Seminar Differentialgleichungen
WS 08/09
Kompakte Mengen in $\mathbf{L}^p$(0,T;B)

Niko Pelka

11. Juni 2009

Kapitel 1

Einführung

In dieser Seminararbeit geht es um die Charakterisierung von kompakten Mengen in $L^p(0,T;B)$, wobei B ein Banachraum und $1 \leq p \leq \infty$ ist .
Als Quelle diente ein Paper von Jaques Simon : "Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$ " [JS].

Motivation:
Sei $(f_n)_n$ ein beschränkte Folge von Funktionen in $L^p(0,T;B)$. Unter welchen Vorraussetzungen existiert eine stark konvergente Teilfolge, dass heißt wann ist $(f_n)_n$ relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$?

Die Beantwortung dieser Frage ist ein essentieller Punkt der "Kompaktheitsmethode" um die Existenz von Lösungen nichtlinearer Anfangswertprobleme zu beweisen.
(Die f_n sind hierbei dann Näherungslösungen und man möchte nun zum Grenzwert übergehen.)

Sowohl J.P. Aubin, als auch J.L. Lions haben sich mit dieser Fragestellung beschäftigt und auch einige Antworten geliefert. Ein sehr bekanntes Resultat ist sicherlich:

Theorem (Lions-Aubin)

Seien V_1,V_2,V_3 Banachräume, so dass $V_1 \overset{c}{\hookrightarrow} V_2 \hookrightarrow V_3$. Dann gilt für alle $1 < p < \infty$ und $1 \leq q \leq \infty$:

$$W^{p,q}(0,T;V_1,V_3) := \{v \in L^p(0,T;V_1) | v' \in L^q(0,T;V_3)\} \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(0,T;V_2)$$

(Ein Beweis findet sich unter anderem in [Ru] Lemma 3.74, Seite 121.)

Eine entscheidende Frage blieb bisher allerdings bestehen:
Was sind die minimalen Vorraussetzungen für Kompaktheit?
In fast allen bekannten Resultaten werden entweder unnötige Einschränkungen der Parameter (p > 1, p < ∞, ...) oder der Räume (Reflexivität, Seperabilität, Hilbert-Raum-Struktur,...) vorausgesetzt.

Die Idee, um die relative Kompaktheit einer Menge $F \subset L^p(0,T;B)$ nachzuweisen wird im Weiteren darauf beruhen, die Funktionen von F gleichmässig durch stetige "Mittelungsfunktionen" zu approximieren und anschließend das Arzelà-Ascoli-Theorem zu verwenden. Daher beweisen wir in Kapitel 2 zunächst eine entsprechende vektowertige Variante von Arzelà-Ascoli.

In Kapitel 3 schauen wir uns dann das Hauptresultat dieser Arbeit an:

Sei $F \subset L^p(0,T;B)$.
Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für $1 \leq p \leq \infty$ bzw. in $C([0,T];B)$ für $p = \infty$ genau dann wenn

(1.1) $\{\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt | f \in F\}$ relativ kompakt in B für alle $0 < t_1 < t_2 < T$ ist,

(1.2) $\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$.

Dabei wird (1.1) auch als Raum-Kriterium und (1.2) als Zeit-Kriterium bezeichnet.

Im darauf folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit partieller Kompaktheit. Dabei geht es um die relative Kompaktheit von F in $L^p(0,T;B)$, wenn F in $L^q(0,T;B)$ beschränkt ist für $q > p$. Wie wir sehen werden, lässt sich dann das Zeit-Kriterium von Theorem 1 auf den L^1_{loc} abschwächen.

In Kapitel 5 suchen wir anschließend nach Möglichkeiten, dass Zeit-Kriterium zu verifizieren. Diese Kriterien werden dann später nützlich sein, um aus den Theoremen entsprechende, für Anwedungen interessantere, Korollare zu folgern.

In den nun folgenden Kapiteln bauen wir die Theorie durch hinzunahme weiterer Banachräume auf, um am Ende Aussagen über die relative (partielle) Kompaktheit einer Menge F in $L^p(0,T;B)$ zu treffen, wenn Varianten des Ort- und Zeitkriteriums in Banachräumen X beziehungsweise Y gelten, wobei $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$. So beweisen wir in Kapitel 8 folgende Variante des Hauptresultats:
Sei $1 \leq p \leq \infty$ und

- F beschränkt in $L^p(0,T;X)$,
- $\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;Y)} \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$.

Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ beziehungsweise $C([0,T];B)$ für $p = \infty$.

In Kapitel 10 betrachten wir dann die Situation, dass eine Menge F Zeit- und Raumkriterium nur für verschiedene Koeffizienten p_0, p_1 erfüllt und beweisen Aussagen über die relative Kompaktheit von F in L^{p_θ} für p_θ zwischen p_0 und p_1.

Kapitel 2

Das Arzelà-Ascoli-Theorem

Sei nun $[0, T] \subset \mathbb{R}$ und B ein Banachraum.

Zuerst noch eine kurze Erinnerung:

Eine Teilmenge K $\subseteq$ E eines topologischen Raumes E heißt kompakt genau dann wenn zu jeder offenen Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung von K existiert.

Eine Menge heißt relativ kompakt genau dann wenn ihr Abschluß kompakt ist.

(2.1) Ist (E,$\|\cdot\|$) ein normierter Raum, so ist K relativ kompakt genau dann wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $\{e_i | i = 1, .., I_\epsilon\}$ von K existiert, so dass für alle $e \in$ K ein e_i existiert mit $\|e - e_i\| \leq \varepsilon$. Diese Eigenschaft wird auch "totale Beschränktheit" genannt.

(2.2) (2.1) ist erfüllt, falls K der gleichmäßige Limes relativ kompakter Mengen ist, dass heißt für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine relativ kompakte Menge K_ε, so dass für alle $e \in$ K ein $f \in \mathrm{K}_\varepsilon$ existiert mit $\|e - f\| < \varepsilon$.

Desweiteren werden wir die folgenden Versionen der Hölderschen und Youngschen Ungleichungen später noch benötigen.

Höldersche Ungleichung

Ist $g \in L^{s_0}(0, T; B)$ und $\phi \in L^{s_1}(0, T; B)$, wobei $1 \leq s_i \leq \infty$, so ist $g\phi \in L^s(0, T; B)$ und

$$\|g\phi\|_{L^s(0,T;B)} \leq \|g\|_{L^{s_0}(0,T;B)} \|\phi\|_{L^{s_1}(0,T;B)},$$

wobei $\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1}$.

Spezialfall: $\phi \equiv 1$

Ist $g \in L^{s_0}(0, T; B)$, $1 \leq s_0 \leq \infty$, so ist $g \in L^s(0, T; B)$ und

$$\|g\|_{L^s(0,T;B)} \leq T^{1/s - 1/s_0} \|g\|_{L^{s_0}(0,T;B)},$$

wobei $1 \leq s \leq s_0$.

Youngsche Ungleichung

Ist $g \in L^{s_0}(0, T; B)$ und $\phi \in L^{s_1}(0, a)$, wobei $1 \leq s_i \leq \infty$ und $G(t) := \int_0^a g(t + \lambda)\phi(\lambda) d\lambda$, so ist $G \in \mathrm{L}^s$(0,T-a;B) und

$$\|G\|_{L^s(0,T-a;B)} \leq \|g\|_{L^{s_0}(0,T-a;B)} \|\phi\|_{L^{s_1}(0,a)},$$

wobei $\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1} - 1$ $(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1} \geq 1)$.

Spezialfall: $\phi \equiv 1$

Ist $g \in L^{s_0}(0,T;B)$ mit $1 \leq s_0 \leq \infty$ und seine “right mean function“ (“Rechtsmittelungsfunktion“) definiert für $a > 0$ durch

$$(M_a g)(t) := \frac{1}{a} \int_t^{t+a} g(\lambda) d\lambda,$$

dann ist $M_a g \in$ C([0,T-a];B) und

$$\|M_a g\|_{L^s(0,T-a;B)} \leq \begin{cases} a^{1/s-1/s_0} \|g\|_{L^{s_0}(0,T)}, \text{ falls } s_0 \leq s \leq \infty \\ T^{1/s-1/s_0} \|g\|_{L^{s_0}(0,T)}, \text{ falls } 1 \leq s \leq s_0. \end{cases}$$

Ein Beweis für diese Version der Youngschen Ungleichung findet sich in [SI3], Appendix und note(1) im Beweis von Lemma 7.

Lemma 1(Variante von Arzelà-Ascoli)

Eine Menge $F \subset C([0,T];B)$ ist relativ kompakt genau dann wenn

(2.3) $F(t) := \{f(t)|f \in F\}$ relativ kompakt in B für alle $0 < t < T$ ist,

(2.4) F gleichmäßig gleichgradig stetig ist, dass heißt
für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $f \in F$ und $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ mit $|t_2 - t_1| < \delta$
$\|f(t_2) - f(t_1)\|_B < \varepsilon$ gilt.

Beweis von Lemma 1

“$\Rightarrow$“:

Sei F relativ kompakt in $C([0,T];B)$. Dann folgt (2.3) aus (2.1), denn nach Vorrausetzung gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $\{f_i\}$, so dass

$$\forall\ f \in F\ \exists\ f_i \text{ mit } \|f - f_i\|_\infty < \varepsilon,$$

dass heißt $\sup\limits_{t \in [0,T]} \|f(t) - f_i(t)\|_B < \varepsilon$.

Damit gilt diese Ungleichung natürlich auch für alle $0 < t < T$.

(2.4) gilt, da F gleichmäßig durch eine endliche Menge stetiger Abbildungen approximiert werden kann.

“$\Leftarrow$“:

Es gelte (2.3) und (2.4). Dann gilt (2.3) auch in $t = 0$ und $t = T$, denn aus (2.4) folgt

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ mit } \|f(0) - f(\delta)\|_B < \varepsilon\ \forall\ f \in F$$

und $F(\delta)$ ist relativ kompakt in B.

Also gilt (2.2) und somit ist $F(0)$ relativ kompakt in B. Die relative Kompaktheit von $F(T)$ beweist man analog.

Zu $N \in \mathbb{N}$ sei f_N die stückweise linear Interpolierende, die gleich f ist in $\frac{nT}{N}$ für alle $0 \leq n \leq N$ und linear dazwischen. Dann ist $F_N := \{f_N|f \in F\}$ isomorph zum Produkt der Mengen $F(\frac{nT}{N})$ $0 \leq n \leq N$, die relativ kompakt in B^{N+1} ist. Dann ist F relativ kompakt in $C([0,T];B)$. Falls $N \geq \frac{T}{\delta}$ ist, gilt nach (2.4) $\|f - f_N\|_\infty < \varepsilon$. Dann ist aber F nach (2.2) relativ kompakt in $C([0,T];B)$.

$\square$

Kapitel 3

Charakterisierung kompakter Mengen in $L^p(0,T;B)$

Zu $h > 0$ und $f : [0,T] \to B$ definiere $\tau_h f : [-h, T-h] \to B$ durch $(\tau_h f)(t) := f(t+h)$

Das Haupresultat dieser Arbeit lautet:

Theorem 1
Sei $F \subset L^p(0,T;B)$.
Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für $1 \leq p \leq \infty$ bzw. in $C([0,T];B)$ für $p = \infty$ genau dann wenn

(3.1) $\{\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt | f \in F\}$ relativ kompakt in B für alle $0 < t_1 < t_2 < T$ ist,

(3.2) $\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$.

Bemerkung 3.1

- Für p $= \infty$ ist (3.2) gerade die gleichmäßige gleichgradige Stetigkeit (2.4) aus Lemma 1.
- (3.2) läßt sich so ausdrücken:
  $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall f \in F\ \forall h < \delta : \|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} < \varepsilon$

Optimalität
Die Einschränkung $p < \infty$ ist notwendig, denn ist f eine unstetige, beschränkte Abbildung, so ist $F := \{f\}$ kompakt in $L^\infty(0,T;B)$, aber erfüllt (3.2) offensichtlich nicht.

Beweis von Theorem 1:
“$\Rightarrow$“:
Sei $F \subset L^p(0,T;B)$ relativ kompakt und $1 \leq p < \infty$.
Zu (3.1):
Da

$$f \mapsto \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

stetig von $L^p(0,T;B)$ nach B abbildet ist (3.1) erfüllt, denn die Bilder kompakter Mengen sind unter stetigen Abbildungen wieder kompakt.
Zu (3.2) bzw. (3.3):
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach (2.1) endlich viele Abbildungen $f_j \in L^p(0,T;B)$, $j = 1,..,I_\varepsilon$, so dass gilt:

$$\forall f \in F\ \exists f_i \in \{f_j | j = 1,..,I_\varepsilon\} \text{ mit } \|f - f_i\|_{L^p(0,T-h;B)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Da $C([0,T];B)$ dicht liegt in $L^p(0,T;B)$ (für $p < \infty$) können wir o.B.d.A die f_i auch aus $C([0,T];B)$ "wählen". Dann gilt aber:
Es existiert ein $h_i > 0$, so dass für alle $h < h_i$ gilt:

$$\|\tau_h f_i - f_i\|_{L^p(0,T-h;B)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sei nun $\delta := \inf f_i$. Da

$$\tau_h f - f = \tau_h(f - f_i) - (f - f_i) + (\tau_h f_i - f_i)$$

gilt für alle $h < \delta$, dass

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} &\leq \underbrace{\|f - f_i\|_{L^p(0,T;B)}}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{\|f - f_i\|_{L^p(0,T;B)}}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{\|\tau_h f_i - f_i\|_{L^p(0,T-h;B)}}_{<\varepsilon/3} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

dass heißt es gilt (3.2) beziehungsweise (3.3).
"$\Leftarrow$":
Sei $F \subset L^p(0,T;B)$ und es gelte (3.1) und (3.2). Wir zeigen die relative Kompaktheit von F, indem wir (2.2) benutzen, dass heißt wir zeigen, dass F der gleichmäßige Limes relativ kompakter Mengen ist. Dazu benutzen wir die "right mean function" aus Kapitel 2.
Zu $f \in F$ und $a > 0$ definiere

$$(M_a f)(t) := \frac{1}{a} \int_t^{t+a} f(s)ds.$$

Dann ist $M_a f \in C([0,T-a];B)$ und für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T - a$ gilt

$$\begin{aligned}
\|(M_a f)(t_2) - (M_a f)(t_1)\|_B &\overset{Def.}{=} \left\| \frac{1}{a} \int_{t_2}^{t_2+a} f(s)ds - \frac{1}{a} \int_{t_1}^{t_1+a} f(s)ds) \right\|_B \\
&= \left\| \frac{1}{a} \left(\int_{t_1}^{t_1+a} f(s + t_2 - t_1)ds - \int_{t_1}^{t_1+a} f(s)ds \right) \right\|_B \\
&= \left\| \frac{1}{a} \int_{t_1}^{t_1+a} (\tau_{t_2-t_1} f - f)(s)ds \right\|_B \\
&\leq \frac{1}{a} \int_0^{T-(t_2-t_1)} \|(\tau_{t_2-t_1} f - f)(s)\|_B \, ds \\
&= \frac{1}{a} \|\tau_{t_2-t_1} f - f\|_{L^1(0,T-(t_2-t_1));B)} .
\end{aligned}$$

Nach (3.2) gilt

$$\|\tau_{t_2-t_1} f - f\|_{L^1(0,T-(t_2-t_1));B)} \longrightarrow 0 \text{ für } h := t_2 - t_1 \to 0.$$

Da die Konvergenz in (3.2) gleichmäßig in $f \in F$ ist haben wir damit gezeigt, dass $M_a F := \{M_a f | f \in F\}$ gleichmäßig gleichgradig stetig in $C([0,T-a];B)$ ist.

Dann folgt für alle $0 < t < T-a$ aus Vorraussetzung (3.1) mit $t_1 := t$, $t_2 := t+a$, dass $(M_aF)(t) = \{\frac{1}{a}\int\limits_t^{t+a} f(s)ds | f \in F\}$ relativ kompakt in B ist.

Damit sind dann beide Vorraussetzungen von Lemma 1 erfüllt und wir wissen nun, dass M_aF relativ kompakt in $C([0, T-a]; B)$ ist.

Zu zeigen ist nun noch, dass F der gleichmäßige Limes von M_aF für $a \to 0$ ist.
Es gilt

$$M_af - f = \frac{1}{a}\int\limits_0^a (\tau_h f - f)dh \text{ in } \mathrm{L}^p(0, T-a, B),$$

denn aus (3.2) folgt, dass die Abbildung $h \mapsto \tau_h f$ von [0,a] nach $L^p(0, T-a; B)$ stetig ist. Daher ist die rechte Seite der Gleichung wohldefiniert und es gilt

$$\begin{aligned}
(M_af - f)(t) &\overset{Def.}{=} \frac{1}{a}\int\limits_t^{t+a} f(h)dh - \frac{1}{a}af(t) \\
&= \frac{1}{a}\left(\int\limits_0^a f(t+h)dh - \int\limits_0^a f(t)dh\right) \\
&= \frac{1}{a}\int\limits_0^a (\tau_h f - f)(t)dh.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\|M_af - f\|_{L^p(0,T-a;B)} \le \sup_{0\le h\le a} \|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-a;B)}.$$

Nach (3.3) folgt dann, dass für alle $T_1 < T$ F der gleichmäßige Limes von M_aF in $L^p(0, T_1; B)$ für $a \to 0$ ist. Also ist F nach (2.2) relativ kompakt in $L^p(0, T_1; B)$ für alle $T_1 < T$.
Um zu zeigen, dass dies auch bis einschließlich T gilt, betrachten wir f mit geänderter "Zeitrichtung":
Zu $f \in F$ sei $\tilde{f}(t) := f(T-t)$, $t \in [0, T]$.
Dann erfüllt $\tilde{F} := \{\tilde{f} | f \in F\}$ immer noch die Bedingungen (3.1) und (3.2), denn für alle
$0 < t_1 < t_2 <$ T ist

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \tilde{f}(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \tilde{f}(T-t)dt \overset{\sigma=T-t}{=} \int\limits_{T-t_1}^{T-t_2} (-1)f(\sigma)d\sigma = \int\limits_{T-t_2}^{T-t_1} (-1)^2 f(\sigma)d\sigma$$

und außerdem gilt (für h "klein")

$$\begin{aligned}
\left\|\tau_h\tilde{f} - \tilde{f}\right\|^p_{L^p(0,T-h;B)} &= \int\limits_0^{T-h} \left\|\tilde{f}(t+h) - \tilde{f}(t)\right\|^p_B dt \\
&= \int\limits_0^{T-h} \|f(T-t-h) - f(T-t)\|^p_B\, dt \\
&\overset{\sigma=T-t}{=} \int\limits_T^h \|f(\sigma-h) - f(\sigma)\|^p_B (-1)d\sigma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{h\text{“}klein\text{“}}{=} && (-1)^2 \int_h^T \|f(\sigma) - f(\sigma - h)\|_B^p \, d\sigma \\
&= && \int_0^{T-h} \|f(\sigma + h) - f(\sigma)\|_B^p \, d\sigma \\
&= && \|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \, .
\end{aligned}
$$

Dann ist, nach dem bisher Gezeigtem, $\tilde{F}$ relativ kompakt in $L^p(0, T_1; B)$ für alle $T_1 < T$. Das bedeutet aber, dass F relativ kompakt in $L^p(T - T_1, T; B)$ ist.
Mit $T_1 := T/2$ folgt nun die relative Kompaktheit von F in $L^p(0, T; B)$.
Den Fall in $C([0, T]; B)$ für $p = \infty$ beweist man analog.

□

Bemerkung 3.2

- Alternativ lässt sich die relative Kompaktheit von F in $L^p(T - T_1, T; B)$ auch zeigen, indem man die sogenannte “left mean function“

  $$\tilde{M}_a f(t) := \frac{1}{a} \int_{t-a}^{t} f(s) ds,$$

  statt $\tilde{f}(t) := f(T - t)$ verwendet.

- Es ist nicht notwendig anzunehmen, dass $F \subset L^p(0, T; B)$. Damit (3.1) und (3.2) Sinn ergeben reicht es anzunehmen, dass $f \in L^1_{loc}(0, T; B)$ und $\tau_h f - f \in L^p(0, T - h; B)$ für alle $f \in F$ und $h > 0$.
  Gilt dies, so folgt mit

  $$\tau_h f = f + (\tau_h f - f) \in L^1(h, T - h; B),$$

  dass $f \in L^1(0, T-2h; B)$. Analog folgt $f \in L^1(2h, T; B)$ und damit insgesamt $f \in L^1(0, T; B)$.
  Dann gilt (siehe den Beweis von Theorem 1), dass

  $$M_a f - f = \frac{1}{a} \int_0^a \tau_h f - f dh \in \mathrm{L}^1(0, T - a; B).$$

  Nach (3.2) (und dem Beweis von Theorem 1) ist

  $$h \mapsto \tau_h f \in C(0, a, L^p(0, T - a; B)).$$

  Daher konvergiert $\{\frac{1}{a} \int_0^a \tau_h f - f dh\}_{h>0} \subset L^p(0, T-a; B)$ womit folgt, dass $f \in L^p(0, T-a; B)$.
  Analog zeigt man $f \in L^p(a, T; B)$ und damit folgt insgesamt dann $f \in L^p(0, T; B)$.

- Mit Hilfe von Lemma 2 aus dem nächsten Kapitel läßt sich mit Theorem 1 eine vektowertige Erweiterung des Theorems von Riesz-Frechét-Kolmogorov formulieren (siehe Seite 11).

Kapitel 4

Charakterisierung für partielle Kompaktheit

Die Aufgabe ist hier die Charakterisierung von Mengen, die in $L^q(0,T;B)$ beschränkt und in $L^p(0,T;B)$ kompakt sind, wobei $p < q$. Dies wird partielle Kompaktheit genannnt, da die Kompaktheit nicht für die größere Ordnung q gilt, für die die Menge beschränkt ist.
Das Hauptresultat lautet wie folgt:

Theorem 2
Sei $1 \leq q \leq \infty$ und $F \subset L^q(0,T;B)$ beschränkt.
Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < q$ genau dann wenn für alle $0 < t_1 < t_2 < T$ gilt:

(4.1) $\{\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt | f \in F\}$ ist relativ kompakt in B,

(4.2) $\|\tau_h f - f\|_{L^1(t_1,t_2;B)} \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in$ F.

Bemerkung 4.1

- Hier wird also bei (4.2) das Zeitkriterium in L^1_{loc} gefordert, statt in $L^p(0,T-h;B)$, wie bei (3.2) in Theorem 1.
- (4.2) lässt sich so ausdrücken:
  $\forall\ 0 < t_1 < t_2 <$ T, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta \leq T - t_2$, so dass $\forall\ f \in F\ \forall\ h < \delta$: $\|\tau_h f - f\|_{L^1(t_1,t_2;B)} < \varepsilon$

Um Theorem 2 zu beweisen, zeigen wir zunächst die beiden folgenden 2 Lemma.

Lemma 2
$F \subset L^p(0,T;B)$ ist relativ kompakt genau dann wenn

(4.3) F relativ kompakt in $L^p_{loc}(0,T;B)$ ist,

(4.4) $\int\limits_0^h \|f(t)\|_B^p + \int\limits_{T-h}^T \|f(t)\|_B^p \longrightarrow 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$.

Anmerkung:

- (4.3) meint:
  Für alle $0 < t_1 < t_2 < T$ ist F relativ kompakt in $L^p(t_1,t_2;B)$ beziehungsweise $\{\mathbb{1}_{[t_1,t_2]} f | f \in F\}$ ist relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$.

Beweis von Lemma 2
"$\Rightarrow$":
Sei $F \subset L^p(0,T;B)$ relativ kompakt. Dann gilt (4.3) natürlich sofort.
Sei

$$\overline{f} := \begin{cases} f & \text{auf [0,T]} \\ 0 & \text{außerhalb von [0,T].} \end{cases}$$

Dann ist $\overline{F} := \{\overline{f} | f \in F\}$ relativ kompakt in $L^p(-T, 2T; B)$ und für alle $h \leq T$ gilt

$$\begin{aligned}
\left\|\tau_h \overline{f} - \overline{f}\right\|^p_{L^p(-T,2T-h;B)} &= \int_{-T}^{2T-h} \left\|\overline{f}(t+h) - \overline{f}(t)\right\|^p_B dt = \int_{-T}^{T} \left\|\overline{f}(t+h) - \overline{f}(t)\right\|^p_B dt \\
&= \int_{-T}^{-h} \underbrace{\left\|\overline{f}(t+h) - \overline{f}(t)\right\|^p_B}_{=0 \text{ auf } [-T,-h]} dt + \int_{-h}^{0} \left\|\overline{f}(t+h) - \overline{f}(t)\right\|^p_B dt \\
&+ \int_{0}^{T-h} \left\|\overline{f}(t+h) - \overline{f}(t)\right\|^p_B dt + \int_{T-h}^{T} \underbrace{\left\|\overline{f}(t+h) - \overline{f}(t)\right\|^p_B}_{=\left\|\overline{f}(t)\right\|^p_B \text{ auf } [T-h,T]} dt \\
&= \int_{-h}^{0} \left\|\overline{f}(t+h)\right\|^p_B dt + \int_{0}^{T-h} \left\|\overline{f}(t+h) - \overline{f}(t)\right\|^p_B dt + \int_{T-h}^{T} \left\|\overline{f}(t)\right\|^p_B dt \\
&= \int_{0}^{h} \|f(t)\|^p_B dt + \int_{0}^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|^p_B dt + \int_{T-h}^{T} \|f(t)\|^p_B dt.
\end{aligned}$$

Nach (3.2) gilt sowohl

$$\left\|\tau_h \overline{f} - \overline{f}\right\|^p_{L^p(-T,2T-h;B)} \to 0 \text{ für } h \to 0,$$

als auch

$$\int_{0}^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|^p_B dt = \|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \to 0 \text{ für } h \to 0.$$

Folglich gilt damit dann (4.4).
"$\Leftarrow$":
Es gelte (4.3) und (4.4). Setze $f_h := \mathbb{1}_{[-h,T-h]} f$ und $F_h := \{f_h | f \in F\}$. Dann gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists h : \|f_h - f\|_{L^p(0,T;B)} < \varepsilon \text{ gleichmäßig in } f \in F,$$

denn

$$\begin{aligned}
\|f_h - f\|^p_{L^p(0,T;B)} &= \underbrace{\int_{0}^{h} \|f_h(t) - f(t)\|^p_B dt}_{\text{auf [0,h[ist } f_h \equiv 0} + \underbrace{\int_{h}^{T-h} \|f_h(t) - f(t)\|^p_B dt}_{\text{auf [h,T-h[ist } f_h \equiv f} + \underbrace{\int_{T-h}^{T} \|f_h(t) - f(t)\|^p_B dt}_{\text{auf [T-h,T[ist } f_h \equiv 0} \\
&= \int_{0}^{h} \|f(t)\|^p_B + \int_{T-h}^{T} \|f(t)\|^p_B \longrightarrow 0 \text{ für } h \to 0 \text{ gleichmäßig in } f \in F \text{ nach (4.4).}
\end{aligned}$$

Dass heißt aber, dass F der gleichmäßige Limes relativ kompakter Mengen F_h ist und daher nach (2.2) relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ ist.

$\square$

Lemma 3

Sei $F \subset L^q(0,T;B)$ beschränkt, wobei $1 < q \leq \infty$. Dann gilt:
Wenn F relativ kompakt in $L^1_{loc}(0,T;B)$ ist, so ist F auch relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < q$.

Beweis von Lemma 3

Nach der Hölderschen Ungleichung gilt für alle $h \leq$ T und für alle $f \in F$, dass

$$\int_0^h \|f(t)\|_B dt + \int_{T-h}^T \|f(t)\|_B dt \leq 2h^{1-1/q} \|f\|_{L^q(0,T;B)}.$$

Dann folgt mit Lemma 2, dass F relativ kompakt in $L^1(0,T;B)$ ist.
Zu gegebenen $1 < p < q$ folgt nun aus Lemma 11 in Kapitel 10 (mit $X = Y = B$ und θ definiert durch $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q} + \theta$) die relative Kompakheit von F in $L^p(0,T;B)$.

$\square$

Nun zum

Beweis von Theorem 2

Nach Theorem 1 sind die Eigenschaften (4.1) und (4.2) äquivalent zur relativen Kompaktheit von F in $L^1_{loc}(0,T;B)$. Dies ist mit Lemma 3 aber äquivalent zur relativen Kompaktheit von F in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < q$.

$\square$

Durch Theorem 1 erhalten wir mit Hilfe von Lemma 2 eine vektorwertige Erweiterung des

Theorem von Riesz-Fréchet-Kologorov

Eine Menge $F \subset L^p(0,T;B)$ ist relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$, $1 \leq p < \infty$ genau dann wenn

- für alle $0 < t_1 < t_2 < T$ $\{\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt | f \in F\}$ relativ kompakt in B ist,
- für alle $a > 0$ $\int_a^{T-a} \|f(t+h) - f(t)\|_B^p \, dt \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$ und
- $\int_0^a \|f(t)\|_B^p + \int_{T-a}^T \|f(t)\|_B^p \, dt \to 0$ für $a \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$.

Kapitel 5

Einige Abschätzungen für Translationen

Wir suchen nun Möglichkeiten das Zeit-Kriterium (3.2) bzw. (4.2) zu verifizieren. Dazu betrachten wir im Folgenden Funktionen mit integrierbaren Ableitungen beziehungsweise allgemeiner Distributionen mit integrierbaren Ableitungen. Eine 2. Möglichkeit ist es, Funktionen in Sobolev-Räumen zu betrachten. Dazu einige kurze Erinnerungen/Definitionen:

Sei $\mathcal{D}'(]0,T[;B)$ der Raum der Distributionen von]0,T[nach B, dass heißt die Menge aller linearen, stetigen Abbildungen von $\mathcal{D}(]0,T[)$ nach B.
$\mathcal{D}(]0,T[)$ ist dabei die Menge aller reellwertigen C^∞-Funktionen mit kompakten Träger in $]0,T[$.
Die Ableitung $\partial f/\partial t$ einer Distribution f ist definiert durch

$$(\partial f/\partial t)(\phi) := -f(\partial\phi/\partial t),\ \phi \in \mathcal{D}(]0,\mathrm{T}[).$$

Zu jeder lokal integrierbaren Funktion f läßt sich über

$$f(\phi) := \int\limits_0^T f(t)\phi(t)dt,\ \phi \in \mathcal{D}(]0,\mathrm{T}[)$$

eine reguläre Distribution definieren.
Daher lässt sich $L^p(0,T;B)$ läßt sich mit einem Unterraum von $\mathcal{D}'(]0,T[;B)$ identifizieren.
Zu $1 \leq p < \infty$ und $1 \leq m < \infty$ ist

$$W^{m,p}(0,T;B) := \{f \in L^p(0,T;B) | \partial f/\partial t, .., \partial^m f/\partial^m t \in L^p(0,T;B)\},$$

versehen mit der Norm $\|f\|_{1,p} := (\|f\|_p^p + \sum\limits_{i=1}^m \|\partial^i f/\partial^i t\|_p^p)^{1/p}$ ein Banachraum und wird als Sobolev-Raum bezeichnet.
Zu $0 < \sigma < 1$ und $1 \leq p \leq \infty$ definiere

$$W^{\sigma,p}(0,\mathrm{T;B}) := \{f \in L^p(0,T;B) | \int\limits_0^T \int\limits_0^T \frac{\|f(t) - f(s)\|_B^p}{|t-s|^{\sigma p+1}} dtds < \infty\}$$

Durch $\|f\|_{\dot{W}^{\sigma,p}} := (\int_0^T \int_0^T ...dtds)^{1/p}$ wird eine Halbnorm und durch
$\|f\|_{W^{\sigma,p}} := (\|f\|_{L^p}^p + \|f\|_{\dot{W}^{\sigma,p}}^p)^{1/p}$ eine Norm auf $W^{\sigma,p}(0,T;B)$ definiert.
Diesen Raum nennt man auch "Sobolev-Slobodetsky-Raum".

Lemma 4
Sei $f \in \mathcal{D}'(]0,T[;B)$, so dass $\partial f/\partial t \in L^r(0,T;B)$ für ein $1 \le r \le \infty$. Dann ist $f \in C([0,T];B)$ und für alle $h > 0$ gilt

$$\frac{1}{h}\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \le \begin{cases} h^{1/p-1/r}\|\frac{\partial f}{\partial t}\|_{L^r(0,T;B)} & \text{, falls } r \le p \le \infty \\ T^{1/p-1/r}\|\frac{\partial f}{\partial t}\|_{L^r(0,T;B)} & \text{, falls } 1 \le p \le r. \end{cases}$$

Beweis von Lemma 4
Für alle $g \in L^1(0,T;B)$ gilt $g - (\frac{\partial}{\partial t})\int_0^{\bullet} g(s)ds = 0$.

(Dass $g(t) - (\frac{\partial}{\partial t})\int_0^t g(s)ds = 0$ für alle $t \in [0,T]$ ist für g stetig offensichtlich. Der allgemeine Fall folgt hieraus, da $C([0,T];B)$ dicht in $L^1(0,T;B)$ liegt.) Setze nun $g := \frac{\partial f}{\partial t}$. Dann ist $(\frac{\partial}{\partial t})(f - \int_0^{\bullet} \frac{\partial f}{\partial t}(s)ds) = 0$, woraus folgt, dass ein $b \in B$ existiert mit $f - \int_0^{\bullet} \frac{\partial f}{\partial t}(s)ds = 0$.
(Siehe z.B. [LS], Theorem 1 Seite 51 : "Jede reelle Distribution, deren Ableitung äquivalent 0 ist, ist konstant". Der Beweis lässt sich direkt auf vektowertige Distributionen übertragen.)
Dann ist $f \in C([0,T];B)$ und für alle $0 \le t \le T-h$ gilt

$$f(t+h) - f(t) = \int_t^{t+h} \frac{\partial f}{\partial t}(s)ds$$

, dass heißt

$$\tau_h f - f = hM_h(\frac{\partial f}{\partial t}).$$

Die Abschätzung folgt nun direkt als Spezialfall der Young'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} &= \|hM_h(\frac{\partial f}{\partial t})\|_{L^p(0,T-h;B)} \\ &\overset{Young}{\le} \begin{cases} h^{1+1/p-1/r}\|\frac{\partial f}{\partial t}\|_{L^r(0,T;B)} & \text{, falls } r \le p \le \infty \\ hT^{1/p-1/r}\|\frac{\partial f}{\partial t}\|_{L^r(0,T;B)} & \text{, falls } 1 \le p \le r. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Ein ähnliches Resutat lässt sich für Sobolev-Räume zeigen:
Lemma 5
Sei $f \in W^{\sigma,p}(0,T;B)$, $0 < \sigma < 1$, $1 \le r \le \infty$ und p, so dass

$$\begin{cases} p \le \infty & \text{, falls } \sigma > \frac{1}{r} \\ p < \infty & \text{, falls } \sigma = \frac{1}{r} \\ p \le \frac{r}{1-\sigma r} & \text{, falls } \sigma < \frac{1}{r}. \end{cases}$$

Dann ist $f \in L^p(0,T;B)$ und es existiert ein $c \ge 0$ (unabhängig von f), so dass für alle $h > 0$ gilt:

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \le \begin{cases} ch^{\sigma+1/p-1/r}\|\frac{\partial f}{\partial t}\|_{\dot W^{\sigma,r}(0,T;B)} & \text{, falls } r \le p \le \infty \\ chT^{1/p-1/r}\|\frac{\partial f}{\partial t}\|_{\dot W^{\sigma,r}(0,T;B)} & \text{, falls } 1 \le p \le r. \end{cases}$$

Desweiteren gilt noch

Lemma 6

Sei $f \in L^r(0,T;B)$, so dass $\|\tau_h f - f\|_{L^r(0,T-h;B)} \leq Mh^\sigma$ für alle $h > 0$, wobei $1 \leq r \leq \infty$ und $0 < \sigma \leq 1$. Außerdem sei p, so dass

$$\begin{cases} p \leq \infty \text{ , falls } \sigma > \dfrac{1}{r} \\ p \leq \dfrac{r}{1-\sigma r} \text{ , falls } \sigma \leq \dfrac{1}{r}. \end{cases}$$

Dann ist $f \in L^p(0,T;B)$ und es existiert ein c (unabhängig von f), so dass für alle $h > 0$ gilt:

$$\|\tau_h f - f\|_{L^r(0,T-h;B)} \leq \begin{cases} cMh^{\sigma+1/p-1/r} \text{ , falls } r \leq p \leq \infty \\ ch^\sigma T^{1/p-1/r} \text{ , falls } 1 \leq p \leq r. \end{cases}$$

Beweise für Lemma 5 und 6 finden sich in [SI3] unter Bemerkung 8.4 und 8.5.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Lemmata werden im weiteren Verlauf noch sehr nützlich sein, um aus den Theoremen mehr anwendungsbezogene Kriterien herzuleiten.

Kapitel 6

Kompaktheit von Funktionen mit Werten in einem kompakten Raum X

Wir nehmen nun noch einen weiteren Banachraum X hinzu, so dass

(6.1) $X \stackrel{c}{\hookrightarrow} B.$

Dann erhalten wir folgende Variante unseres Theorems:

Theorem 3
Sei $F \subset L^p(0,T;B)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und gelte (6.1). Außerdem sei

(6.2) F beschränkt in $L^1_{loc}(0,T;X)$,

(6.3) $\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$.

Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ beziehungsweise $C([0,T];B)$ für $p = \infty$.

Beweis von Theorem 3
Nach (6.2) gilt für alle $0 < t_1 < t_2 < T$, dass $f \in F$ beschränkt in $L^1(t_1,t_2;X)$ ist. Daher ist $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ beschränkt in X und (da $X \stackrel{c}{\hookrightarrow}$ B) relativ kompakt in B.
Damit sind alle Vorrausetzungen von Theorem 1 erfüllt und die Behauptung folgt sofort.

$\square$

Bemerkungen 6.1

- Wie man am Beweis sieht, kann (6.2) auch durch das schwächere Kriterium "Für alle $0 < t_1 < t_2 < T$ ist $f \in$ F beschränkt in $L^1(t_1,t_2;X)$" ersetzt werden.
- Auch hier ist es nicht nötig anzunehmen, dass $F \subset L^p(0,T;B)$. Es reicht anzunehmen, dass $\tau_h f - f \in L^p(0,T-h;B)\ \forall f \in F, h > 0$ (siehe Bemerkung (3.2)).

Für differenzierbare Funktionen folgt:
Korollar 1
Sei $m \in \mathbb{Z}$, F beschränkt in $W^{-m,1}_{loc}(0,T;X)$ und gelte (6.1).

- Ist $\frac{\partial F}{\partial t} := \{\frac{\partial f}{\partial t} | f \in F\}$ beschränkt in $L^1(0,T;B)$, so ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < \infty$.
- Ist $\frac{\partial F}{\partial t}$ beschränkt in $L^r(0,T;B)$ für ein $r > 1$, so ist F relativ kompakt in $C([0,T];B)$

Mit Hilfe von Korollar 1 lässt sich dann noch folgende Aussage beweisen.

Korollar 2

Sei F beschränkt bezüglich der Norm auf $L^1(0,T;X)$ und der Halbnorm $\|\cdot\|_{\dot{W}^{s,r}(0,T;B)}$.
Dann gilt:

- Ist $s \leq \dfrac{1}{r}$, so ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < \dfrac{r}{1-sr}$.
- Ist $s > \dfrac{1}{r}$, so ist F relativ kompakt in $C([0,T];B)$.

Beweise der beiden Aussagen finden sich in [JS] auf den Seiten 81,82 unter Korollar 1 beziehungsweise Korollar 2 im Spezialfall $s_0 = 0, r_0 = 1$.

Kapitel 7

Partielle Kompaktheit für Funktionen mit Werten in einem kompakten Raum X

Ist F beschränkt in $L^q(0,T;B)$, so lässt sich mit Hilfe von Theorem 2 die relative Kompaktheit von F in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < q$ auch mit schwächeren Vorrausetzungen als in Kapitel 6 zeigen. Seien wieder X, B Banachräume mit $X \overset{c}{\hookrightarrow} B$.

Theorem 4
Sei $1 < q \leq \infty$ und

(7.2) F beschränkt in $L^q(0,T;B) \cap L^1_{loc}(0,T;X)$,

(7.3) $\|\tau_h f - f\|_{L^1_{loc}(0,T;B)} \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$.

Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < q$.

Beweis von Theorem 4
F ist beschränkt in $L^1_{loc}(0,T;X)$, dass heißt für alle $0 < t_1 < t_2 < T$ ist F beschränkt in $L^1(t_1,t_2;X)$. Das bedeutet aber, dass $\{\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt | f \in F\}$ beschränkt ist in X und somit (wegen $X \overset{c}{\hookrightarrow} B$) relativ kompakt in B ist.
Also sind alle Vorrausetzungen von Theorem 2 erfüllt und die Behauptung folgt sofort.

$\square$

Kapitel 8

Kompaktheit für Funktionen mit Werten in einem "Zwischenraum"

Wir nehmen nun noch einen weiteren Banachraum Y hinzu.

(8.1) Seien X, B, Y Banachräume, so dass $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$.

Theorem 5
Sei $1 \leq p \leq \infty$ und

(8.2) F beschränkt in $L^p(0,T;X)$,

(8.3) $\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;Y)} \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$.

Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ beziehungsweise $C([0,T];B)$ für $p = \infty$.

Für den Beweis von Theorem 5 zeigen wir zuerst 2 Lemma.

Lemma 8 (Ehrlingsches Lemma)
Aus (8.1) folgt:

$$\forall\, \nu > 0 \;\exists\, N \leq 0, \text{ so dass } \forall\, v \in X \text{ gilt: } \|v\|_B \leq \nu\|v\|_X + N\|v\|_Y$$

Beweis von Lemma 8
Sei $V_n := \{v \in B | \|v\|_B < \nu + n\|v\|_Y\}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen V_n sind offen in B, wachsend in n und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \supset B$. Da die Einheitssphäre S aus X in B relativ kompakt ist, existiert ein N mit $S \supset V_N$. Daher gilt für alle $v \in X$ mit $\|v\|_X = 1$: $\|v\|_B \leq \nu\|v\|_X + N\|v\|_Y$
Für beliebiges $v \in X$ multipliziere die Gleichung mit einer beliebigen positiven Zahl.

□

Lemma 9
Sei F beschränkt in $L^p(0,T;X)$ und relativ kompakt in $L^p(0,T;Y)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und gelte (8.1). Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$.

Beweis von Lemma 9
Nach (2.1) existiert zu $\tilde{\varepsilon} > 0$ eine endliche Teilmenge $\{f_i\}$ von F, so dass gilt:

$$\forall\, f \in F \;\exists\, f_i : \|f - f_i\|_{L^p(0,T;Y)} < \tilde{\varepsilon}.$$

Mit Hilfe von Lemma 8 folgt nun: $\forall\, \nu > 0 \;\exists\, N$ mit

$$\|f - f_i\|_{L^p(0,T;B)} \leq \nu\|f - f_i\|_{L^p(0,T;X)} + N \underbrace{\|f - f_i\|_{L^p(0,T;Y)}}_{<\tilde{\varepsilon}} \leq \nu c + N\tilde{\varepsilon},$$

wobei c der “Durchmesser“ von F in $L^p(0,T;X)$ ist. (F ist ja nach Vorrausetzung beschränkt in $L^p(0,T;X)$.)
Sei nun $\varepsilon > 0$. Setze $\nu := \frac{\varepsilon}{2c}$ und $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2N}$. Dann ist $\|f - f_i\|_{L^p(0,T;B)} < \varepsilon$,
dass heißt F ist relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$.

□

Beweis von Theorem 5
Nach Theorem 1 ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;Y)$.
Mit Lemma 9 folgt nun sofort die Behauptung.

Mit Hilfe dieses Theorems (und Kapitel 5) lässt sich dann folgendes Korollar beweisen:
Korollar 4
Es gelte (8.1).

- Sei F beschränkt in $L^p(0,T;X)$ mit $1 \leq p < \infty$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ beschränkt in $L^1(0,T;Y)$.
  Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$
- Sei F beschränkt in $L^\infty(0,T;X)$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ beschränkt in $L^r(0,T;Y)$ für ein $r > 1$.
  Dann ist F relativ kompakt in $C([0,T];B)$

Kapitel 9

Partielle Kompaktheit für Funktionen mit Werten in einem "Zwischenraum"

Analog zu Kapitel 6/7 nehmen wir wieder an, dass F beschränkt ist in L^q(0,T;B) und zeigen die relative Kompaktheit von F in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < q$ mit schwächeren Vorrausetzungen als in Kapitel 8.

Sei (wieder) $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$ $(X, B, Y$ BR).

Theorem 6
Sei $1 < q \leq \infty$ und

(9.2) F beschränkt in $L^q(0,T;B) \cap L^1_{loc}(0,T;X)$,

(9.3) $\|\tau_h f - f\|_{L^1_{loc}(0,T;Y)} \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$.

Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < q$.

Beweis von Theorem 6
Nach Theorem 1 ist F relativ kompakt in $L^1_{loc}(0,T;Y)$. Dann ist nach Lemma 9 F auch relativ kompakt in $L^1_{loc}(0,T;B)$. Mit Lemma 3 von Seite 11 folgt dann direkt die Behauptung.

$\square$

Mit Hilfe von Lemma 4 beziehungsweise 5 lassen sich dann direkt folgende Korollare zeigen.

Korollar 6
Sei $1 < q \leq \infty$.
Sei F beschränkt in $L^q(0,T;B) \cap L^1_{loc}(0,T;X)$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ beschränkt in $L^1_{loc}(0,T;Y)$.
Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < q$.

Korollar 7
Sei $1 < q \leq \infty$, $s > 0$ und F beschränkt in $L^q(0,T;B) \cap L^1_{loc}(0,T;X) \cap W^{s,1}_{loc}(0,T;Y)$.
Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < q$.

Kapitel 10

“Zwischenräume“ der Klasse θ

Wir betrachten nun eine Menge F, die das Raum- und Zeitkriterium (8.2) und (8.3) erfüllt, allerdings mit 2 verschiedenen Koeffizienten p_0, p_1.

1. Ist $p_0 > p_1$, so liefert Theorem 6 die relative Kompaktheit von F in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < p_0$. Diese Aussage kann nicht nicht verbessert werden.
2. Ist $p_0 < p_1$, so ist F relativ kompakt in L^{p_0}(0,T;B) nach Theorem 5.
   Ziel ist nun, dieses Resultat zu verbessern, wenn wir zusätzlich wissen, dass B ein Raum der Klasse θ ist, dass heißt, wenn folgende “interpolatorische Ungleichung“ gilt:

   (10.1) Es existieren Konstanten $0 < \theta < 1$ und M mit $\|v\|_B \leq M\|v\|_X^{1-\theta}\|v\|_Y^{\theta}\ \forall\ v \in \mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$.

   Diese Definition stammt von J.L. Lions und J. Peetre [LP] (In ihren Worten heißt dass $B \in K_\theta$(X,Y); siehe Definition 1.1 Seite 27).

Im Folgenden nehmen wir an, dass

(10.2) $\quad \mathrm{X} \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ mit $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$

und es soll zusätzlich nun noch (10.1) gelten.

Theorem 7
Sei $1 \leq p_i \leq \infty\ i = 0,1$ und

(10.3) F beschränkt in $L^{p_0}(0,T;X)$,

(10.4) $\|\tau_h f - f\|_{L^{p_1}(0,T;Y)} \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in $f \in F$.

Dann ist F relativ kompakt in $L^{p_\theta}(0,T;B)$, wobei $\dfrac{1}{p_\theta} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.

Anmerkung
Da die Ordnung p_θ zwischen p_0 und p_1 liegt, macht dieses Resultat nur Sinn für $p_0 < p_1$. In diesem Fall wächst p_θ mit Zunahmne von θ und daher ist bei (10.1) das größte θ gesucht, welches die Ungleichung erfüllt.

Der Beweis von Theorem 7 reduziert sich im Wesentlichen auf den Beweis der 2 folgenden Lemma.

Lemma 10
Es gelte (10.1). Sei K eine in X beschränkte und in Y relativ kompakte Menge.
Dann ist K relativ kompakt in B.

Beweis von Lemma 10
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $\{v_i\}$ von K, so dass gilt:

$$\forall v \in K \exists v_i \text{ mit } \|v - v_i\|_Y < \varepsilon.$$

Dann ist

$$\|v - v_i\|_B \overset{(10.1)}{\leq} M\|v - v_i\|_X^{1-\theta}\varepsilon^\theta = Mc^{1-\theta}\varepsilon^\theta,$$

wobei c der "Durchmesser" von K in X ist.
Das heißt aber nichts anderes, als das K relativ kompakt in B ist.

$\square$

Lemma 11
Es gelte (10.1). Sei F beschränkt in $L^{p_0}(0,T;X)$ und relativ kompakt in $L^{p_1}(0,T;Y)$, wobei $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 0, 1$.
Dann ist F relativ kompakt in $L^{p_\theta}(0,T;B)$, wobei $\dfrac{1}{p_\theta} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.

Beweis von Lemma 11
Wir zeigen zunächst, dass

$$\forall\ f \in L^{p_0}(0,T;X) \cap L^{p_1}(0,T;Y) : f \in L^{p_\theta}(0,T;B)$$

und

$$(10.5)\ \|f\|_{L^{p_\theta}(0,T;B)} \leq M\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_0}(0,T;X)}\|f\|^\theta_{L^{p_1}(0,T;Y)}$$

gilt, wobei $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.
Sei also $f \in L^{p_0}(0,T;X) \cap L^{p_1}(0,T;Y)$. Aus der reellen Young'schen Ungleichung $ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'}$ für $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ angewendet auf

$$a = \left(\frac{\|f(t)\|_X}{\|f\|_{L^{p_0}(0,T;X)}}\right)^{p_\theta(1-\theta)},\ b = \left(\frac{\|f(t)\|_Y}{\|f\|_{L^{p_1}(0,T;Y)}}\right)^{p_\theta\cdot\theta}$$

mit

$$q = \frac{p_0}{p_\theta(1-\theta)},\ q' = \frac{p_1}{p_\theta\cdot\theta}$$

folgt

$$\begin{aligned}\|f(t)\|_X^{p_\theta(1-\theta)}\|f(t)\|_Y^{p_\theta\cdot\theta} \quad &\leq \quad \frac{1}{q}\|f\|^{p_\theta(1-\theta)-p_0}_{L^{p_0}(0,T;X)}\|f\|^{p_\theta\cdot\theta}_{L^{p_1}(0,T;Y)}\|f(t)\|_X^{p_0} \\ &+ \quad \frac{1}{q'}\|f\|^{p_\theta(1-\theta)}_{L^{p_0}(0,T;X)}\|f\|^{p_\theta\cdot\theta-p_1}_{L^{p_1}(0,T;Y)}\|f(t)\|_Y^{p_1}.\end{aligned}$$

Aus (10.1) wissen wir

$$\|f(t)\|_B \leq M\|f(t)\|_X^{1-\theta}\|f(t)\|_Y^\theta.$$

Damit folgt

$$\|f\|^{p_\theta}_{L^{p_\theta}(0,T;B)} \quad = \quad \int_0^T \|f(t)\|_B^{p_\theta}dt \overset{(10.1)}{\leq} M^{p_\theta}\int_0^T \|f(t)\|_X^{p_\theta(1-\theta)}\|f(t)\|_Y^{p_\theta\cdot\theta}dt$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{Young}{\leq} && M^{p_\theta}\Big(\frac{1}{q}\|f\|^{p_\theta(1-\theta)-p_0}_{L^{p_0}(0,T;X)}\|f\|^{p_\theta\cdot\theta}_{L^{p_1}(0,T;Y)}\int_0^T\|f(t)\|^{p_0}_X dt \\
& && + \frac{1}{q'}\|f\|^{p_\theta(1-\theta)}_{L^{p_0}(0,T;X)}\|f\|^{p_\theta\cdot\theta-p_1}_{L^{p_1}(0,T;Y)}\int_0^T\|f(t)\|^{p_1}_Y dt\Big) \\
&= && M^{p_\theta}\|f\|^{p_\theta(1-\theta)}_{L^{p_0}(0,T;X)}\|f\|^{p_\theta\cdot\theta}_{L^{p_1}(0,T;Y)} \\
& && \left(\frac{1}{q}\|f\|^{-p_0}_{L^{p_0}(0,T;X)}\|f\|^{p_0}_{L^{p_0}(0,T;X)}+\frac{1}{q'}\|f\|^{-p_1}_{L^{p_1}(0,T;Y)}\|f\|^{p_1}_{L^{p_1}(0,T;Y)}\right) \\
&= && M^{p_\theta}\|f\|^{p_\theta(1-\theta)}_{L^{p_0}(0,T;X)}\|f\|^{p_\theta\cdot\theta}_{L^{p_1}(0,T;Y)}\underbrace{(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'})}_{=1}.
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$f \in L^{p_\theta}(0,T;B)$$

und es gilt

$$\|f\|_{L^{p_\theta}(0,T;B)} \leq M\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_0}(0,T;X)}\|f\|^{\theta}_{L^{p_1}(0,T;Y)}.$$

Mit Lemma 10 angewendet auf $K = F$ folgt jetzt die Behauptung von Lemma 11.

□

Nun folgt sofort der

Beweis von Theorem 7

Nach Theorem 1 ist F relativ kompakt in $L^{p_1}(0,T;Y)$.
Die Behauptung folgt dann sofort mit Lemma 11.

□

Bemerkung 10.1

Die Annahmen (10.1) und (10.2) implizieren, dass die Einbettung $X \hookrightarrow B$ kompakt ist:
Die Einheitskugel ist beschränkt in X und wegen (10.2) dann relativ kompakt in Y. Zusammen mit (10.1) sind dann die Vorrausetzungen von Lemma 10 für $K =$ Einheitskugel in X erfüllt und die Behauptung folgt sofort.

Für Funktionen deren Ableitungen integrabel sind, ist das Zeit-Kriterium (10.4) für alle $p_1 < \infty$ erfüllt (benutze dafür Lemma 4) und wir erhalten mit Theorem 7 folgende Aussage.

(10.6)

Sei F beschränkt in $L^{p_0}(0,T;X)$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ beschränkt in $L^1(0,T;Y)$
Dann ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < \dfrac{p_0}{1-\theta}$.

Diese Aussage verbessert Korollar 4 im Fall $r = 1$.
Es lässt sich aber noch ein besseres Resultat beweisen:

Korollar 8

Es gelte (10.1), (10.2) und sei $1 \leq p_0 \leq \infty$, $1 \leq r_1 \leq \infty$.
Sei F beschränkt in $L^{p_0}(0,T;X)$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ beschränkt in $L^{r_1}(0,T;Y)$.
Dann gilt:

- Ist $\theta(1-\dfrac{1}{r_1}) \le \dfrac{1-\theta}{p_0}$, so ist F relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$ für alle $p < p_*$, wobei $\dfrac{1}{p_*} = \dfrac{1-\theta}{p_0} - \theta(1-\dfrac{1}{r_1})$.
- Ist $\theta(1-\dfrac{1}{r_1}) > \dfrac{1-\theta}{p_0}$, so ist F relativ kompakt in $C([0,T];B)$.
- Ist $r_1 = 1$ gilt Aussage (10.6).

Beweis von Korollar 8

Nach Lemma 4 gilt

$$\|\tau_h f - f\|_{L^{r_1}(0,T-h;Y)} \le c_1 h \;\forall\; f \in F.$$

Aus Ungl. (10.5) folgt dann

$$\|\tau_h f - f\|_{L^{r_\theta}(0,T-h;B)} \le M\|\tau_h f - f\|^{1-\theta}_{L^{p_0}(0,T-h;X)}\|\tau_h f - f\|^{\theta}_{L^{r_1}(0,T-h;Y)} \le M c_0^{1-\theta} c_1^{\theta} h^{\theta},$$

wobei $\frac{1}{r_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{r_1}$ und c_1 der Durchmesser von F in $L^{p_0}(0,T;X)$ ist.
Mit Theorem 3 (und Hilfe von Lemma 5) folgt nun die Behauptung.

$\square$

Literaturverzeichnis

[JS] J.Simon “Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$“, Ann. Mat. Pura Appl. 146 (1987) 65-96

[SI3] J.Simon “Fractional Sobolev theorem in one dimension“, preprint of L.A. 189, Univ. Pris VI (1985)

[LP] J.L.Lions, J.Peetre “Sur une classed’espace d’interpolation“, Inst. Hautes Etudes 19, Paris (1964) 5-68

[Ru] M.Růžička “Nichtlineare Funktionalanalysis.Eine Einführung“, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2004

[LS] L. Schwartz “Théorie des distributions“, Hermann, Paris (1966)