeffizient gerade  $2^{n-1}$  ist, sowie  $T_n \in P_n$  direkt aus der Rekursion.

iii) Für  $k = 0, \dots, n$  ist  $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$  und somit folgt aus Teil i)

$$T_n(s_k^{(n)}) = T_n(\cos \frac{k\pi}{n}) = \cos \frac{nk\pi}{n} = \cos k\pi = (-1)^k.$$

Offensichtlich liegen die Extremstellen  $s_k^{(n)}$  alle in dem Intervall  $[-1, 1]$ , da der Cosinus betragsmäßig durch 1 beschränkt ist.

iv) Mit den gleichen Begründungen wie in iii) folgt

$$T_n(t_k^{(n)}) = \cos(\frac{1}{2}(2k-1)\pi) = 0 \text{ für } k \in \{1, \dots, n\}.$$

□

Die Aussagen von Satz 1.2 werden im Laufe der gesamten Thematik noch sehr häufig von Bedeutung sein.

**Beispiel 1.3.** Aus der Rekursionsformel ergeben sich die ersten Tschebyscheff-Polynome folgendermaßen:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, & T_1(t) &= t, \\ T_2(t) &= 2t^2 - 1, & T_3(t) &= 4t^3 - 3t, \\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1, & T_5(t) &= 16t^5 - 20t^3 + 5t. \end{aligned}$$

Es fällt auf, wie auch direkt aus der Rekursionsformel ersichtlich, dass die Tschebyscheff-Polynome abwechselnd gerade und ungerade sind.

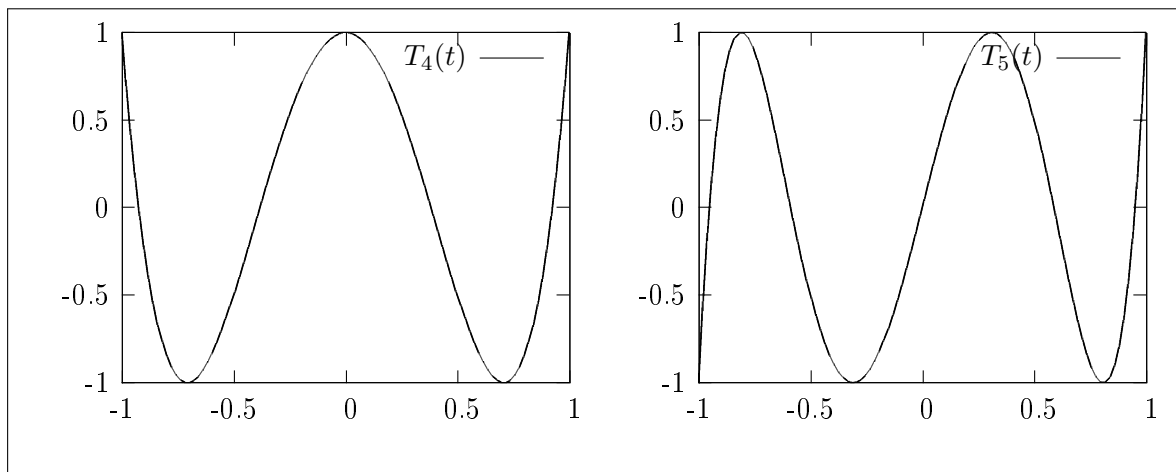


Abbildung 1.2: Darstellung von  $T_4$  und  $T_5$  auf  $[-1, 1]$ .

### 1.3 Die Optimalitätseigenschaften der Tschebyscheff-Stützstellen

Der nächste Satz liefert nun schon einen Großteil der Antwort auf die Aufgabe, die zu Beginn der Ausarbeitung gestellt wurde. Wie im Folgenden erläutert wird, minimieren nämlich gerade die Nullstellen des  $(n + 1)$ -ten Tschebyscheff-Polynoms den Ausdruck

$$\max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (t - x_k) \right|.$$

**Satz 1.4.** (*Optimalitätseigenschaft auf  $[-1, 1]$* )

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für das  $(n + 1)$ -te Tschebyscheff-Polynom  $T_{n+1}$  und seine  $(n + 1)$  Nullstellen  $t_k^{(n+1)}$  gelten die beiden Identitäten

$$\min_{x_1, \dots, x_{n+1} \in [-1, 1]} \max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (t - x_k) \right| = \max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (t - t_k^{(n+1)}) \right| \quad (1.3)$$

$$= \frac{1}{2^n}. \quad (1.4)$$

*Beweis.* Wir kommen zunächst zum Beweis von Gleichung (1.4):

Das Tschebyscheff-Polynom  $T_{n+1}$  hat nach Satz 1.2 den Leitkoeffizienten  $2^n$  und die  $(n + 1)$  Nullstellen  $t_k^{(n+1)}$ . Dies sind alle Nullstellen des Polynoms, da  $T_{n+1}$  den Grad  $(n + 1)$  hat und ansonsten  $T_{n+1} \equiv 0$  gelten würde. Somit zerfällt das Polynom in Linearfaktoren und es folgt

$$T_{n+1}(t) = 2^n \cdot \prod_{k=1}^{n+1} (t - t_k^{(n+1)}) \quad \text{und schließlich}$$

$$\max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (t - t_k^{(n+1)}) \right| = \frac{1}{2^n} \cdot \max_{t \in [-1, 1]} |T_{n+1}(t)| = \frac{1}{2^n}.$$

Für den Beweis von Gleichung (1.3) ist die Relation “ $\leq$ ” bereits klar, da das Minimum über  $x_1, \dots, x_{n+1} \in [-1, 1]$  des Ausdrucks offensichtlich nicht größer sein kann als für die konkreten Werte  $t_k^{(n+1)}$  aus  $[-1, 1]$ .

Es wird nun die Gültigkeit von

$$\min_{x_1, \dots, x_{n+1} \in [-1, 1]} \max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (t - x_k) \right| \geq \frac{1}{2^n}$$

gezeigt. Angenommen, es würden Zahlen  $x_1, \dots, x_{n+1} \in [-1, 1]$  existieren, für die die Ungleichung  $\max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (t - x_k) \right| < \frac{1}{2^n}$  erfüllt ist. Seien im Folgenden

$$\omega(t) := \prod_{k=1}^{n+1} (t - x_k) \quad \text{und} \quad \mathcal{P} := \frac{1}{2^n} T_{n+1} - \omega.$$

Per Definition ist  $\mathcal{P}$  also ein Polynom vom Grad  $n$ . Da nach Satz 1.2 für die mit  $s_k^{(n+1)}$ ,  $k \in \{0, \dots, n + 1\}$ , bezeichneten Extremstellen von  $T_{n+1}$  gilt, dass  $T_{n+1}(s_k^{(n+1)}) = (-1)^k$  ist, folgt

- für gerade  $k$ :  $\frac{1}{2^n} T_{n+1}(s_k^{(n+1)}) = \frac{1}{2^n}$ , sowie nach Annahme  $\omega(s_k^{(n+1)}) < \frac{1}{2^n}$  und schließlich

$$\mathcal{P}(s_k^{(n+1)}) > 0,$$

- für ungerade  $k$ :  $\frac{1}{2^n} T_{n+1}(s_k^{(n+1)}) = -\frac{1}{2^n}$ , sowie nach Annahme  $\omega(s_k^{(n+1)}) > -\frac{1}{2^n}$  und schließlich

$$\mathcal{P}(s_k^{(n+1)}) < 0.$$

Zwischen zwei beliebigen benachbarten  $s_k^{(n+1)}$  hat das Polynom  $\mathcal{P}$  also einen Vorzeichenwechsel, insgesamt  $(n+1)$  im Intervall  $[-1, 1]$ , da  $T_{n+1}$  genau  $(n+2)$  Extremstellen auf  $[-1, 1]$  besitzt. Da  $\mathcal{P}$  als Polynom stetig ist, besitzt es auf dem betrachteten Intervall nach dem Zwischenwertsatz also  $(n+1)$  paarweise verschiedene Nullstellen. Zusätzlich ist  $\mathcal{P}$  vom Grad  $n$ , woraus  $\mathcal{P} \equiv 0$  folgt und somit auch  $\omega \equiv T_{n+1}$ . Genau wie  $T_{n+1}$  hat  $\omega$  also ein Maximum von  $\frac{1}{2^n}$ , was einen Widerspruch zur Annahme darstellt. Somit ist die Gleichheit in (1.3) bewiesen.  $\square$

Der Satz liefert somit optimale Stützstellen für die Polynominterpolation auf dem Intervall  $[-1, 1]$ , nämlich durch Bestimmung der Nullstellen des geeigneten Tschebyscheff-Polynoms. Wie diese Erkenntnis auf ein beliebiges Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  verallgemeinert werden kann, zeigt nun der folgende Satz.

**Satz 1.5.** (*Optimalitätseigenschaft auf  $[a, b]$* )

Sei per Definition die lineare Abbildung  $\psi$  gegeben durch

$$\psi : [-1, 1] \rightarrow [a, b], \text{ mit } \psi(t) = \frac{1}{2}((b-a)t + a + b).$$

Dann gilt

$$\min_{x_1, \dots, x_{n+1} \in [a, b]} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k) \right| = \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (x - \psi(t_k^{(n+1)})) \right| \quad (1.5)$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{2 \cdot 4^n}. \quad (1.6)$$

*Beweis.* Der Beweis der beiden Gleichungen lässt sich im Wesentlichen durch Substitutionen auf die Aussagen von Satz 1.4 übertragen. Anzumerken ist im Vorfeld, dass die Abbildung  $\psi$  offenbar bijektiv ist und somit alle Werte im Intervall  $[a, b]$  von  $\psi$  getroffen werden. Deshalb folgt

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (x - \psi(t_k^{(n+1)})) \right| &= \max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (\psi(t) - \psi(t_k^{(n+1)})) \right| \\ &= \max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} \left( \frac{1}{2}(b-a)(t - t_k^{(n+1)}) \right) \right| \\ &= \max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (t - t_k^{(n+1)}) \right| \left( \frac{b-a}{2} \right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^n} \left( \frac{b-a}{2} \right)^{n+1} = \frac{(b-a)^{n+1}}{2 \cdot 4^n}, \end{aligned}$$

womit Gleichung (1.6) bewiesen ist. Benutzt wurde dabei im vorletzten Schritt die Aussage von Satz 1.4. Bei der Gleichung (1.5) ist die Relation “ $\leq$ ” offensichtlich gültig. Es bleibt noch zu zeigen, dass

$$\min_{x_1, \dots, x_{n+1} \in [a, b]} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k) \right| \geq \frac{(b-a)^{n+1}}{2 \cdot 4^n} \text{ gilt.}$$



Seien nun  $x_1, \dots, x_{n+1} \in [a, b]$  beliebig und  $y_1, \dots, y_{n+1} \in [-1, 1]$  die jeweiligen Urbilder unter der bijektiven Funktion  $\psi$ , also  $\psi(y_i) = x_i$  für  $i = 1, \dots, n + 1$ . Mit dieser Festlegung folgt

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k) \right| &= \max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (\psi(t) - \psi(y_k)) \right| \\ &= \max_{t \in [-1, 1]} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (t - y_k) \right| \left( \frac{b-a}{2} \right)^{n+1} \\ &\geq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{(b-a)^{n+1}}{2 \cdot 4^n}. \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung wurde erneut die Aussage von Satz 1.4 benutzt. Somit wurde die Gültigkeit von beiden Aussagen des Satzes gezeigt.  $\square$

Durch Nutzung dieses Satzes ist es nun möglich, für die Polynominterpolation auf einem beliebigen Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  die optimalen Stützstellen zu finden. Diese lassen sich nun also bestimmen, indem die Nullstellen des geeigneten Tschebyscheff-Polynoms berechnet und durch Anwendung der Funktion  $\psi$  auf das gewünschte Intervall transformiert werden. Welche Bedeutung die Wahl dieser optimalen Stützstellen konkret hat, lässt sich in Abbildung 1.3 erkennen, in der die Interpolation der Funktion  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$  auf dem Intervall  $[-5, 5]$  durch ein Polynom vom Grad 10 dargestellt ist. Verwendet wurden hierzu einmal äquidistante Stützstellen und ein anderes Mal die transformierten Tschebyscheff-Stützstellen. Das Beispiel ist auch als Beispiel von Runge bekannt (vgl. Plato [6, Seite 17]).

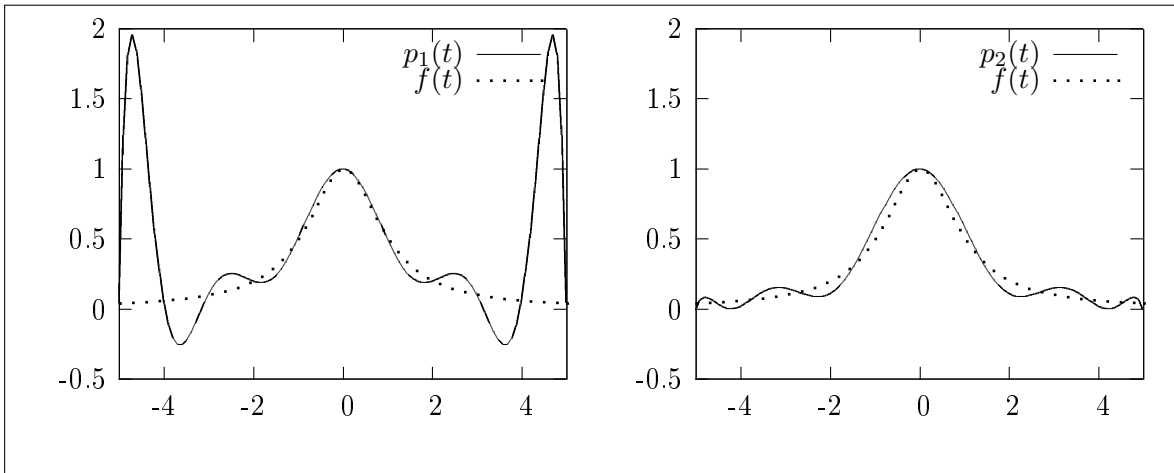


Abbildung 1.3: Interpolierende Polynome  $p_1, p_2 \in P_{10}$  von  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$  auf dem Intervall  $[-5, 5]$  mit äquidistanten Stützstellen (links) sowie Tschebyscheff-Stützstellen (rechts).

Es fällt deutlich auf, dass der Fehler zwischen Funktion und Interpolationspolynom bei der Verwendung von äquidistanten Stützstellen an den Rändern des Intervalls sehr groß ist, während die Tschebyscheff-Stützstellen auf dem gesamten Intervall eine sehr gute Approximation liefern.

Somit wurde der Zusammenhang zwischen den Tschebyscheff-Polynomen und der Wahl der Stützstellen bei der Polynominterpolation geklärt. Allerdings haben die Tschebyscheff-Polynome auch noch eine Reihe von anderen wichtigen und interessanten Eigenschaften in der Mathematik und speziell in der Approximationstheorie, die im nächsten Abschnitt noch weiter erläutert werden.

## 1.4 Weiterführende Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome

Der erste Satz dieses Abschnittes macht eine Aussage über die Approximation von Monomen mit Hilfe der Tschebyscheff-Polynome (vgl. Hämmerlin/Hoffmann [4, Seite 163 f.]).

**Satz 1.6.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und

$$\tilde{p}(t) := t^n - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(t).$$

Dann ist  $\tilde{p} \in P_{n-1}$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  das Proximum an das Monom  $f(t) := t^n$ .

*Beweis.* Zum Beweis dieser Aussage wird zunächst die Gültigkeit des Alternantensatzes vorausgesetzt. Dieser sagt aus, dass ein Polynom  $g \in P_{n-1}$  genau dann ein Proximum an  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  ist, wenn eine Alternante  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$  existiert. Dies bedeutet, dass  $d := f - g$  an diesen Stellen alternierend den Maximalabstand zwischen  $f$  und  $g$  annimmt, also  $|d(x_i)| = \|d\|_\infty$  für  $i = 1, \dots, n+1$  und  $d(x_i) = -d(x_{i+1})$  für  $i = 1, \dots, n$ . Der Beweis des Satzes ist zum Beispiel in Hämmerlin/Hoffmann [4, Seite 157] nachzulesen.

Es stellt sich nun heraus, dass die  $(n+1)$  Extremstellen  $s_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{n}$  des  $n$ -ten Tschebyscheff-Polynoms eine Alternante für  $d(t) := t^n - \tilde{p}(t) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)$  bilden, denn

- $d(\cos \frac{k\pi}{n}) = \frac{1}{2^{n-1}}$  für gerade  $k$ ,
- $d(\cos \frac{k\pi}{n}) = -\frac{1}{2^{n-1}}$  für ungerade  $k$  und schließlich
- $\|d\|_\infty = \max_{t \in [-1, 1]} |\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)| = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Zusammen ergibt sich also  $d(s_k^{(n)}) = (-1)^k \cdot \|d\|_\infty$  und somit folgt aus dem Alternantensatz die Behauptung, dass  $\tilde{p}$  im Raum  $P_{n-1}$  – eingeschränkt auf das Intervall  $[-1, 1]$  – ein Proximum an  $t \mapsto t^n$  ist.  $\square$

Unmittelbar aus diesem Satz lässt sich nun eine weitere interessante Eigenschaft der Tschebyscheff-Polynome ableiten.

**Folgerung 1.7.** Sei  $\hat{P}_n := \{p \in \{a_n x^n + \dots + a_0 x^0\} \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n = 1\}$  die Menge aller Polynome vom exakten Grad  $n$  und Leitkoeffizient 1.

Dann gilt auf dem Intervall  $[-1, 1]$

$$\left\| \frac{1}{2^{n-1}}T_n \right\|_\infty = \min_{p \in \hat{P}_n} \|p\|_\infty.$$

*Beweis.* Da nach Satz 1.6 das Polynom  $\tilde{p}$  ein Proximum an  $t \mapsto t^n$  ist, folgt unmittelbar

$$\left\| \frac{1}{2^{n-1}}T_n \right\|_\infty = \|t^n - \tilde{p}\|_\infty = \min_{p \in P_{n-1}} \|t^n - p\|_\infty = \min_{p \in \hat{P}_n} \|p\|_\infty.$$

$\square$

Die Aussage dieser Folgerung lässt sich nun so interpretieren, dass sich  $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  unter allen Polynomen mit Höchstgrad  $n$  und Leitkoeffizient 1 am besten der Null annähert und somit auf diesem Raum ein Proximum an die Nullfunktion darstellt.

An dieser Stelle werden nun zwei Beispiele zu Satz 1.6 dargestellt, die verdeutlichen sollen, wie die Proxima des Monoms  $f(t) = t^n$  konkret für die Fälle  $n = 3$  und  $n = 4$  aussehen. Für  $n = 3$  ist  $f(t) = t^3$  und aus der Rekursionsformel der Tschebyscheff-Polynome ergibt sich  $\tilde{p} = t^3 - \frac{1}{4}(4t^3 - 3t) = \frac{3}{4}t$ . Ebenso ist für  $n = 4$  das Proximum an  $f(t) = t^4$  durch  $\tilde{p} = t^2 - \frac{1}{8}$  gegeben. Veranschaulicht werden diese Beispiele in Abbildung 1.4.

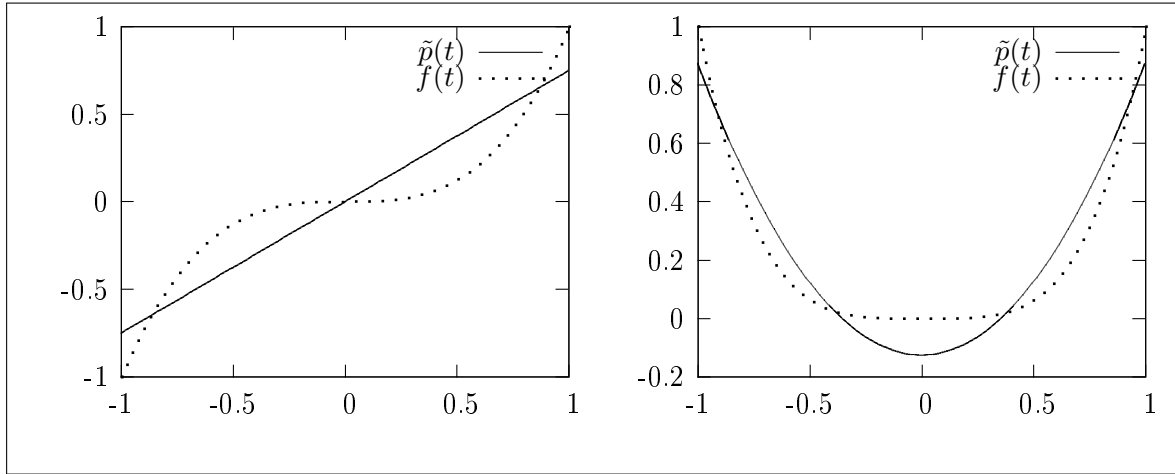


Abbildung 1.4: Darstellung des Monoms  $f(t) = t^n$  und dessen Proximum  $\tilde{p} \in P_{n-1}$  für  $n = 3$  (links) und  $n = 4$  (rechts).

Auffällig an diesen Beispielen ist, dass das Proximum an  $t^n$  aus  $P_{n-1}$  jeweils sogar ein Polynom vom Grad  $(n - 2)$  ist. Diese Besonderheit ist allerdings damit zu erklären, dass das Proximum die gleichen Symmetrieeigenschaften wie das Monom aufweisen sollte (Punktsymmetrie/Achsensymmetrie), um die Existenz einer Alternante zu gewährleisten. Somit ist es naheliegend, dass ein gerades (ungerades) Monom auch ein gerades (ungerades) Proximum hat. Zu beachten ist an dieser Stelle, dass auch die Tschebyscheff-Polynome selber immer abwechselnd gerade und ungerade sind. Dies ist unmittelbar aus der Rekursionsformel ersichtlich. Eine weitere Eigenschaft, die sehr ähnlich zu der Aussage von Folgerung 1.7 ist, werden wir im nächsten Satz sehen.

**Satz 1.8.** Sei  $\xi \notin [-1, 1]$ . Dann gilt auf dem Intervall  $[-1, 1]$  die folgende Eigenschaft für das  $n$ -te Tschebyscheff-Polynom:

$$\min_{p \in P_n, p(\xi) = 1} \|p\|_\infty = \left\| \frac{1}{T_n(\xi)} \cdot T_n \right\|_\infty.$$

*Beweis.* Wir bezeichnen im Folgenden  $\frac{1}{T_n(\xi)} \cdot T_n$  als  $t_n$ . Angenommen, es existiert ein Polynom  $p \in P_n$  mit  $p(\xi) = 1$  und  $\|p\|_\infty < \|t_n\|_\infty$ . Da  $t_n$  sich nur um einen konstanten Faktor von  $T_n$  unterscheidet, hat  $t_n$  nach Satz 1.2 die  $n + 1$  Extremstellen  $s_k^{(n)}$ ,  $k = 0, \dots, n$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$ , wobei die zugehörigen Funktionswerte abwechselnd positiv und negativ sind. Das Polynom  $p$  ist nach Annahme an den Extremstellen betragsmäßig kleiner als  $t_n$  und somit hat das Polynom  $\omega := t_n - p$  insgesamt  $n$  Vorzeichenwechsel und deshalb auch  $n$  Nullstellen. Eine zusätzliche Nullstelle hat  $\omega$  an der Stelle  $\xi$ , denn  $\omega(\xi) = t_n(\xi) - p(\xi) = 1 - 1 = 0$ . Somit hat  $\omega$   $(n + 1)$  paarweise verschiedene Nullstellen. Da zusätzlich  $\omega$  ein Polynom vom Grad  $n$  ist, folgt sofort, dass  $\omega$  identisch zur Nullfunktion ist und deshalb auch  $p = t_n$  gilt. Dies ist nun allerdings ein Widerspruch zu der Annahme, dass  $\|p\|_\infty < \|t_n\|_\infty$ , womit die Aussage des Satzes gezeigt wurde.  $\square$

Aus diesem Satz lässt sich nun eine weitere Aussage folgern. Diese beinhaltet, dass das Tschebyscheff-Polynom  $T_n$  unter allen Polynomen vom Grad  $n$ , die auf dem Intervall  $[-1, 1]$  betragsmäßig nicht größer als 1 sind, außerhalb des Intervalls am schnellsten anwächst.

**Folgerung 1.9.** Für alle  $\xi \notin [-1, 1]$  gilt  $|T_n(\xi)| \geq |p(\xi)|$ , wobei  $p \in P_n$  und  $\|p\|_\infty \leq 1$  auf  $[-1, 1]$ .

*Beweis.* Es gelten auf  $[-1, 1]$  die Abschätzungen

$$\frac{1}{|p(\xi)|} \geq \frac{\|p\|_\infty}{|p(\xi)|} = \left\| \frac{p}{p(\xi)} \right\|_\infty \geq \left\| \frac{T_n}{T_n(\xi)} \right\|_\infty = \frac{1}{|T_n(\xi)|}.$$

Hierbei folgt die zweite Abschätzung aus Satz 1.8, die letzte Gleichung ergibt sich weil  $\max_{t \in [-1, 1]} |T_n(t)| = 1$ . Durch Multiplikation beider Seiten mit  $|p(\xi)| |T_n(\xi)|$  folgt die Behauptung.  $\square$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Tschebyscheff-Polynome ist nun, dass sie bezüglich des gewichteten  $\mathcal{L}^2$ -Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)g(t) dt$$

orthogonal sind, wie nun zu sehen ist (vergleiche mit Kapitel 2).

**Bemerkung 1.10.** Die Tschebyscheff-Polynome erfüllen die Orthogonalitätseigenschaft

$$\langle T_i, T_j \rangle = \int_{-1}^1 \cos(i \arccos t) \cdot \cos(j \arccos t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \pi, & i = j = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0. \end{cases}$$

*Beweis.* Zunächst ist anzumerken, dass das Gewicht  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  sowohl auf dem Intervall  $(-1, 1)$  größer als Null als auch auf  $[-1, 1]$  integrierbar ist (mit der Stammfunktion  $t \mapsto \arcsin t$ ), weshalb es sich bei  $\langle T_i, T_j \rangle$  auch tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt. Durch die Substitution

$$t = \cos \theta, \quad dt = -\sin \theta \, d\theta = -\sqrt{1-t^2} d\theta$$

lässt sich das Skalarprodukt nun wie folgt berechnen.

$$\begin{aligned} \langle T_i, T_j \rangle &= \int_{-1}^1 \cos(i \arccos t) \cdot \cos(j \arccos t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= - \int_{\pi}^0 \cos i\theta \cos j\theta \, d\theta = \int_0^\pi \cos i\theta \cos j\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((i+j)\theta) + \cos((i-j)\theta)) \, d\theta \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((i+j)\theta)}{i+j} + \frac{\sin((i-j)\theta)}{i-j} \right]_0^\pi = 0, & i \neq j, \\ \frac{1}{2} \int_0^\pi 2 \cos 0 \, d\theta = \int_0^\pi 1 \, d\theta = \pi, & i = j = 0, \\ \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2i\theta) + 1) \, d\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(2i\theta)}{2i} + \theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0. \end{cases}$$

$\square$

Als Konsequenz aus dieser besonderen Eigenschaft ergibt sich, dass die Tschebyscheff-Polynome eine Orthogonalbasis der Polynome bilden. Auf Grund der in der Bemerkung konkret bestimmten Werte von  $\langle T_i, T_i \rangle$ , lässt sich die Basis zudem leicht orthonormalisieren.

Wegen ihrer Orthogonalität finden die Tschebyscheff-Polynome eine Verwendung bei der sogenannten Gauß-Quadratur, einem Verfahren zur numerischen Approximation von Integralen, dem orthogonale Polynome und deren Nullstellen zu Grunde liegen. Weitere Details zu dieser Thematik können in Kapitel 3 nachgelesen werden.

Zuletzt ist zu den Tschebyscheff-Polynomen noch die folgende Eigenschaft erwähnenswert.

**Bemerkung 1.11.** Das Tschebyscheff-Polynom  $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ ,  $t \in [-1, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , löst die Differentialgleichung

$$(1 - t^2)y'' - ty' + n^2y = 0.$$

*Beweis.* Der Beweis der Aussage ergibt sich durch zweimaliges differenzieren des  $n$ -ten Tschebyscheff-Polynoms, mit Hilfe der bekannten Ableitungsregeln. Es gilt

$$T'_n(t) = \frac{n \sin(n \arccos t)}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad T''_n(t) = -\frac{n^2 \cos(n \arccos t)}{1 - t^2} + \frac{nt \sin(n \arccos t)}{(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch Einsetzen der Ableitungen in

$$(1 - t^2) \cdot T''_n(t) - t \cdot T'_n + n^2 T_n(t)$$

folgt schließlich die Behauptung. □

## 1.5 Exkurs: Tschebyscheff-Polynome zweiter Art

Zur Vervollständigung des Kapitels über die Tschebyscheff-Polynome wird nun noch kurz auf die Tschebyscheff-Polynome der zweiten Art und einige ihrer Eigenschaften eingegangen. Ähnlich wie es für die Polynome erster Art möglich ist, lassen sich die Tschebyscheff-Polynome zweiter Art für  $n \in \mathbb{N}_0$  rekursiv definieren:

$$U_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$U_0(t) = 1, \quad U_1(t) = 2t,$$

$$U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$$

Es werden nun kurz einige Eigenschaften dieser Polynome ohne Beweise zusammengefasst (siehe Abramowitz/Stegun [1, Seite 774 ff.]). Die Eigenschaften gelten jeweils für  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- Für  $\theta \in (0, \pi)$  gilt die explizite Darstellung

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

- Es gilt  $U_n(1) = n+1$ ,  $U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$  und allgemein  $U_n(-t) = (-1)^n U_n(t)$ .
- $U_n$  hat die Nullstellen  $u_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
- Die Tschebyscheff-Polynome zweiter Art erfüllen die Orthogonalitätseigenschaft

$$\langle U_n, U_m \rangle := \int_{-1}^1 U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2}dt = 0, \quad n \neq m.$$

- $U_n$  löst die Differentialgleichung

$$(1 - t^2)y'' - 3ty' + n(n+2)y = 0.$$

# Kapitel 2

## Orthogonale Polynome

### 2.1 Definitionen und Rekursionsformeln für orthogonale Polynome

Bereits im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass die Tschebyscheff-Polynome bezüglich eines bestimmten Skalarproduktes orthogonal zueinander stehen. In diesem Kapitel wird es nun darum gehen, diese Eigenschaft auf allgemeine orthogonale Polynome zu übertragen und einige wichtige Eigenschaften dieser Polynome zu analysieren. Zunächst werden allerdings einige benötigte Begrifflichkeiten, die schon im ersten Kapitel angerissen wurden, konkret definiert.

#### Definition 2.1.

1. Ein gewichtetes Skalarprodukt über dem Raum der zweimal integrierbaren Funktionen  $\mathcal{L}^2([a, b])$  auf dem Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$\langle p, q \rangle := \int_a^b p(x)q(x)\omega(x)dx. \quad (2.1)$$

Dabei ist  $\omega : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  eine integrierbare Gewichtsfunktion. Dementsprechend wird durch  $\|p\| := \sqrt{\langle p, p \rangle}$  die durch das Skalarprodukt induzierte  $\mathcal{L}^2$ -Norm definiert.

2. Zwei Polynome  $p, q \in P_n \subset \mathcal{L}^2([a, b])$  sind orthogonal zueinander, falls  $\langle p, q \rangle = 0$  gilt. Die Polynome  $p, q$  sind orthonormal zueinander, falls zusätzlich zu der Orthogonalität  $\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = 1$  erfüllt ist.
3. Für  $n \in \mathbb{N}_0$  bezeichnet das orthogonale Komplement von  $P_n$  die Menge

$$P_n^\perp := \{p \in P \mid \langle p, q \rangle = 0 \text{ für alle } q \in P_n\}.$$

Dies ist ein Unterraum vom Polynomraum  $P$  ( $0 \in P_n^\perp$ , die Abgeschlossenheit folgt aus der Bilinearität des Skalarproduktes).

Da nun die Menge der Monome  $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$  eine Basis des Polynomraums  $P$  bildet, ergibt sich durch Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren (vgl. Plato [6, Seite 135]) eine Orthogonalbasis  $\{p_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$  des Raumes bezüglich eines gewichteten Skalarproduktes folgendermaßen:

$$p_0 = 1, \\ p_n = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle x^n, p_k \rangle}{\|p_k\|^2} p_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  ist also  $p_{n+1}$  orthogonal zu Basispolynomen  $p_0, \dots, p_n$  von  $P_n$  und somit auch ein Element des orthogonalen Komplements  $P_n^\perp$ .

**Satz 2.2.** Die mittels Gram-Schmidt-Verfahren gewonnenen orthogonalen Polynome  $p_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  erfüllen die folgende Rekursionsformel.

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x - \beta_0,$$

$$p_{n+1} = (x - \beta_n)p_n - \gamma_n^2 p_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hierbei sind die Koeffizienten definiert durch

$$\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\|p_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \gamma_n^2 = \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Das Polynom  $p_0$  ist in beiden Darstellungen identisch und auch  $p_1$  erfüllt

$$p_1 = x^1 - \frac{\langle x^1, p_0 \rangle}{\|p_0\|^2} p_0 = x - \beta_0.$$

Für  $n \geq 1$  betrachten wir nun das Polynom

$$q_{n+1} := (x - \beta_n)p_n - \gamma_n^2 p_{n-1}$$

und zeigen zunächst dass  $q_{n+1}$  im orthogonalen Komplement von  $P_n$  liegt. Dazu reicht es zu zeigen, dass  $q_{n+1}$  orthogonal zu den Polynomen  $p_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , aus dem Gram-Schmidt-Verfahren ist, da diese eine Basis von  $P_n$  bilden und somit für jedes  $q \in P_n$  für reelle Skalare  $a_k$  gilt:

$$\langle p_{n+1}, q \rangle = \left\langle p_{n+1}, \sum_{k=0}^n a_k p_k \right\rangle = \sum_{k=0}^n a_k \langle p_{n+1}, p_k \rangle = 0.$$

Nun folgt durch die Definitionen von  $q_{n+1}$  und  $\beta_n$ :

$$\langle q_{n+1}, p_n \rangle = \langle xp_n, p_n \rangle - \beta_n \|p_n\|^2 - \underbrace{\gamma_n^2 \langle p_{n-1}, p_n \rangle}_{=0} = 0,$$

sowie durch die Definition von  $\gamma_n^2$  und der Tatsache, dass  $xp_{n-1} - p_n$  ein Element von  $P_{n-1}$  ist:

$$\begin{aligned} \langle q_{n+1}, p_{n-1} \rangle &= \langle xp_n, p_{n-1} \rangle - \underbrace{\beta_n \langle p_n, p_{n-1} \rangle}_{=0} - \gamma_n^2 \|p_{n-1}\|^2 = \langle p_n, xp_{n-1} \rangle - \|p_n\|^2 \\ &= \langle p_n, xp_{n-1} - p_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Letztendlich gilt für  $k \in \{0, \dots, n-2\}$ :

$$\begin{aligned} \langle q_{n+1}, p_k \rangle &= \langle xp_n, p_k \rangle - \underbrace{\beta_n \langle p_n, p_k \rangle}_{=0} - \underbrace{\gamma_n^2 \langle p_{n-1}, p_k \rangle}_{=0} \\ &= \langle p_n, xp_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Somit ist also  $q_{n+1}$  im orthogonalen Komplement von  $P_n$  enthalten. Wir betrachten nun das Polynom  $r := p_{n+1} - q_{n+1}$ . Da sowohl  $p_{n+1}$  als auch  $q_{n+1}$  im orthogonalen Komplement  $P_n^\perp$  enthalten sind, gilt dies auf Grund der Abgeschlossenheit des Unterraums auch für  $r$ . Zusätzlich ist  $r$  ein Element aus  $P_n$ , da  $p_{n+1}$  und  $q_{n+1}$  jeweils den Leitkoeffizienten 1 haben. Aus diesen beiden Eigenschaften folgt direkt  $r \equiv 0$  und somit auch  $p_{n+1} = q_{n+1}$ , womit die Behauptung nachgewiesen wurde.  $\square$

Betrachtet man bezüglich eines gegebenen Skalarproduktes zwei verschiedene Folgen orthogonaler Polynome  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , mit  $p_n, q_n \in P_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ , so unterscheiden sich die jeweiligen Glieder der beiden Folgen nur um einen konstanten Faktor. Diese Tatsache liegt daran, dass das orthogonale Komplement von  $P_n$  im Raum  $P_{n+1}$  nur eindimensional sein kann und somit die Ergänzung einer orthogonalen Basis von  $P_n$  zu einer orthogonalen Basis des  $P_{n+1}$  bis auf einen konstanten Faktor eindeutig ist. Dies bedeutet auch, dass es zu einem gegebenen gewichteten Skalarprodukt eine (bis auf das Vorzeichen) eindeutige Folge von Polynomen der oben genannten Form gibt, deren Glieder paarweise orthonormal zueinander sind. Eine Rekursionsformel für diese Orthonormal-Polynome wird im Folgenden angemerkt.

**Bemerkung 2.3.** *Zu jedem gewichteten Skalarprodukt existiert eine Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  von Polynomen  $n$ -ten Grades mit Leitkoeffizienten  $a_n > 0$ , sodass die Folgenglieder  $u_n$  paarweise orthonormal zueinander sind. Definiert man  $u_{-1} = 0$ , dann gilt für die Polynome  $u_n$  die Rekursionsformel*

$$u_0 = a_0 = \left( \int_a^b \omega(x) dx \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$b_{n+1}u_{n+1}(x) = xu_n(x) - c_{n+1}u_n(x) - b_nu_{n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

Hierbei sei  $b_0 := 0$ , sowie  $b_{n+1} := \frac{a_n}{a_{n+1}}$  und  $c_{n+1} := \langle u_n, xu_n \rangle$  für  $n \geq 0$ .

Da diese Rekursion im weiteren Verlauf der Ausarbeitung keine besondere Rolle mehr spielen wird, wird für den Beweis von Bemerkung 2.3, der sehr ähnlich zu dem Beweis von Satz 2.2 ist, an dieser Stelle auf Hanke-Bourgeois [5, Seite 288] verwiesen.

## 2.2 Nullstellen von Orthogonalen Polynomen

Eine wichtige Rolle spielen im Zusammenhang mit orthogonalen Polynomen vor allem deren Nullstellen, wie zum Beispiel bei der im dritten Kapitel erläuterten Gauß-Quadratur. Eine Aussage über diese Nullstellen und eine Darstellungsform liefert der folgende Satz.

**Satz 2.4.** *Das Orthogonalpolynom  $p_n$  hat  $n$  paarweise verschiedene Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , die alle im Intervall  $(a, b)$  liegen. Die Nullstellen lassen sich darstellen in der Form*

$$\lambda_k = \frac{\langle xL_k, L_k \rangle}{\|L_k\|^2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

In dieser Darstellung bezeichnet  $L_k(x) = \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}$  die Lagrangeschen Basispolynome, den Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  zugeordnet.

*Beweis.* Es wird zunächst angenommen, dass  $p_n$  eine reelle Nullstelle  $\lambda$  hat, die nicht im Intervall  $(a, b)$  liegt. Sei nun

$$q(x) := \frac{p_n(x)}{x - \lambda}.$$

Bei  $q$  handelt es sich somit um ein Polynom vom Grad  $n - 1$  und ist deshalb orthogonal zu  $p_n$ . Es folgt

$$0 = \langle q, p_n \rangle = \int_a^b \frac{p_n^2(x)}{x - \lambda} \omega(x) dx.$$

Andererseits gilt aber auch

$$\int_a^b \frac{p_n^2(x)}{x - \lambda} \omega(x) dx \neq 0,$$

da  $p_n(x)^2 \omega(x)$  auf  $(a, b)$  weder negativ wird, noch identisch zur Nullfunktion ist und zusätzlich  $\frac{1}{x - \lambda}$  keinen Vorzeichenwechsel auf  $(a, b)$  haben kann, weil  $\lambda$  außerhalb des Intervalls liegt.



Somit ergibt sich ein Widerspruch und es folgt, dass  $p_n$  keine Nullstelle außerhalb von  $(a, b)$  haben kann.

Wir nehmen nun an, dass  $p_n$  eine Nullstelle  $\lambda$  besitzt, die entweder mehrfach im Intervall  $(a, b)$  oder aber nicht reell ist. In beiden Fällen ist

$$q(x) := \frac{p_n(x)}{(x - \lambda)(x - \bar{\lambda})} = \frac{p_n(x)}{|x - \lambda|^2}$$

ein Polynom vom Grad  $n - 2$ , da im nicht-reellen Fall auch  $\bar{\lambda}$  eine Nullstelle von  $p_n$  ist. Somit folgt

$$0 = \langle p_n, q \rangle = \int_a^b \frac{p_n^2(x)}{|x - \lambda|^2} \omega(x) dx.$$

Dies steht aber erneut im Widerspruch dazu, dass die integrierte Funktion auf  $(a, b)$  offensichtlich nirgendwo negativ ist und auch nicht identisch zur Nullfunktion ist. Also sind die Nullstellen von  $p_n$  reell und einfach.

Als Letztes muss nun noch die Darstellung der Nullstellen gezeigt werden. Ist  $\lambda_k$  eine Nullstelle von  $p_n$ , dann sei wieder  $q(x) = \frac{1}{x - \lambda_k} p_n(x)$  ein Polynom vom Grad  $n - 1$ . Es folgt

$$0 = \langle p_n, q \rangle = \langle xq - \lambda_k q, q \rangle = \langle xq, q \rangle - \lambda_k \langle q, q \rangle,$$

und somit auch

$$\lambda_k = \frac{\langle xq, q \rangle}{\|q\|^2}.$$

Per Definition sind sowohl  $q$  als auch  $L_k$  Polynome vom Grad  $n - 1$  und zerfallen in die Linearfaktoren  $(x - \lambda_i)$ ,  $i \neq k$ , weshalb sich die Polynome nur um einen konstanten Faktor  $c$  unterscheiden. Somit folgt schließlich

$$\lambda_k = \frac{\langle xq, q \rangle}{\|q\|^2} = \frac{\langle cxL_k, cL_k \rangle}{\|cL_k\|^2} = \frac{\langle xL_k, L_k \rangle}{\|L_k\|^2}.$$

□

Für die Berechnung der Nullstellen kann es bei der eben eingeführten Darstellung zu Schwierigkeiten kommen, da eine Vielzahl von Integralen explizit bestimmt werden muss. Deswegen wird im Folgenden eine alternative Darstellung der Nullstellen angegeben. Zunächst ist dafür allerdings eine Definition notwendig.

**Definition 2.5.** Es sei

$$J := \begin{pmatrix} \beta_0 & -\gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma_1 & \beta_1 & -\gamma_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\gamma_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma_{n-1} & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

eine  $n \times n$ -Matrix, die sich aus den Koeffizienten der Rekursionsformel aus Satz 2.2 für die orthogonalen Polynome  $p_n$  ergibt. Zur Erinnerung: Die Rekursionsformel lautet

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x - \beta_0,$$

$$p_{j+1} = (x - \beta_j)p_j - \gamma_j^2 p_{j-1} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Sind die Koeffizienten und somit die Matrix  $J$  bekannt, so lassen sich mit Hilfe von  $J$  die Nullstellen des Orthogonalpolynoms  $p_n$  bestimmen, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 2.6.** Die paarweise verschiedenen Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $p_n$  entsprechen den Eigenwerten der Matrix  $J$ .

*Beweis.* Wir zeigen, dass zu jeder Nullstelle  $\lambda_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , der  $n$ -dimensionale Vektor

$$v^{(k)} := (\alpha_0 p_0(\lambda_k), \alpha_1 p_1(\lambda_k), \dots, \alpha_{n-1} p_{n-1}(\lambda_k))^T, \text{ mit}$$

$$\alpha_j := \begin{cases} 1, & j = 0, \\ (-1)^j \frac{1}{\gamma_1 \dots \gamma_j}, & j = 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

die Gleichung

$$Jv^{(k)} = \lambda_k v^{(k)}$$

erfüllt. Dies ist dann gleichbedeutend damit, dass  $\lambda_k$  ein Eigenwert von  $J$  ist, mit dem zugehörigen Eigenvektor  $v^{(k)}$ . Wir betrachten den Vektor  $Jv^{(k)}$  nun komponentenweise.

$$\begin{aligned} \left( Jv^{(k)} \right)_1 &= \beta_0 \underbrace{\alpha_0 p_0(\lambda_k)}_{=1} - \underbrace{\gamma_1 \alpha_1}_{=-1} p_1(\lambda_k) = \beta_0 + p_1(\lambda_k) \\ &= \beta_0 + \lambda_k - \beta_0 = \lambda_k = \lambda_k v_1^{(k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( Jv^{(k)} \right)_{j+1} &= -\gamma_j \alpha_{j-1} p_{j-1}(\lambda_k) + \beta_j \alpha_j p_j(\lambda_k) - \gamma_{j+1} \alpha_{j+1} p_{j+1}(\lambda_k) \\ &= \alpha_j (\gamma_j^2 p_{j-1}(\lambda_k) + \beta_j p_j(\lambda_k) + p_{j+1}(\lambda_k)) \\ &= \alpha_j \lambda_k p_j(\lambda_k) = \lambda_k v_{j+1}^{(k)}, \quad j = 1, \dots, n-2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( Jv^{(k)} \right)_n &= -\gamma_{n-1} \alpha_{n-2} p_{n-2}(\lambda_k) + \beta_{n-1} \alpha_{n-1} p_{n-1}(\lambda_k) \\ &= \alpha_{n-1} (\gamma_{n-1}^2 p_{n-2}(\lambda_k) + \beta_{n-1} p_{n-1}(\lambda_k) + p_n(\lambda_k)) \\ &= \alpha_{n-1} \lambda_k p_{n-1}(\lambda_k) = \lambda_k v_n^{(k)}. \end{aligned}$$

In den einzelnen Umformungen wurde die Rekursionsformel für die Polynome  $p_n$  benutzt, wobei für  $x$  der Wert  $\lambda_k$  eingesetzt wurde. Außerdem wurde genutzt, dass  $p_n(\lambda_k) = 0$  gilt, da  $\lambda_k$  nach Voraussetzung eine Nullstelle des Polynoms ist.

Somit wurde gezeigt, dass jede Nullstelle  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , auch ein Eigenwert der Matrix  $J$  ist. Da  $J$  als  $n \times n$ -Matrix maximal  $n$  verschiedene Eigenwerte besitzen kann, sind die Eigenwerte von  $J$  und die Nullstellen von  $p_n$  identisch.  $\square$

## 2.3 Beispiele

Wie die einzelnen Erkenntnisse aus diesem Kapitel konkret aussehen, wird nun an zwei Vertretern von orthogonalen Polynomen verdeutlicht – den Tschebyscheff-Polynomen und den Legendre-Polynomen.

### 2.3.1 Tschebyscheff-Polynome

Wie bereits im ersten Kapitel gezeigt worden ist, sind die Tschebyscheff-Polynome erster Art auf dem Intervall  $[-1, 1]$  orthogonal bezüglich des gewichteten Skalarprodukts 2.1 – mit der auf  $[-1, 1]$  integrierbaren und nicht-negativen Gewichtsfunktion  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Zusätzlich ist aus Bemerkung 1.10 bereits bekannt, dass

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \pi, \quad \langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 1 \text{ gilt.}$$

Wir wissen, dass die Tschebyscheff-Polynome erster Art für  $n \geq 1$  den Leitkoeffizienten  $2^{n-1}$  haben. Da die Rekursionsformel aus Satz 2.2 orthogonale Polynome mit dem Leitkoeffizienten 1 erzeugt, gilt also in diesem Fall die Beziehung

$$p_0 = T_0 \equiv 1, \quad p_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n, \quad n \geq 1.$$

Für die Koeffizienten aus der Rekursionsformel folgt:

$$\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\|p_n\|^2} = \frac{1}{\|p_n\|^2} \int_{-1}^1 xp_n^2(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0,$$

denn die Tschebyscheff-Polynome sind entweder gerade oder ungerade Polynome und somit ist  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} xp_n^2(x)$  ebenso wie  $x \mapsto xp_n^2(x)$  eine ungerade Funktion, deren Integral über das Intervall  $[-1, 1]$  verschwindet. Weiterhin gilt

$$\gamma_1^2 = \frac{\|p_1\|^2}{\|p_0\|^2} = \frac{\|T_1\|^2}{\|T_0\|^2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2},$$

$$\gamma_n^2 = \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2} = \left( \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}} \right)^2 \frac{\|T_n\|^2}{\|T_{n-1}\|^2} = \frac{1}{4}, \quad n \geq 2.$$

Somit sind alle erforderlichen Koeffizienten bestimmt und es ergibt sich für die auf Leitkoeffizient 1 normierten Tschebyscheff-Polynome die Rekursionsformel

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x, \quad p_2 = x^2 - \frac{1}{2},$$

$$p_{n+1} = xp_n - \frac{1}{4}p_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Außerdem lässt sich nun aus den berechneten Koeffizienten die  $n \times n$ -Matrix  $J$  bezüglich des  $n$ -ten Tschebyscheff-Polynoms aufstellen:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix  $J$  entsprechen den in Kapitel 1 bestimmten Nullstellen des  $n$ -ten Tschebyscheff-Polynoms:

$$\lambda_k = t_k^{(n)} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

### 2.3.2 Legendre-Polynome

Die für  $n \in \mathbb{N}_0$  durch

$$\mathcal{P}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

definierten Polynome werden als Legendre-Polynome bezeichnet.

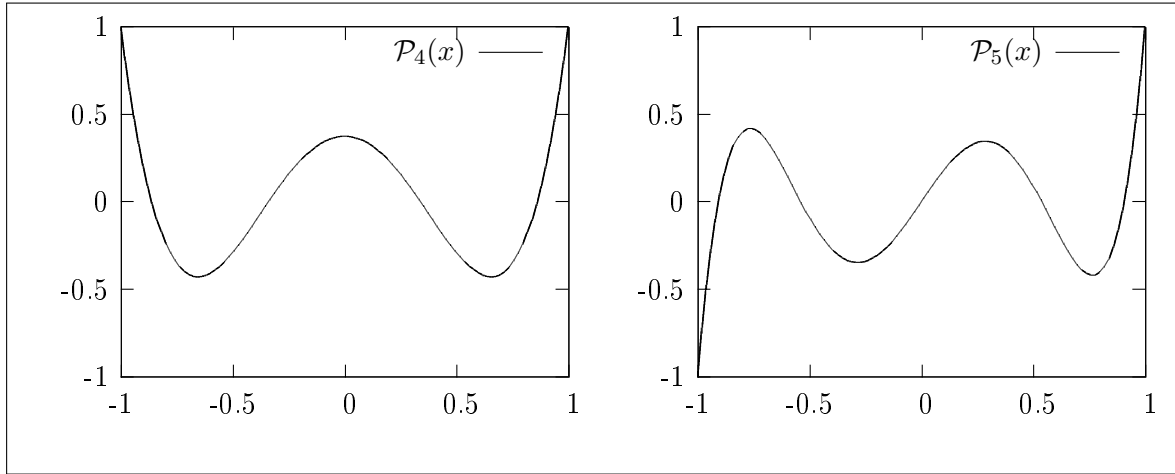


Abbildung 2.1: Darstellung der Legendre-Polynome  $\mathcal{P}_4$  und  $\mathcal{P}_5$  auf  $[-1, 1]$ .

Die Legendre-Polynome sind auf dem Intervall  $[-1, 1]$  bezüglich des gewichteten Skalarprodukts (2.1) mit der konstanten Gewichtsfunktion  $\omega \equiv 1$  orthogonal, wie wir nun sehen werden:

Sei ohne Einschränkung  $n > m$ , dann folgt durch Anwendung der partiellen Integration

$$\begin{aligned} 2^n n! 2^m m! \langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx \\ &= \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2 - 1)^m dx. \end{aligned}$$

Der erste Teil dieses Terms ist identisch 0, da sowohl 1, als auch  $-1$   $n$ -fache Nullstellen von  $(x^2 - 1)^n$  sind. Somit gilt

$$2^n n! 2^m m! \langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m \rangle = - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2 - 1)^m dx.$$

Dieses Schema lässt sich nun analog weitere  $n - 1$  mal durchführen, sodass schließlich folgt

$$2^n n! 2^m m! \langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m \rangle = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^m dx.$$

Da das Polynom  $x \mapsto (x^2 - 1)^m$  vom Grad  $2m$  ist und nach Voraussetzung  $n > m$  gilt, verschwindet folglich die  $(m + n)$ -te Ableitung und es gilt schließlich

$$\langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m \rangle = 0, \text{ für } n \neq m$$

und somit die Orthogonalität der Legendre-Polynome. Um nun die Koeffizienten der Rekursionsformel für die auf Leitkoeffizient 1 normierten Legendre-Polynome  $p_n$  aus Satz 2.2 bestimmen zu können, werden noch die Werte von  $\langle P_n, P_n \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , sowie die Leitkoeffizienten

von  $\mathcal{P}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , benötigt. Ebenso wie oben folgt zunächst

$$\begin{aligned}
2^n n! 2^n n! \langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n \rangle &= (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n dx \\
&= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx \\
&= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (x - 1)^n (x + 1)^n dx \\
&= (-1)^n (2n)! (-1)^n n! \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \int_{-1}^1 (x+1)^{2n} dx \\
&= (n!)^2 \cdot \left[ \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-1}^1 = (n!)^2 \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1},
\end{aligned}$$

wobei im vierten Schritt  $n$ -mal partiell integriert wurde und somit auch

$$\langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n \rangle = \frac{2}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Für den Leitkoeffizienten  $\alpha_n$  des  $n$ -ten Legendre-Polynoms ergibt sich direkt aus der Definition

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n n!} \cdot (2n \cdot \dots \cdot (n+1)) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Somit gilt für die Koeffizienten  $\gamma_n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , aus der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
\gamma_n^2 &= \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2} = \left( \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{n-1} (n-1)!^2} \right)^2 \cdot \frac{\|\mathcal{P}_n\|^2}{\|\mathcal{P}_{n-1}\|^2} \\
&= \left( \frac{2n^2}{2n(2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n^2}{4n^2-1}.
\end{aligned}$$

Da nun die Funktion  $x \mapsto (x^2 - 1)^n$  ein gerades Polynom ist, sind die Legendre-Polynome  $\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$  offensichtlich abwechselnd gerade und ungerade. Damit ist mit der gleichen Begründung wie bei den Tschebyscheff-Polynomen  $\langle xp_n, p_n \rangle = 0$  und somit sind auch die Rekursionskoeffizienten  $\beta_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Folglich gilt für die normierten Legendre-Polynome  $p_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  die Rekursion

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x,$$

$$p_{n+1} = xp_n - \frac{n^2}{4n^2-1} p_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dementsprechend lassen sich die Nullstellen des  $n$ -ten Legendre-Polynoms wieder durch Bestimmung der Eigenwerte der aus den Koeffizienten resultierenden Matrix  $J$  bestimmen.

# Kapitel 3

## Die Gaußsche Quadraturformel

### 3.1 Allgemeine Quadraturformeln und Exaktheitsgrad

In diesem Kapitel geht es darum, eine Anwendung der im vergangenen Kapitel behandelten orthogonalen Polynome zu betrachten. Die Problemstellung liegt zunächst darin, das analog zum gewichteten Skalarprodukt definierte gewichtete Integral

$$I(f) := \int_a^b f(x)\omega(x)dx, \quad f \in \mathcal{C}[a, b],$$

möglichst genau zu approximieren. Dabei ist  $\omega$  erneut eine vorgegebene Gewichtsfunktion auf  $[a, b]$ . Als Ansatz dazu dient zunächst, zu paarweise verschiedenen Stützstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und Gewichten  $\omega_1, \dots, \omega_n$ , eine allgemeine Quadraturformel der Form

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k f(\lambda_k),$$

die das Integral  $I(f)$  approximieren soll. Die Aufgabe besteht nun also darin, die Stützstellen und Gewichte so zu bestimmen, dass die Quadraturformel so exakt wie möglich ist. Wir werden später sehen, dass die orthogonalen Polynome  $p_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dabei eine wichtige Rolle spielen. Zunächst wird nun aber eine Definition eingeführt, die die Exaktheit einer Quadraturformel messbar macht.

**Definition 3.1.** Als Exaktheitsgrad der Quadraturformel  $Q_n$  wird die Zahl  $m \in \mathbb{N}$  bezeichnet, für die die folgende Eigenschaft gilt.

$$\begin{aligned} Q_n(x^k) &= I(x^k), \quad k = 0, \dots, m, \\ Q_n(x^{m+1}) &\neq I(x^{m+1}). \end{aligned}$$

Da sowohl die Quadraturformel  $Q_n$ , als auch das Integral  $I$  linear sind, ist diese Eigenschaft gleichbedeutend damit, dass  $Q_n$  alle Polynome aus  $P_m$  exakt integriert, allerdings nicht jedes Polynom vom Grad  $m + 1$ .

### 3.2 Wahl der Stützstellen und Gewichte

Wir werden nun einen ersten wichtigen Satz betrachten, der eine Anforderung an die Wahl von Stützstellen und Gewichten für einen bestimmten Exaktheitsgrad liefert und den Zusammenhang zwischen der Quadratur und den orthogonalen Polynomen beschreibt.

**Satz 3.2.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $p$  ein beliebiges Polynom aus  $P_{2n-1}$ . Außerdem seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  paarweise verschieden und  $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\int_a^b p(x)\omega(x)dx = \sum_{k=1}^n \omega_k p(\lambda_k) \quad (3.1)$$

genau dann, wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind.

1. Die Stützstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind die Nullstellen des aus Kapitel 1 bekannten Orthogonalpolynoms  $p_n$ .
2. Die Gewichte  $\omega_1, \dots, \omega_n$  haben die Form

$$\omega_k = \int_a^b L_k(x)\omega(x)dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

wobei  $L_k(x) = \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}$  das  $k$ -te Lagrangesche Basispolynom zu den Stützstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ist.

*Beweis.* Wir setzen zunächst voraus, dass die Identität (3.1) erfüllt ist und zeigen die Gültigkeit der Eigenschaften 1 und 2.

Sei  $q(x) := \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)$  und  $q_m(x) := x^m q(x)$ ,  $m \in \{0, \dots, n-1\}$ , ein Polynom aus  $P_{2n-1}$ . Aus diesen Festlegungen und der Gültigkeit von (3.1) folgt

$$\langle q, x^m \rangle = \langle x^m q, 1 \rangle = \sum_{k=1}^n \omega_k \lambda_k^n \underbrace{q(\lambda_k)}_{=0} = 0$$

Somit ist das Polynom  $q$  orthogonal zu den Monomen  $x^0, \dots, x^{n-1}$  und liegt deshalb, wie auch  $p_n$ , im orthogonalen Komplement  $P_{n-1}^\perp$ , weshalb auch  $q - p_n \in P_{n-1}^\perp$  gilt. Da aber  $q - p_n$  zusätzlich ein Element aus  $P_{n-1}$  ist, folgt direkt  $q - p_n \equiv 0$  und darum auch

$$q = p_n.$$

Wegen der Definition von  $q$  sind die Werte  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , also identisch mit den Nullstellen des orthogonalen Polynoms  $p_n$  und es folgt die Eigenschaft 1.

Wendet man nun die Eigenschaft (3.1) auf das  $k$ -te Lagrange-Polynom  $L_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  an (dies ist möglich, da die Lagrange-Polynome vom Grad  $n-1 < 2n-1$  sind), so erhält man

$$\int_a^b L_k(x)\omega(x)dx = \sum_{j=1}^n \omega_j L_k(\lambda_j) = \omega_k,$$

denn nach der Definition der Lagrangeschen Basispolynome gilt  $L_k(\lambda_j) = 1$  für  $j = k$  und  $L_k(\lambda_j) = 0$  für  $j \neq k$ . Somit gilt also auch Eigenschaft 2.

Wir setzen nun die beiden Eigenschaften voraus und zeigen die Identität (3.1).

Sei  $p$  ein beliebiges Polynom aus  $P_{2n-1}$ , dann lässt sich  $p$  nach Polynomdivision mit Rest schreiben als

$$p = qp_n + r, \quad q, r \in P_{n-1}.$$

Da  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Nullstellen von  $p_n$  sind, folgt daraus

$$p(\lambda_k) = r(\lambda_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Wendet man nun die Lagrange-Interpolation (vgl. Schwarz/Köckler [7, Seite 95]) auf  $r$ , zu den Stützstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  an, so folgt

$$r(x) = \sum_{k=1}^n r(\lambda_k)L_k(x) = \sum_{k=1}^n p(\lambda_k)L_k(x)$$

und somit auch

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)\omega(x)dx &= \langle p, 1 \rangle = \langle qp_n + r, 1 \rangle = \underbrace{\langle q, p_n \rangle}_{=0} + \langle r, 1 \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n p(\lambda_k) \langle L_k, 1 \rangle = \sum_{k=1}^n \omega_k p(\lambda_k), \end{aligned}$$

womit die Identität (3.1) und damit auch die Aussage des Satzes bewiesen wurde.  $\square$

Der Satz liefert also eine Aussage darüber, wie die Stützstellen und Gewichte einer Quadraturformel optimal gewählt werden sollten, um einen Exaktheitsgrad von  $2n - 1$  zu gewährleisten. Die optimalen Gewichte  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , sind im Übrigen strikt positiv, denn wendet man die Identität (3.1) auf das Polynom  $L_k^2 \in P_{2n-1}$  an, so folgt

$$0 < \langle L_k, L_k \rangle = \langle L_k^2, 1 \rangle = \sum_{j=1}^n L_k^2(\lambda_j) \omega_j = \omega_k.$$

Diese Positivität der Gewichte ist ein wichtiger Unterschied zu den Newton-Cotes-Formeln, bei denen die Gewichte für  $n \geq 8$  negativ werden können (vgl. Freund/Hoppe [3, Seite 166]).

### 3.3 Die Optimalität der Gaußschen Quadraturformel

Mit der eben beschriebenen Wahl von Stützstellen und Gewichten lässt sich nun die Gaußsche Quadraturformel definieren, die diesem Kapitel seinen Namen gibt.

**Definition 3.3.** Für auf  $[a, b]$  stetige Funktionen  $f$  bezeichnet die  $n$ -stufige Gaußsche Quadraturformel die Quadraturformel

$$G_n(f) := \sum_{k=1}^n \omega_k f(\lambda_k), \quad (3.2)$$

wobei  $\omega_k$ ,  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , die optimalen Gewichte und Stützstellen aus Satz 3.2 sind.

Wir werden nun sehen, dass die Gaußsche Quadraturformel nicht nur den Exaktheitsgrad  $2n - 1$  garantiert, sondern auch optimal ist.

**Satz 3.4.** Die  $n$ -stufige Gaußsche Quadraturformel  $G_n$  hat den Exaktheitsgrad  $2n - 1$  und ist damit unter den Quadraturformeln optimal.

*Beweis.* Aus Satz 3.2 folgt direkt, dass der Exaktheitsgrad von  $G_n$  mindestens  $2n - 1$  beträgt. Wir zeigen nun, dass der Exaktheitsgrad höchstens  $2n - 1$  sein kann. Wir betrachten dazu das orthogonale Polynom  $p_n$ . Es gilt

$$p(x) := p_n^2(x) = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)^2 \in P_{2n}.$$

Außerdem ist auf der einen Seite

$$G_n(p) = \sum_{k=1}^n \omega_k p(\lambda_k) = 0,$$

auf der anderen Seite allerdings

$$I(p) = \int_a^b \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)^2 \omega(x) dx = \langle p_n, p_n \rangle > 0.$$

Somit ist  $G_n(p) \neq I(p)$ , woraus folgt, dass  $G_n$  nicht jedes Polynom aus  $P_{2n}$  exakt integriert. Somit ist der Exaktheitsgrad genau  $2n - 1$ . Die Optimalität von  $G_n$  folgt direkt aus Satz 3.2.  $\square$



Der auftretende Fehler bei der Approximation des Integrals  $I$  durch die Gaußsche Quadraturformel  $G_n$  wird nun durch die folgende Abschätzung eingeschränkt.

**Satz 3.5.** Für  $f \in \mathcal{C}^{2n}[a, b]$  gilt die Fehlerabschätzung

$$|I(f) - G_n(f)| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_{[a,b]}}{(2n)!} \|p_n\|^2,$$

wobei  $\|f^{(2n)}\|_{[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |f^{(2n)}(x)|$  die Maximumsnorm von  $f^{(2n)}$  auf  $[a, b]$  ist.

*Beweis.* Wir interpolieren die Funktion  $f$  mit der Hermite-Interpolation (vgl. Schwarz/Köckler [7, Seite 98 f.]) durch ein Polynom  $p$  vom Grad  $2n - 1$ , mit den Interpolationspunkten

$$(\lambda_1, f(\lambda_1)), \dots, (\lambda_n, f(\lambda_n)), (\lambda_1, f'(\lambda_1)), \dots, (\lambda_n, f'(\lambda_n)).$$

Nach der Fehlerdarstellung 1.1 aus Kapitel 1 folgt, dass zu jedem  $x \in [a, b]$  ein  $\xi \in [a, b]$  existiert mit

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)^2 = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} p_n^2(x)$$

Da nun  $f(\lambda_k) = p(\lambda_k)$  für  $k = 1, \dots, n$  ist, gilt auch  $G_n(f) = G_n(p)$  und deshalb folgt mit dem Exaktheitsgrad der Gauß-Quadratur von  $2n - 1$

$$\begin{aligned} |I(f) - G_n(f)| &= |I(f) - G_n(p)| = \left| \int_a^b (f(x) - p(x)) \omega(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b p_n^2 \omega(x) dx \right| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_{[a,b]}}{(2n)!} \|p_n\|^2. \end{aligned}$$

□

### 3.4 Alternative Darstellung der optimalen Gewichte

Abschließend wird nun, alternativ zu der bisher bekannten Darstellung, eine weitere Schreibweise der optimalen Gewichte eingeführt.

**Satz 3.6.** Die optimalen Gewichte  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , genügen der Darstellung

$$\omega_k = \frac{\int_a^b \omega(x) dx}{\sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_j p_j(\lambda_k))^2}, \quad (3.3)$$

wobei

$$\alpha_j := \begin{cases} 1, & j = 0, \\ \frac{1}{\gamma_1 \cdots \gamma_j}, & j = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

gilt und dabei die Zahlen  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , den Koeffizienten der Rekursionsformel für die orthogonalen Polynome aus Satz 2.2 entsprechen.

*Beweis.* Bereits aus dem Beweis von Satz 2.6 ist bekannt, dass die symmetrische Koeffizientenmatrix  $J$  (2.2), die zu den Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gehörigen Eigenvektoren

$$v^{(k)} = (\alpha_0 p_0(\lambda_k), \alpha_1 p_1(\lambda_k), \dots, \alpha_{n-1} p_{n-1}(\lambda_k))^T, \quad k = 1, \dots, n,$$

besitzt. Diese sind wegen der Symmetrie von  $J$  und den paarweise verschiedenen Eigenwerten paarweise orthogonal (vgl. Fischer [2, Seite 313]).

Wir betrachten nun zunächst für  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  den Ausdruck

$$\alpha_j^2 p_j(\lambda_k) \cdot \sum_{l=1}^n \omega_l p_j(\lambda_l) = \alpha_j^2 p_j(\lambda_k) \cdot \int_a^b p_j(x) \omega(x) dx = \alpha_j^2 p_j(\lambda_k) \cdot \langle p_j, 1 \rangle,$$

für dessen Umformung die Exaktheit von  $G_n$  für die Polynome  $p_0, \dots, p_{n-1}$  genutzt wurde. Wegen der Orthogonalität der Polynome  $p_0, \dots, p_{n-1}$  und wegen  $\alpha_0 = 1$ ,  $p_0 \equiv 1$  ist der Ausdruck gleich  $\int_a^b \omega(x) dx$  für  $j = 0$  und gleich 0 für  $j \neq 0$ . Summiert man den Ausdruck über  $j$  auf, erhält man deswegen

$$\begin{aligned} \int_a^b \omega(x) dx &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=1}^n \alpha_j^2 p_j(\lambda_k) \omega_l p_j(\lambda_l) = \sum_{l=1}^n \omega_l \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j p_j(\lambda_k) \alpha_j p_j(\lambda_l) \\ &= \sum_{l=1}^n \omega_l (v^{(k)})^T v^{(l)} = \omega_k (v^{(k)})^T v^{(k)}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt verschwinden dabei alle Summanden für  $l \neq k$ , da die Vektoren  $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$  wie oben beschrieben paarweise orthogonal sind. Durch Division beider Seiten durch  $(v^{(k)})^T v^{(k)}$  ergibt sich die zu zeigende Darstellung. □

Die hier gezeigte Darstellung hat einige Vorteile bei der Berechnung der Gewichte, vor allem wenn die Rekursionsformel der orthogonalen Polynome bekannt ist. Im Gegensatz zu der alten Schreibweise, müssen nun nicht mehr die Integrale  $\int_a^b L_k(x) \omega(x) dx$  für  $k = 1, \dots, n$  explizit bestimmt werden.

### 3.5 Beispiel: Die Gauß-Tschebyscheff-Quadratur

Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir nun die bisherigen Ergebnisse nutzen, um die Gaußsche Quadraturformel bezüglich der Gewichtsfunktion  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  und den dazugehörigen orthogonalen Tschebyscheff-Polynomen auf dem Intervall  $[-1, 1]$  zu entwickeln.

Aus den bereits bekannten Nullstellen des  $n$ -ten Tschebyscheff-Polynoms ergeben sich direkt die optimalen Stützstellen für die  $n$ -stufige Quadraturformel:

$$\lambda_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Wir bestimmen nun die optimalen Gewichte  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Wie bereits aus Abschnitt 2.3.1 bekannt ist, gelten für die Tschebyscheff-Polynome die Beziehungen

$$p_0 = T_0 \equiv 1, \quad p_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n, \quad n \geq 1,$$

sowie für die Koeffizienten der Rekursionsformel

$$\gamma_1^2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_n^2 = \frac{1}{4}, \quad n \geq 2.$$

Somit folgt für die Koeffizienten  $\alpha_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$  aus der Darstellung (3.3) der Gewichte

$$\alpha_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ \sqrt{2} \cdot 2^{j-1}, & j = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Deshalb folgt auch durch Nutzung des Additionstheorems  $2 \cos^2 \alpha = \cos 2\alpha + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^2 p_j^2(\lambda_k) &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left( \sqrt{2} \cdot 2^{j-1} \frac{1}{2^{j-1}} T_j(\lambda_k) \right)^2 = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2 \cos^2 \left( j \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left( \cos \left( \frac{j(2k-1)\pi}{n} \right) + 1 \right) = n + \sum_{j=1}^{n-1} \cos \left( \frac{j(2k-1)\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Da nun

$$\cos\left((n-l)(2k-1)\frac{\pi}{n}\right) = \cos\left((2k-1)\pi - l(2k-1)\frac{\pi}{n}\right) = -\cos\left(l(2k-1)\frac{\pi}{n}\right)$$

für  $l \in \{1, \dots, n-1\}$  gilt, heben sich die Summanden für  $j = l$  und  $j = n-l$  gegenseitig auf, während für gerades  $n$  der Summand für  $j = \frac{n}{2}$  offenbar gleich Null ist. Somit bleibt in der oberen Gleichung nur noch

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^2 p_j^2(\lambda_k) = n.$$

Deshalb ergeben sich aus Darstellung (3.3) schließlich die Gewichte

$$\omega_k = \frac{1}{n} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{n} [\arcsin x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{n}.$$

Zusammen mit den Nullstellen des  $n$ -ten Tschebyscheff-Polynoms folgt also letztendlich die  $n$ -stufige Gaußsche Quadraturformel

$$G_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) \approx \int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

# Zusammenfassung und Literaturhinweise

Wir haben in dieser Ausarbeitung nun einige Details über orthogonale Polynome und in besonderem Maße über die Tschebyscheff-Polynome erfahren. Die zentralen Erkenntnisse, die wir über ihre Rolle in der Mathematik – speziell für die Polynominterpolation und die Gauß-Quadratur – erfahren haben, sollen im Folgenden nochmal kurz zusammengefasst werden.

- Die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome liefern die optimalen Stützstellen für die Polynominterpolation, um den Interpolationsfehler zu minimieren. Für die Interpolation auf dem Intervall  $[-1, 1]$  stimmen die Nullstellen direkt mit den optimalen Stützstellen überein, für die Interpolation auf einem anderen Intervall müssen sie noch transformiert werden.
- Die Nullstellen von orthogonalen Polynomen stimmen mit den optimalen Stützstellen für Quadraturformeln überein. Voraussetzung dafür ist, dass die Polynome orthogonal bezüglich des Skalarproduktes sind, dass durch das zu approximierende gewichtete Integral induziert wird.
- Die Gaußsche Quadraturformel ist bezüglich ihres Exaktheitsgrades unter den Quadraturformeln optimal.
- Die Stützstellen und Gewichte der Gaußschen Quadraturformel lassen sich mit Hilfe der Koeffizienten aus der Rekursionsformel für die orthogonalen Polynome bestimmen.

Zum Abschluss werden nun noch einige Literaturempfehlungen zu thematisch verwandten oder weiterführenden Inhalten gegeben. In Hanke-Bourgeois [5, Seite 286 ff.] wird beispielsweise beschrieben, wie sich beliebige Polynome mit den Tschebyscheff-Polynomen als Basis darstellen lassen. Ebenfalls in diesem Buch [5, Seite 292 ff.] wird noch auf die sogenannten Kernpolynome eingegangen, die ebenfalls orthogonal bezüglich eines gewichteten Skalarproduktes sind und unter anderem einen alternativen Ansatz zur Bestimmung der Gewichte bei der Gauß-Quadratur liefern. In Plato [6, Seite 114 ff.] wird ein Überblick über die numerische Integration von Funktionen gegeben, die nicht nur konkret auf die Gauß-Quadratur ausgelegt ist. Eine Vielzahl von Fakten und Eigenschaften mehrerer Orthogonalpolynome, wie beispielsweise ihre Nullstellen, Rekursionsformeln und explizite Darstellungen, werden in Abramowitz/Stegun [1, Seite 773 ff.] tabellarisch zusammengefasst.

# Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Handbook of mathematical functions. With formulas, graphs, and mathematical tables.* Dover Publications, New York, 1965.
- [2] G. Fischer: *Lineare Algebra.* Vieweg Friedr. & Sohn, Wiesbaden, 15. Auflage, 2005. Eine Einführung für Studienanfänger.
- [3] R. W. Freund, R. H. W. Hoppe: *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1.* Springer-Verlag, Berlin, 10. Auflage, 2007.
- [4] G. Hämmerlin, K.-H. Hoffmann: *Numerische Mathematik.* Springer Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1994.
- [5] M. Hanke-Bourgeois: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und Wissenschaftlichen Rechnens.* Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 3. Auflage, 2009.
- [6] R. Plato: *Numerische Mathematik kompakt.* Vieweg Friedr. & Sohn, Wiesbaden, 3. Auflage, 2006. Grundlagenwissen für Studium und Praxis.
- [7] H. R. Schwarz, N. Köckler: *Numerische Mathematik.* Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 7. Auflage, 2009.
- [8] H. Wußing, W. Arnold [Hrsg.]: *Biographien bedeutender Mathematiker.* Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, 1989.

# Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Mathias Kiekhäfer, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen angefertigt habe.

.....