Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Analysis gemischter Variationsprobleme

und

die Theorie von Babuška und Brezzi

Seminar Differentialgleichungen im Wintersemester 2007/08
bei Prof. Dr. Petra Wittbold
betreut durch Dr. Etienne Emmrich

vorgelegt von
Moritz Biskamp und Simon Waßerroth
20. Januar 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Formulierung des gemischten Problems **3**

3 Stokes-Problem **4**

4 Sattelpunktprobleme **8**
4.1 Extremalrechnung in unendlichdimensionalen Vektorräumen 8
4.2 Lösbarkeit von Sattelpunktproblemen 10

5 Babuška-Brezzi-Bedingungen **12**
5.1 Closed range theorem 12
5.2 Allgemeine inf-sup-Bedingungen 14
5.3 Babuška-Brezzi-Bedingungen 16
5.4 Stabilitätsaussage 22

6 Anwendung der inf-sup-Bedingungen auf das Stokes-Problem **23**

7 Allgemeinere gemischte lineare Probleme **25**
7.1 Aufspaltung des Operators B 25
7.2 Hinzunahme eines weiteren Operators C 26
7.3 Beispiele 28

8 Anhang: Eigenschaften von Produkträumen **30**

Literatur **31**

1 Einleitung

Anhand eines Beispiels aus der Strömungslehre soll die Lösbarkeit von gemischten Variationsproblemen untersucht werden.

Unter linearen gemischten Problemen verstehen wir lineare Operatorgleichungen mit Nebenbedingungen. Als Beispiel dient hier die sogenannte Stokes-Gleichung, die den stationären Fluss eines inkompressiblen Fluids durch Geschwindigkeit und Druck des Fluids beschreibt. Mathematisch wird der stationäre Fluss durch eine Operatorgleichung beschrieben. Durch die Inkompressibilität erhält man zusätzlich eine Nebenbedingung, nämlich die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeit.

Ziele der Analysis von Variationsproblemen sind es, Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sowie Abschätzungen zur Stabilität dieser Lösung zu treffen. Eine wichtige Aussage im Fall von linearen Operatorgleichungen ist das 1954 von Lax und Milgram formulierte Lemma. Es liefert allerdings für das Stokes-Problem nur eine unbefriedigende Lösung. Das Lemma lässt es nur zu, eine Aussage über eine Lösung für die Geschwindigkeit, allerdings keine über eine Lösung für den Druck zu machen. Formuliert man das Problem jedoch auf einem größeren Lösungsraum, um eine Lösung zu erhalten, so zeigt sich, dass das Lemma nicht mehr anwendbar ist. Da aber bekannt ist, dass das Stokes-Problem eine eindeutige Lösung für Geschwindigkeit und Druck besitzt, ist es das Ziel, hinreichende und notwendige Bedingungen für den allgemeinen Fall zu formulieren.

Zunächst betrachten wir eine spezielle Form linearer gemischter Probleme. Hier zeigt sich, dass die eindeutige Lösung des Problems der Sattelpunkt des Lagrange- oder auch Energie-Funktionals ist, weshalb in diesem Zusammenhang auch von Sattelpunktsproblemen gesprochen wird.

Lässt man die speziellen Annahmen bei Sattelpunktprobleme weg, gelangt man zu den von Babuška 1969 und Brezzi 1974 formulierten *inf-sup-Bedingungen*. Auch Ladyzhenskaja entwickelte diese. Daher werden sie auch als *LBB-Bedingungen* bezeichnet. Um diese zu beweisen, werden wir zunächst hinreichende und notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit allgemeiner linearer Operatorgleichungen zeigen. Daraus werden dann die *inf-sup-Bedingungen* von Babuška und Brezzi hergeleitet, welche sich auf eine spezielle Form linearer gemischter Probleme beziehen. Darunter fällt auch das Stokes-Problem, so dass wir damit die eindeutige Lösbarkeit für Geschwindigkeit und Druck zeigen werden.

Als Abschluss möchten wir noch zwei mögliche Verallgemeinerungen des davor diskutierten linearen gemischten Problems vorstellen. Diese Verallgemeinerungen sind vor allem für die numerische Lösung von besonderen Interesse.

An dieser Stelle möchten wir uns bei Dr. Etienne Emmrich für die große Unterstützung bei der Erarbeitung linearer gemischter Probleme und die interessanten und netten Gespräche abseits davon bedanken.

Moritz Biskamp und Simon Waßerroth

Januar 2008

2 Formulierung des gemischten Problems

Es seien im Folgenden stets $(V, ((\cdot,\cdot))_V, \|\cdot\|_V)$ und $(Q, ((\cdot,\cdot))_Q, \|\cdot\|_Q)$ reelle Hilberträume und

$$a : V \times V \to \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad b : V \times Q \to \mathbb{R}$$

zwei stetige Bilinearformen, das heißt, es existieren $\alpha, \beta > 0$, so dass

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \alpha \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{für alle } u, v \in V, \\ |b(v,q)| &\leq \beta \|v\|_V \|q\|_Q \quad \text{für alle } v \in V, q \in Q. \end{aligned}$$

Es bezeichne im Weiteren $\langle \cdot,\cdot \rangle$ die duale Paarung. Es wird dabei der Übersichtlichkeit halber darauf verzichtet, die Räume der dualen Paarung explizit anzugeben. Sie ergeben sich jedoch stets aus dem Kontext. Das im Folgenden zu untersuchende Problem lässt sich dann wie folgt formulieren:

Problem 2.1: *Zu gegebenem $(f,g) \in V^* \times Q^*$[1], finde $(u,p) \in V \times Q$, so dass*

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V, \\ b(u,q) &= \langle g, q \rangle \quad \text{für alle } q \in Q. \end{aligned}$$

Für die abstrakte Formulierung des Problems als Operatorgleichung benötigen wir zunächst den Raum

$$\mathcal{L}(V,W) := \{A : V \to W : A \text{ ist stetig und linear}\}$$

und die Definition des dualen Operators:

Satz 2.1. *Seien V und W Banachräume und $A \in \mathcal{L}(V,W)$. Dann existiert genau ein linearer Operator $A^* : W^* \to V^*$ mit*

$$\langle A^* w^*, v \rangle = \langle w^*, Av \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w^* \in W^*$$

A^* heißt dualer Operator von A. Weiterhin folgt, A^* ist stetig.

Beweis. Siehe etwa Zeidler [12, Seite 200]. □

Da $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$ stetige Bilinearformen sind, lassen sich mit ihnen die folgenden Operatoren definieren:

$$\begin{aligned} &A \in \mathcal{L}(V,V^*) \qquad \text{mit} \qquad \langle Av, w \rangle = a(v,w) \qquad \text{für alle } v, w \in V, \\ &B \in \mathcal{L}(V,Q^*) \qquad \text{mit} \qquad \langle Bv, q \rangle = b(v,q) \qquad \text{für alle } v \in V,\ q \in Q. \end{aligned}$$

[1] Nach Satz 8.2 gilt $(V \times Q)^* \cong V^* \times Q^*$, daher betrachten wir im Folgenden stets $V^* \times Q^*$

Da Q ein Hilbertraum ist, gilt $Q \cong Q^{**}$, womit $B^* \in \mathcal{L}(Q, V^*)$ wohldefiniert ist. Aus Gründen der Übersichtlichkeit führen wir die Räume

$$\begin{aligned} V_0 &:= \operatorname{Ker}(B)\,, \\ V_\perp &:= \operatorname{Ker}(B)^\perp := \{v \in V : ((v, v_0))_V = 0 \quad \text{für alle } v_0 \in V_0\} \end{aligned}$$

ein, von denen wir die folgende Eigenschaft im Weiteren benötigen:

Lemma 2.2. *Es gilt* $V = V_0 \oplus V_\perp$.

Beweis. Da V_0 als Kern des stetigen Operators B abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums V ist, folgt die Behauptung direkt. Zur Theorie von Hilberträumen siehe etwa Werner [9] oder Zeidler [11]. □

Der Operator

$$\mathcal{A} : V \times Q \to V^* \times Q^*, \qquad \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \mapsto \mathcal{A}\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au + B^*p \\ -Bu \end{bmatrix}$$

ist aufgrund der Linearität und Stetigkeit der Operatoren A und B auch linear und stetig, es gilt also $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V \times Q, V^* \times Q^*)$.

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich nun Problem 2.1 äquivalent als Operatorgleichung formulieren:

Problem 2.2: *Zu gegebenem $(f, g) \in V^* \times Q^*$, finde $(u, p) \in V \times Q$, so dass*

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au + B^*p \\ -Bu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad \text{in } V^* \times Q^*.$$

3 Stokes-Problem

Dieser Abschnitt dient der Motivation für die Betrachtung der im vorherigen Abschnitt eingeführten gemischten Probleme am Beispiel der Stokes-Gleichungen auf einem geeigneten hinreichend glatt berandeten beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$:[2]

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Formuliert man diese Gleichungen mit Hilfe der partiellen Integration variationell um, so lassen sich zwei stetige Bilinearformen definieren:

$$a(u, v) := „\int_\Omega -\Delta u \cdot v \, dx“ = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \qquad \text{für alle } u, v \in V, \tag{1}$$

$$b(v, p) := „\int_\Omega \nabla p \cdot v \, dx“ = \int_\Omega p \cdot \operatorname{div} v \, dx \qquad \text{für alle } v \in V, p \in Q, \tag{2}$$

[2]Physikalisch ist nur $n \in \{2, 3\}$ von Interesse, mathematisch kann man ohne Probleme $n \in \mathbb{N}$ zulasssen.

wobei aufgrund der homogenen Dirichlet-Randwerte

$$V := H_0^1(\Omega)^n := \{v \in L^2(\Omega)^n : \nabla v \in L^2(\Omega)^{n^2} \text{ und } v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\},$$

wobei die Ableitung im schwachen Sinne zu verstehen ist, und

$$Q \subseteq L^2(\Omega).$$

Da der Raum $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^n$ in $H_0^1(\Omega)^n$ dicht liegt (siehe etwa Emmrich [4, Seite 79]), lautet das Stokes-Problem dann mit diesen Bilinearformen:

Problem 3.1: *Zu gegebenem $f \in V^*$, finde $(u,p) \in V \times Q$, so dass*

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= \langle f, v\rangle \quad && \textit{für alle } v \in V, \\ b(u,q) &= 0 && \textit{für alle } q \in Q. \end{aligned}$$

Eine genaue Definition des Raumes Q folgt nach einigen Vorbereitungen weiter unten. Eine Möglichkeit, eine Aussage über die Lösung der Stokes-Gleichungen zu bekommen, besteht darin, die Nebenbedingung der Divergenzfreiheit der Lösung u in den Lösungsraum zu integrieren. Wir definieren dazu

$$\mathcal{V} := \left\{ v \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0 \right\}$$

mit der üblichen Norm

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} .$$

Bemerkung: Da $\mathcal{V} \subseteq V$, folgt für die Dualräume gerade die Beziehung $V^* \subseteq \mathcal{V}^*$.

In diesem Fall vereinfacht sich die variationelle Formulierung wegen

$$b(v,q) = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{V}, q \in Q,$$

gerade in das

Problem 3.2: *Für gegebens $f \in V^*$, finde $u \in \mathcal{V}$, so dass*

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \textit{für alle } v \in \mathcal{V}.$$

Um dieses Problem zu lösen, benötigen wir den Begriff der starken Positivität.

Definition 3.1. *Sei $(W, \|\cdot\|_W)$ ein reeller Banachraum.*

a) Eine Abbildung $a : W \times W \to \mathbb{R}$ heißt stark positiv auf W, falls ein $\mu > 0$ existiert, so dass $a(w,w) \geq \mu \|w\|_W^2$ für alle $w \in W$ gilt.

b) Ein Operator $A : W \to W^*$ heißt stark positiv auf W, falls ein $\mu > 0$ existiert, so dass $\langle Aw, w\rangle \geq \mu \|w\|_W^2$ für alle $w \in W$ gilt.

Bemerkung: Ist V ein Hilbertraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform und der Operator $A : V \to V^*$ durch die Abbildung $a(\cdot,\cdot)$ definiert, so gilt: A ist genau dann stark positiv, wenn $a(\cdot,\cdot)$ stark positiv ist.

Lemma 3.2. *Ist $a(\cdot,\cdot)$ wie in (1) definiert, dann ist $a(\cdot,\cdot)$ stark positiv auf $\mathcal{V}$.*

Beweis. Für $v \in \mathcal{V}$ gilt

$$a(v,v) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v \, dx = |v|^2_{H^1_0(\Omega)} \,.$$

Mit $\mu := 1$ folgt die Behauptung. $\square$

Damit erfüllt $a(\cdot,\cdot)$ die Voraussetzungen des folgenden Lemmas, welches die eindeutige Lösbarkeit von Problems 3.2 in $\mathcal{V}$ garantiert.

Lemma 3.3 (Lemma von Lax-Milgram)**.** *Sei $(W, (\!(\cdot,\cdot)\!)_W, \|\cdot\|_W)$ ein reeller Hilbertraum und sei $a : W \times W \to \mathbb{R}$ eine stetige, stark positive Bilinearform. Dann besitzt das Problem 3.2 für jedes $f \in W^*$ genau eine Lösung $u \in W$.*

Beweis. Siehe etwa Emmrich [4, Seite 91]. $\square$

Ziel war es jedoch nicht Problem 3.2, sondern Problem 3.1 zu lösen. Durch die Hinzunahme der Nebenbedingung in den Lösungsraum geht die Möglichkeit, eine Aussage über eine Lösung p zu treffen, verloren.

Wir lassen daher die Einschränkung an den Lösungsraum für u fallen und betrachten nun wieder

$$V := H^1_0(\Omega)^n$$

mit der wie oben definierten Norm. Wir suchen nun einen Lösungsraum für p. Zunächst ist klar, dass jede Lösung p zumindest in $L^2(\Omega)$ liegen muss. Weiterhin lässt sich bemerken, dass mit p auch $p + const$ eine Lösung des Problems ist. Um eine eindeutige Lösung für p zu bekommen, benötigen wir daher den Quotientenraum

$$Q := L^2(\Omega)/\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \|[v]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} := \inf_{u \in [v]} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Für die weitere Betrachtung ist es allerdings sinnvoll, den Raum

$$L^2_0(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p(x) \, dx = 0 \right\}$$

mit der üblichen L^2-Norm zu betrachen. Das folgende Lemma rechtfertigt dies:

Lemma 3.4. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Dann sind die Räume $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ und $L^2_0(\Omega)$ isometrisch isomorph.*

Beweis. Wir zeigen, dass

$$T : L^2_0(\Omega) \to L^2(\Omega)/\mathbb{R}, \quad v \mapsto Tv := [v]$$

ein isometrischer Isomorphismus ist. Klar ist die Linearität von T. Um die Surjektivität zu zeigen, sei $[v] \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ und $v \in [v]$. Sei $\lambda(.)$ das Lebesguemaß. Mit

$$c := \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega v(x)\, dx < \infty$$

gilt gerade $\int_\Omega (v(x) - c)\, dx = 0$, also $v - c \in L^2_0(\Omega)$. Seien nun $u, v \in L^2_0(\Omega)$ und $[u] = [v]$. Dann existiert ein $r \in \mathbb{R}$, so dass $u = v + r$ und es gilt

$$0 = \int_\Omega u(x)\, dx = \int_\Omega (v(x) + r)\, dx = 0 + \int_\Omega r\, dx = r \cdot \lambda(\Omega),$$

womit wegen $\lambda(\Omega) > 0$, $r = 0$ folgt, also $u = v$ und damit die Injektivität von T. Weiter gilt für $v \in L^2_0(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|Tv\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} &= \inf_{u \in [v]} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \inf_{r \in \mathbb{R}} \|v + r\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{r \in \mathbb{R}} \|r\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \|v\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

womit die Stetigkeit von T gezeigt ist. Da T bijektiv ist, existiert $T^{-1} : L^2(\Omega)/\mathbb{R} \to L^2_0(\Omega)$. Mit $[v] \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ zeigt schließlich

$$\begin{aligned}
\left\|T^{-1}([v])\right\|^2_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} &= \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega v(x)^2\, dx + 0 \\
&= \int_\Omega v(x)^2\, dx + \inf_{r \in \mathbb{R}} \left(2\, r \int_\Omega v(x)\, dx + \int_\Omega r^2\, dx \right) \\
&= \inf_{r \in \mathbb{R}} \int_\Omega (v(x) + r)^2\, dx \\
&= \inf_{r \in \mathbb{R}} \|v + r\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \|[v]\|^2_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

die Stetigkeit von T^{-1} und Isometrie von T. $\square$

$L^2_0(\Omega)$ ist als abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega)$ selbst ein Hilbertraum, insbesondere also reflexiv. Weiter definieren wir $H^{-1}(\Omega)^n := \left(H^1_0(\Omega)^n\right)^*$. Assoziiert man daher wie in Abschnitt 2 zu den stetigen Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$ die Operatoren $A \in \mathcal{L}(H^1_0(\Omega)^n, H^{-1}(\Omega)^n)$ und $B \in \mathcal{L}(H^1_0(\Omega)^n, L^2_0(\Omega))$, so lautet die abstrakte Formulierung des Stokes-Problemes:

Problem 3.3: *Zu gegebenem $f \in H^{-1}(\Omega)^n$, finde $(u,p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$, so dass*

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textit{in } H^{-1}(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega).$$

Nun allerdings zeigt sich, dass das Problem 3.3 nicht mehr die Voraussetzungen des Lemmas 3.3 von Lax-Milgram erfüllt, da der Operator $\mathcal{A}$ wegen

$$\left\langle \mathcal{A}\begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{für alle } q \in L_0^2(\Omega)$$

indefinit, also insbesondere nicht stark positiv auf $H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ ist.

Es wird sich aber zeigen, dass die starke Positivität keine notwendige Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit darstellt.

4 Sattelpunktprobleme

Anhand eines Spezialfalles soll zunächst gezeigt werden, wie sich unter zusätzlichen Voraussetzungen die Lösung von Problem 2.2 charakterisieren lässt.

Sei $a(\cdot,\cdot)$ daher in diesem Abschnitt zusätzlich zu den generellen Voraussetzungen symmetrisch und stark positiv auf V. Betrachtet man dann für $f \in V^*$ und $g \in Q^*$ das Lagrange-Funktional

$$\ell : V \times Q \to \mathbb{R}, \quad (v,q) \mapsto \ell(v,q) := \frac{1}{2}\, a(v,v) - \langle f, v \rangle + b(v,q) - \langle g, q \rangle\,,$$

so lässt sich das folgende Problem formulieren:

Problem 4.1: *Finde einen Sattelpunkt $(u,p) \in V \times Q$ des Lagrange-Funktionals ℓ, d.h. finde $(u,p) \in V \times Q$, so dass*

$$\ell(u,q) \leq \ell(u,p) \leq \ell(v,p) \quad \textit{für alle } v \in V, q \in Q. \tag{3}$$

4.1 Extremalrechnung in unendlichdimensionalen Vektorräumen

Um in unendlichdimensionalen Vektoräumen Extremalrechung betreiben zu können, benötigen wir den Begriff der Gâteaux-Ableitung.

Definition 4.1. *Seien X und Y Banachräume. $A : X \to Y$ heißt Gâteaux-differenzierbar im Punkt $u \in X$ in Richtung $v \in X$, falls für alle $v \in X$*

$$\frac{\partial A}{\partial u}(u,v) := \lim_{t \to 0} \frac{A(u+tv) - A(u)}{t}$$

existiert, und $v \mapsto \frac{\partial A}{\partial u}(u,v)$ linear und beschränkt ist. Man schreibt daher für dieGâteaux-Ableitung $\langle \frac{\partial A}{\partial u}(u), v \rangle$.

Bemerkung: Für die zweite Gâteaux-Ableitung gilt demnach:

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)v, v \right\rangle = \lim_{t \to 0} \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u+tv), v \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u), v \right\rangle}{t}$$

Häufig wird in der Literatur noch die Fréchet-Ableitung eingeführt, bei der zusätzlich gleichmäßige Konvergenz in den jeweiligen Normen gefordert wird.

Die folgenden Sätze zeigen, dass sich die Charakterisierung von Extremalpunkten durch die Ableitung aus der Differentialrechnung des $\mathbb{R}^n$ auf die Gâteaux-Ableitung überträgt.

Satz 4.2. *Sei X ein Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$. Besitzt f in x_0 ein Minimum, das heißt in einer Umgebung U von x_0 ist $f(x_0) \leq f(u)$ für alle $u \in U$, und ist f in x_0 Gâteaux-differenzierbar, dann gilt:*

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0), h \right\rangle = 0 \quad \textit{für alle } h \in X.$$

Beweis. Da f in x_0 minimal ist, ist für alle $x_0 + th$ aus einer Umgebung von x_0

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \geq 0.$$

Wenn nun der Grenzwert für $t > 0$ mit $t \to 0$ gebildet wird, folgt:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0), h \right\rangle \geq 0 \quad \text{für alle } h \in X.$$

Wählt man nun $h = \pm\eta$, so ergibt sich

$$\pm \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0), \eta \right\rangle \geq 0$$

und damit die Behauptung. □

Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Minimums kann man aus dem folgenden Satz ableiten:

Satz 4.3. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $M \subseteq X$ abgeschlossen und konvex. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ zweimal Gâteaux-differenzierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) f ist konvex.

ii) Die erste Gateauxableitung ist monoton, das heißt

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u) - \frac{\partial f}{\partial v}(v), u - v \right\rangle \geq 0 \textit{ für alle } u, v \in M.$$

iii) Die zweite Gateauxableitung ist positiv, das heißt

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)v, v \right\rangle \geq 0 \text{ für alle } u, v \in M.$$

Beweis. Sehr gut zu lesen in Kurdila [7]. $\square$

Bemerkung: Man beachte, dass insbesondere X selbst immer abgeschlossen und konvex ist.

Satz 4.4. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $M \subseteq X$ abgeschlossen und konvex und $f : M \to \mathbb{R}$ zweimal Gâteaux-differenzierbar. Sei weiter*

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)v, v \right\rangle \geq 0 \quad \text{für alle } u, v \in M$$

und

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0), h \right\rangle = 0 \quad \text{für alle } h \in X.$$

Dann hat f in x_0 ein globales Minimum, das heißt $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in M$.

Beweis. Sei zu $y \in M$ die Funktion

$$\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \psi(\lambda) := f(x_0) + \lambda(f(y) - f(x_0)) - f(x_0 + \lambda(y - x_0)).$$

Da f nach Satz 4.3 konvex ist, ist ψ positiv, also gilt $\psi(\lambda) \geq 0$. Durch Einsetzen erhält man $\psi(0) = 0$.

Weiterhin gilt die Kettenregel (siehe etwa Werner [9] oder Wloka [10]) und ψ ist daher stetig differenzierbar. Da $\psi(0) = 0$ gilt und ψ positiv ist, muss $\psi'(0) \geq 0$ gelten. Damit folgt dann

$$0 \leq \psi'(0) = f(y) - f(x_0) - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0), y - x_0 \right\rangle$$

Da $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0) \equiv 0$ vorausgesetzt wurde, folgt die Behauptung. $\square$

4.2 Lösbarkeit von Sattelpunktproblemen

Wir wollen nun zeigen, dass Problem 4.1 und Problem 2.1 (Seite 3) äquivalente Probleme darstellen:

Satz 4.5. *Sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische und stark positive Bilinearform. Dann hat das Problem 4.1 genau dann die eindeutige Lösung $(u, p) \in V \times Q$, wenn das Problem 2.1 die eindeutige Lösung $(u, p) \in V \times Q$ hat.*

Beweis. Die erste Ungleichung in (3) ist äquivalent zu

$$b(u, q - p) \leq \langle g, q - p \rangle \quad \text{für alle } q \in Q$$

und

$$b(u, p - q) \geq \langle g, p - q \rangle \quad \text{für alle } q \in Q.$$

Damit folgt

$$b(u, p - q) = \langle g, p - q \rangle \quad \text{für alle } q \in Q,$$

also mit $\tilde{q} := p - q$

$$b(u, \tilde{q}) = \langle g, \tilde{q} \rangle \quad \text{für alle } \tilde{q} \in Q,$$

womit der erste Teil der Behauptung gezeigt ist. Die zweite Ungleichung ist äquivalent zu

$$\ell(u, p) = \inf_{v \in V} \ell(v, p).$$

Zu zeigen ist also, dass $\ell(\cdot, p) : V \to \mathbb{R}$ in u ein Minimum besitzt. Mit Hilfe der Gâteaux-Ableitung folgt für $v \neq 0$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \ell}{\partial u}(u, p), v \right\rangle &= \lim_{t \to 0} \frac{\ell(u + tv, p) - \ell(u, p)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \Big(\big(\tfrac{1}{2}\, a(u + tv, u + tv) - \langle f, u + tv \rangle + b(u + tv, p) \big) - \\
&\qquad\qquad \big(\tfrac{1}{2}\, a(u, u) - \langle f, u \rangle + b(u, p) \big) \Big) \\
&= \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \Big(\tfrac{1}{2} \big(ta(v, u) + ta(u, v) + t^2 a(v, v) \big) - t \langle f, v \rangle + tb(v, p) \Big) \\
&= a(v, u) - \langle f, v \rangle + b(v, p)
\end{aligned}$$

und mit der starken Positivität von $a(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2 \ell}{\partial u^2}(u, p) v, v \right\rangle &= \lim_{t \to 0} \frac{\left\langle \frac{\partial \ell}{\partial v}(u + tv, p), v \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \ell}{\partial v}(u, p), v \right\rangle}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \Big(a(u + tv, v) - \langle f, v \rangle + b(v, p) - \big(a(u, v) - \langle f, v \rangle + b(v, p) \big) \Big) \\
&= a(v, v) > 0.
\end{aligned}$$

Somit ist ℓ ein strikt konvexes Funktional, dessen Minimum nach Satz 4.4 durch die Bedingung

$$\left\langle \frac{\partial \ell}{\partial v}(u, p), v \right\rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V \tag{4}$$

charakterisiert ist, wobei (4) genau dann gilt, wenn

$$a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung gezeigt. □

Die Lösung von Problem 2.1 lässt sich also in diesem Fall als Sattelpunkt interpretieren.

5 Babuška-Brezzi-Bedingungen

In diesem Abschnitt werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit von linearen Operatorgleichungen bewiesen. Die Babuška-Brezzi-Bedingungen formulieren diese gerade für das spezielle gemischte Problem 2.2 (Seite 4).

5.1 Closed range theorem

Für den Beweis dieser notwendigen und hinreichenden Bedingungen, benötigt man einen Teil des *Closed range theorems*, dann wir dazu in diesem Abschnitt beweisen.

Definition 5.1. *Sei U Unterraum des reflexiven Banachraumes V. Dann ist der Annihilator $U^{\perp*} \subseteq V^*$ definiert durch:*

$$U^{\perp*} := \{v^* \in V^* : \langle v^*, u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Bemerkung: Da V ein reflexiver Banachraum ist, gilt für einen Unterraum W von V^* nach kanonischer Identifizierung von V^{**} mit V

$$\begin{aligned} W^{\perp*} &= \{v \in V^{**} : \langle v, w^*\rangle = 0 \text{ für alle } w^* \in W\} \\ &= \{v \in V : \langle w^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } w^* \in W\}, \end{aligned}$$

also $W^{\perp*} \subseteq V$.

Satz 5.2. *Sei $(V, ((\cdot,\cdot))_V)$ ein Hilbertraum. Für einen Unterraum $U \subseteq V$ gilt:*

$$U^{\perp} \text{ ist isomorph zu } U^{\perp*},$$

wobei $U^{\perp}$ das orthogonale Komplement von U bezeichnet.

Beweis. Wir bezeichnen mit j den Rieszschen Isomorphismus[3], das heißt

$$j : V \to V^* \quad \text{mit} \quad \langle j(v), w\rangle = ((v, w))_V \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Wir zeigen nun:

$$U^{\perp*} = j(U^{\perp}).$$

Dann existiert zu $u^* \in j(U^{\perp})$ ein $u \in U^{\perp}$ mit $j(u) = u^*$. Nach der Definition von $U^{\perp}$ ist dies genau dann der Fall, wenn $\langle j(u), v\rangle = 0$ für alle $v \in U$, d.h. $\langle u^*, v\rangle = 0$ für alle $v \in U$, so dass $u^* \in U^{\perp*}$. Umkehrung wird genauso bewiesen. □

Dies zeigt, warum man den Annihilator als eine Verallgemeinerung des orthogonalen Komplements auf Banachräume ansehen kann.

Eine wichtige Aussage aus der Funktionalanalysis ist das *Closed range theorem* (Satz vom abgeschlossenen Bild). Zunächst sei bemerkt, dass der Kern jedes stetigen linearen Operators wegen $\mathrm{Ker}(A) = T^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen ist. Hingegen muss dies für das

[3] Unter einem Isomorphismus verstehen wir wie üblich, eine bijektive lineare stetige Abbildung, deren Inverse ebenfalls stetig ist.

Bild eines linearen stetigen Operators längst nicht gelten. Man betrachte dafür etwa die Identität von $\mathcal{C}[0,1]$ in $L^1[0,1]$. Die Menge der stetigen Funtionen bildet bezüglich der L^1-Norm keinen vollständigen Raum, daher kann das Bild der Identität nicht abgeschlossen sein.

Satz 5.3. *Seien V und W reflexiven Banachräume und $A \in \mathcal{L}(V,W)$. Dann gilt:*

$$\overline{\operatorname{Im}(A)} = (\operatorname{Ker}(A^*))^{\perp *}$$

Für den Beweis benötigen wir die folgende Aussage:

Lemma 5.4. *Sei U ein Unterraum des reflexive Banachraumes V. Dann gilt:*

$$\overline{U} = (U^{\perp *})^{\perp *}$$

Beweis. Es gilt $(\overline{U})^{\perp *} = U^{\perp *}$. Daher genügt es, die Aussage für den Fall zu zeigen, dass U abgeschlossen ist. Nun gilt nach der Definition des Annihilators:

$$u \in (U^{\perp *})^{\perp *} \Leftrightarrow \langle u^*, u\rangle = 0 \text{ für alle } u^* \in U^{\perp *}$$

Also folgt aus der Definition von $U^{\perp *}$ wegen $\langle u^*, u\rangle = 0$, gerade $u \in U$ und damit $U \subseteq (U^{\perp *})^{\perp *}$.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass $w \in (U^{\perp *})^{\perp *}$, aber $w \notin U$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert nun ein Funktional $u^* \in V^*$ mit

$$\langle u^*, u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U \text{ und } \langle u^*, w\rangle \neq 0$$

Also ist u^* auf U gleich Null und damit insbesondere $u^* \in U^{\perp *}$. Damit gilt dann aber $w \notin (U^{\perp *})^{\perp *}$, da jedes Element von $U^{\perp *}$ w annihilieren müsste, im Widerspruch zur Annahme. □

Beweis von Satz 5.3. Es gilt

$$\begin{aligned}(\operatorname{Im}(A))^{\perp *} &= \{w^* \in W^* : \langle w^*, w\rangle = 0 \text{ für alle } Av = w \in \operatorname{Im}(A)\,, v \in V\}\\ &= \{w^* \in W^* : \langle A^* w^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\}\\ &= \operatorname{Ker}(A^*)\,.\end{aligned}$$

Wendet man nun Lemma 5.4 auf $\operatorname{Im}(A)$ an, so folgt die Behauptung. □

Satz 5.3 stellt einen Teil des allgemeineren *Closed range theorem* dar, das hier der Vollständigkeit halber angeführt werden soll:

Satz 5.5 (Closed range theorem)**.** *Seien V und W reflexive Banachräume und $A \in \mathcal{L}(V,W)$. Dann sind äquivalent:*

i) $\operatorname{Im}(A)$ *ist abgeschlossen,*

ii) $\operatorname{Im}(A) = (\operatorname{Ker}(A^*))^{\perp *}$, *iii)* $\mathrm{Im}(A^*)$ *ist abgeschlossen,*

iv) $\mathrm{Im}(A^*) = (\mathrm{Ker}(A))^{\perp *}$.

v) Es gibt eine Konstante $c > 0$ *mit*

$$c \cdot \mathrm{dist}(v, \mathrm{Ker}(A)) \leq \|Av\| \quad \textit{für alle } v \in V.$$

Beweis. Gut nachzulesen in Zeidler [12, Seite 211], Werner [9, Seite 159] oder auch Wloka [10, Seite 144]. □

Mit Satz 5.3 können wir nun die folgende Aussage zeigen:

Lemma 5.6. *Seien* V_0 *und* $V_\perp$ *wie in Abschnitt 2 definiert und bezeichne*

$$V_0^* := \{v^* \in V^* : \langle v^*, v\rangle = 0 \textit{ für alle } v \in V_\perp\}.$$

Dann gilt: V_0^* *ist isomorph zu* $(V_0)^*$.

Beweis. Da V_0 als Kern des stetigen Operators B ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums V ist, gilt zum einen $V_0 = (V_\perp)^\perp$ und zum anderen V_0 selbst ist ein Hilbertraum. Daher ist nach dem Rieszschen Darstellungssatz V_0 isomorph zu $(V_0)^*$. Mit den Bezeichnungen aus Definition 5.1 und Satz 5.3 folgt schließlich

$$V_0^* = (V_\perp)^{\perp *} \cong (V_\perp)^\perp = V_0 \cong (V_0)^*,$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

5.2 Allgemeine inf-sup-Bedingungen

Für allgemeine lineare Operatorgleichungen gibt der nächste Satz die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen Lösung an.

Satz 5.7. *Sei* $(W, ((\cdot,\cdot))_W, \|\cdot\|)_W$ *ein Hilbertraum. Für* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(W, W^*)$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) Es existieren ε, $\varepsilon^* > 0$, *so dass* [4]

$$\inf_{v\in W} \sup_{w\in W} \frac{|\langle \mathcal{A}v, w\rangle|}{\|v\|_W \|w\|_W} \geq \varepsilon, \tag{5}$$

$$\inf_{w\in W} \sup_{v\in W} \frac{|\langle \mathcal{A}v, w\rangle|}{\|v\|_W \|w\|_W} \geq \varepsilon^*. \tag{6}$$

ii) $\mathcal{A}$ *ist ein Isomorphismus von* W *auf* W^*.

[4] Wir verzichten der Übersichtlichkeit halber bei diesen und allen folgenden inf-sup-Ausdrücken darauf, bei der Bildung der Infima und Suprema $v \neq 0$ und $w \neq 0$ zu fordern, verstehen dies aber jeweils als erfüllt.

Beweis. 1. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: Aus (5) folgt

$$\|\mathcal{A}v\|_{W^*} = \sup_{w\in W} \frac{|\langle \mathcal{A}v, w\rangle|}{\|w\|_W} \geq \varepsilon\ \|v\|_W \qquad \text{für alle } v \in W, \tag{7}$$

womit die Injektivität von $\mathcal{A}$ folgt. Zu zeigen bleibt die Surjektivität von $\mathcal{A}$. Da W mit W^{**} identifiziert werden kann, folgt aus der Definition des dualen Operators und (6)

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}^*w\|_{W^*} &= \sup_{v\in W} \frac{|\langle \mathcal{A}^*w, v\rangle|}{\|v\|_W} \\ &= \sup_{v\in W} \frac{|\langle \mathcal{A}v, w\rangle|}{\|v\|_W} \geq \varepsilon^*\ \|w\|_W \qquad \text{für alle } w \in W,\end{aligned}$$

und damit die Injektivität von $\mathcal{A}^*$, also insbesondere

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*) = \{0\}. \tag{8}$$

Mit Satz 5.3 folgt damit

$$\overline{\mathrm{Im}(\mathcal{A})} = (\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*))^{\perp *} = W^*.$$

Bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ abgeschlossen in W^* ist. Sei dazu $(w_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Im}(\mathcal{A})$ eine Cauchyfolge und $\hat{w}^* \in W^*$ mit $\|w_n^* - \hat{w}^*\|_{W^*} \to 0$. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in W$ mit $\mathcal{A}w_n = w_n^*$. Mit (7) folgt

$$\|w_n - w_m\|_W \leq \frac{1}{\varepsilon}\ \|w_n^* - w_m^*\|_{W^*} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Damit ist auch $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W$ eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $\hat{w} \in W$. Mit der Stetigkeit von $\mathcal{A}$ folgt $w_n^* = \mathcal{A}w_n \to \mathcal{A}\hat{w}$, also $\hat{w}^* = \mathcal{A}\hat{w}$, womit $\hat{w}^* \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$. Damit ist $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ abgeschlossen in W^*. Die Stetigkeit von $\mathcal{A}^{-1}$ schließlich folgt direkt aus (7). Damit ist die Behauptung vollständig gezeigt.

2. *i)* $\Leftarrow$ *ii)*: Da $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus ist, ist auch $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(W^*, W)$ ein Isomorphismus und mit $\varepsilon := \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} > 0$ folgt

$$\begin{aligned}\inf_{v\in W} \sup_{w\in W} \frac{|\langle \mathcal{A}v, w\rangle|}{\|v\|_W\,\|w\|_W} &= \inf_{v^*\in W^*} \sup_{w\in W} \frac{\left|\left\langle \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}v^*, w\right\rangle\right|}{\|\mathcal{A}^{-1}v^*\|_W\,\|w\|_W} \\ &= \inf_{v^*\in W^*} \left\|\mathcal{A}^{-1}v^*\right\|_W^{-1} \sup_{w\in W} \frac{|\langle v^*, w\rangle|}{\|w\|_W} \\ &= \inf_{v^*\in W^*} \left\|\mathcal{A}^{-1}v^*\right\|_W^{-1} \|v^*\|_{W^*} \\ &= \left(\sup_{v^*\in W^*} \frac{\left\|\mathcal{A}^{-1}v^*\right\|_W}{\|v^*\|_{W^*}}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} = \varepsilon,\end{aligned}$$

also (5). Analog zeigt man (6) mit Hilfe des dualen Operators $\mathcal{A}^*$ und der Beziehung $(\mathcal{A}^*)^{-1} = \left(\mathcal{A}^{-1}\right)^*$.

□

Bemerkung: Die Tatsache, dass $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus ist, bedeutet, dass die Operatorgleichung $\mathcal{A}w = f \in W^*$ für jedes $f \in W^*$ eine eindeutige Lösung $w \in W$ besitzt.

Bemerkung: Der obige Satz 5.7 gilt ebenso für Operatoren $\mathcal{A} : X \to Y$ für reflexive Banachräume X und Y. Wir benötigen ihn hier jedoch nur in dem oben angegebenen Fall.

Bemerkung: Wie der Beweis des Satzes zeigt, garantiert (5) die Injektivität von $\mathcal{A}$, (6) hingegen die Injektivität von $\mathcal{A}^*$ und damit die Surjektivität von $\mathcal{A}$.

5.3 Babuška-Brezzi-Bedingungen

Von dem vorherigen Satz ausgehend geben die Babuška-Brezzi-Bedingungen die für die eindeutige Lösbarkeit des speziellen linearen gemischten Problems 2.2 (Seite 4) notwendigen und hinreichenden Bedingungen an. Seien dazu wie in Abschnitt 2 für den Operator $B \in \mathcal{L}(V, Q^*)$ die Räume

$$\begin{aligned} V_0 &:= \mathrm{Ker}(B)\,, \\ V_\perp &:= \mathrm{Ker}(B)^\perp\,, \\ V_0^* &:= \{v^* \in V^* : \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v \in V_\perp\} \end{aligned}$$

definiert.

Satz 5.8 (Babuška-Brezzi-Bedingungen)**.** *Seien $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ und $B \in \mathcal{L}(V, Q^*)$ und sei $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V \times Q, V^* \times Q^*)$ definiert durch*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann sind äquivalent:

i) Es existieren $\mu, \mu^*, \gamma^* > 0$, so dass

$$\inf_{v\in V_0} \sup_{w\in V_0} \frac{|\langle Av, w\rangle|}{\|v\|_V \, \|w\|_V} \geq \mu, \tag{9}$$

$$\inf_{w\in V_0} \sup_{v\in V_0} \frac{|\langle Av, w\rangle|}{\|v\|_V \, \|w\|_V} \geq \mu^*, \tag{10}$$

$$\inf_{q\in Q} \sup_{v\in V_\perp} \frac{|\langle Bv, q\rangle|}{\|v\|_V \, \|q\|_Q} \geq \gamma^*. \tag{11}$$

ii) $\mathcal{A}$ ist ein Isomorphismus von $V \times Q$ auf $V^* \times Q^*$.

Bemerkung: Es sei besonders darauf hingewiesen, dass die Existenz von μ und μ^* in (9) und (10) für $V_0 \subset V$ und von γ^* in (11) für $V_\perp \subset V$ für die Bijektivität von $\mathcal{A}$ ausreicht.

Beweis. 1. $i) \Rightarrow ii)$: Es genügt, die beiden *inf-sup-Bedingungen* als Voraussetzung für Satz 5.2 mit $W := V \times Q$ zu zeigen:

a) Für $(u, p) \in V \times Q$ gilt mit der üblichen Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ und Satz 8.2

$$\left\| \mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right] \in V \times Q} \frac{\left| \left\langle \mathcal{A} \left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right] \right\rangle \right|}{\left\| \left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right] \right\|_{V \times Q}} = \sup_{\substack{v \in V \\ q \in Q}} \frac{|\langle Au, v\rangle + \langle B^* p, v\rangle - \langle Bu, q\rangle|}{\|v\|_V + \|q\|_Q}.$$

Wegen (11) und $V = V_0 \oplus V_\perp$ nach Satz 5.6 gilt für beliebiges $u \in V$ und $p \in Q$

$$\begin{aligned}
\gamma^* \ \|p\|_Q &\leq \sup_{v \in V_\perp} \frac{|\langle Bv, p\rangle|}{\|v\|_V} \\
&\leq \sup_{v \in V} \frac{|\langle B^* p, v\rangle|}{\|v\|_V} \\
&= \sup_{v \in V} \frac{|\langle Au, v\rangle + \langle B^* p, v\rangle - \langle 0, u\rangle - \langle Au, v\rangle|}{\|v\|_V} \\
&\leq \sup_{v \in V} \frac{|\langle Au, v\rangle + \langle B^* p, v\rangle - \langle B^* 0, u\rangle|}{\|v\|_V} + \sup_{v \in V} \frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|v\|_V} \\
&\leq \sup_{\substack{v \in V \\ q \in Q}} \frac{|\langle Au, v\rangle + \langle B^* p, v\rangle - \langle Bu, q\rangle|}{\|v\|_V + \|q\|_Q} + \sup_{v \in V} \frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|v\|_V} \\
&= \left\| \mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}} + \sup_{v \in V} \frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|v\|_V}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Da A ein stetiger linearer Operator ist, existiert $\alpha > 0$, so dass

$$\langle Au, v\rangle \leq \alpha \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{für alle } u, v \in V. \tag{13}$$

Mit (12) folgt dann

$$\gamma^* \ \|p\|_Q \leq \left\| \mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}} + \alpha \|u\|_V. \tag{14}$$

Da nach Lemma 2.2 $V = V_0 \oplus V_\perp$ ist, exisitert für alle $u \in V$ ein $\hat{u} \in V_\perp$, so dass

$$u - \hat{u} \in V_0. \tag{15}$$

Damit gilt insbesondere

$$\|u\|_V \leq \|u - \hat{u}\|_V + \|\hat{u}\|_V. \tag{16}$$

Aus (9) folgt

$$\begin{aligned}
\mu \ \|u-\hat{u}\|_V &\le \sup_{v\in V_0} \frac{|\langle A(u-\hat{u}),v\rangle|}{\|v\|_V} \\
&= \sup_{v\in V_0} \frac{|\langle A(u-\hat{u}),v\rangle + \langle Bv,p\rangle - \langle 0,u\rangle|}{\|v\|_V} \\
&\le \sup_{\substack{v\in V\\ q\in Q}} \frac{|\langle Au,v\rangle + \langle B^*p,v\rangle - \langle Bu,q\rangle|}{\|v\|_V + \|q\|_Q} + \sup_{v\in V} \frac{|\langle A\hat{u},v\rangle|}{\|v\|_V}.
\end{aligned}$$

Dabei ist in der letzten Ungleichung entscheidend, dass das Supremum über alle q gebildet wird. Mit (13) folgt also

$$\mu \ \|u-\hat{u}\|_V \le \left\| \mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}} + \alpha \ \|\hat{u}\|_V \,. \tag{17}$$

Da $B : V_\perp \to Q^*$ injektiv auf $V_\perp$ ist, existiert $\gamma > 0$, so dass

$$\gamma \ \|\hat{u}\|_V \le \|B\hat{u}\|_{Q^*} \quad \text{für alle } \hat{u} \in V_\perp. \tag{18}$$

Mit (15) und (18) gilt nun

$$\begin{aligned}
\gamma \ \|\hat{u}\|_V &\le \|B\hat{u}\|_{Q^*} \\
&= \|B(\hat{u} + (u-\hat{u}))\|_{Q^*} \\
&= \|Bu\|_{Q^*} \\
&= \sup_{q\in Q} \frac{|\langle Bu,q\rangle|}{\|q\|_Q} \\
&= \sup_{q\in Q} \frac{|\langle Au,0\rangle + \langle B^*p,0\rangle - \langle Bu,q\rangle|}{\|q\|_Q} \\
&\le \sup_{\substack{v\in V\\ q\in Q}} \frac{|\langle Au,v\rangle + \langle B^*p,v\rangle - \langle Bu,q\rangle|}{\|v\|_V + \|q\|_Q} \\
&= \left\| \mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}} .
\end{aligned} \tag{19}$$

Fasst man nun (14), (16), (17) und (19) zusammen, so ergibt sich mit

$$\frac{1}{\varepsilon} := \frac{1}{\mu} + \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^*} + \frac{\alpha}{\gamma\gamma^*}\right)$$

gerade

$$\varepsilon\left(\|u\|_V + \|p\|_Q\right) \le \left\| \mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}}$$

und damit schließlich

$$\inf_{\left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right]\in V\times Q} \ \sup_{\left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right]\in V\times Q} \frac{\left|\left\langle \mathcal{A}\left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right] \right\rangle\right|}{\left\|\left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right]\right\|_{V\times Q} \left\|\left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right]\right\|_{V\times Q}} = \inf_{\substack{u\in V\\ p\in Q}} \frac{\left\|\mathcal{A}\left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right]\right\|_{\mathcal{L}}}{\|u\|_V + \|p\|_Q} \ge \varepsilon. \tag{20}$$

b) Für $(v,q) \in V \times Q$ gilt wegen der Identifikation von $V^{**} \times Q^{**}$ mit $V \times Q$

$$\left\| \mathcal{A}^* \begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right] \in V \times Q} \frac{\left| \left\langle \mathcal{A}\left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right] \right\rangle \right|}{\left\| \left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right] \right\|_{V \times Q}} = \sup_{\substack{u \in V \\ p \in Q}} \frac{|\langle Au, v\rangle + \langle B^* p, v\rangle - \langle Bu, q\rangle|}{\|u\|_V + \|p\|_Q}.$$

Wie oben folgt aus (11) und (13)

$$\begin{aligned}
\gamma^* \ \|q\|_Q &\leq \sup_{u \in V_\perp} \frac{|\langle Bu, q\rangle|}{\|u\|_V} \\
&\leq \sup_{u \in V} \frac{|\langle Au, v\rangle + \langle 0, v\rangle - \langle Bu, q\rangle - \langle Au, v\rangle|}{\|u\|_V} \\
&\leq \sup_{u \in V} \frac{|\langle Au, v\rangle + \langle B^* 0, v\rangle - \langle Bu, q\rangle|}{\|u\|_V} + \sup_{u \in V} \frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|u\|_V} \\
&\leq \sup_{\substack{u \in V \\ p \in Q}} \frac{|\langle Au, v\rangle + \langle B^* p, v\rangle - \langle Bu, q\rangle|}{\|u\|_V + \|p\|_Q} + \sup_{u \in V} \frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|u\|_V} \\
&= \left\| \mathcal{A}^* \begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}} + \alpha \|v\|_V . \qquad (21)
\end{aligned}$$

Analog zu (15) und (16) existiert zu $v \in V$ ein $\hat{v} \in V_\perp$, so dass

$$v - \hat{v} \in V_0 \qquad (22)$$

und es gilt

$$\|v\|_V \leq \|v - \hat{v}\|_V + \|\hat{v}\|_V . \qquad (23)$$

Aus (10) und (13) folgt weiter

$$\begin{aligned}
\mu^* \ \|v - \hat{v}\|_V &\leq \sup_{u \in V_0} \frac{|\langle Au, v - \hat{v}\rangle|}{\|u\|_V} \\
&= \sup_{u \in V_0} \frac{|\langle Au, v - \hat{v}\rangle + \langle B^* 0, v\rangle - \langle Bu, q\rangle|}{\|u\|_V} \\
&\leq \sup_{\substack{u \in V \\ p \in Q}} \frac{|\langle Au, v\rangle + \langle B^* p, v\rangle - \langle Bu, q\rangle|}{\|u\|_V + \|p\|_Q} + \sup_{u \in V} \frac{|\langle Au, \hat{v}\rangle|}{\|u\|_V} \\
&\leq \left\| \mathcal{A}^* \begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}} + \alpha \ \|\hat{v}\|_V . \qquad (24)
\end{aligned}$$

Wegen (22) und (18) gilt

$$\begin{aligned}
\gamma \ \|\hat{v}\|_V &\leq \|B\hat{v}\|_{Q^*} \\
&= \|B(\hat{v} + (v - \hat{v}))\|_{Q^*} \\
&= \|Bv\|_{Q^*} \\
&= \sup_{p \in Q} \frac{|\langle Bv, p\rangle|}{\|p\|_Q} \\
&= \sup_{p \in Q} \frac{|\langle A0, v\rangle + \langle B^* p, v\rangle - \langle B0, q\rangle|}{\|p\|_Q} \\
&\leq \sup_{\substack{u \in V \\ p \in Q}} \frac{|\langle Au, v\rangle + \langle B^* p, v\rangle - \langle Bu, q\rangle|}{\|u\|_V + \|p\|_Q} \\
&= \left\| \mathcal{A}^* \begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Fasst man nun analog wie oben (21), (23), (24) und (25) zusammen, so ergibt sich mit

$$\frac{1}{\varepsilon^*} := \frac{1}{\mu^*} + \left(1 + \frac{\alpha}{\mu^*}\right)\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^*} + \frac{\alpha}{\gamma\gamma^*}\right)$$

gerade

$$\varepsilon^* \left(\|v\|_V + \|q\|_Q\right) \leq \left\| \mathcal{A}^* \begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}}$$

und damit schließlich

$$\inf_{\left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right] \in V \times Q} \sup_{\left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right] \in V \times Q} \frac{\left| \left\langle \mathcal{A}\left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right] \right\rangle \right|}{\left\| \left[\begin{smallmatrix} u \\ p \end{smallmatrix}\right] \right\|_{V \times Q} \left\| \left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right] \right\|_{V \times Q}} = \inf_{\substack{v \in V \\ q \in Q}} \frac{\left\| \mathcal{A}^* \left[\begin{smallmatrix} v \\ q \end{smallmatrix}\right] \right\|_{\mathcal{L}}}{\|v\|_V + \|q\|_Q} \geq \varepsilon^*. \tag{26}$$

Mit (20) aus Schritt a) und (26) aus Schritt b) sind die Voraussetzungen von Satz 5.7 erfüllt, so dass die Behauptung folgt.

2. *i)* $\Leftarrow$ *ii)*: Sei also $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus von $V \times Q$ auf $V^* \times Q^*$. Nach Satz 5.2 existiert dann $\varepsilon^* > 0$, so dass

$$\inf_{\left[\begin{smallmatrix} u \\ q \end{smallmatrix}\right] \in V \times Q} \sup_{\left[\begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix}\right] \in V \times Q} \frac{\left| \left\langle \mathcal{A}\left[\begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} u \\ q \end{smallmatrix}\right] \right\rangle \right|}{\left\| \left[\begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix}\right] \right\|_{V \times Q} \left\| \left[\begin{smallmatrix} u \\ q \end{smallmatrix}\right] \right\|_{V \times Q}} \geq \varepsilon^*.$$

Damit gilt dann wegen $V = V_0 \oplus V_\perp$ und $\langle Bv, q\rangle = 0$ für alle $v \in V_0, q \in Q$

$$\begin{aligned}
\inf_{q\in Q}\sup_{v\in V_\perp} \frac{|\langle Bv,q\rangle|}{\|v\|_V\,\|q\|_Q} &\geq \inf_{q\in Q}\sup_{v\in V} \frac{|\langle Bv,q\rangle|}{\|v\|_V\,\|q\|_Q} \\
&= \inf_{q\in Q}\sup_{v\in V} \frac{|\langle Av,0\rangle + \langle B^*0,0\rangle - \langle Bv,q\rangle|}{\|v\|_V\,\|q\|_Q} \\
&\geq \inf_{q\in Q}\sup_{\left[\begin{smallmatrix} v\\ p\end{smallmatrix}\right]\in V\times Q} \frac{|\langle Av,0\rangle + \langle B^*p,0\rangle - \langle Bv,q\rangle|}{\left\|\left[\begin{smallmatrix} v\\ p\end{smallmatrix}\right]\right\|_{V\times Q}\|q\|_Q} \\
&\geq \inf_{\left[\begin{smallmatrix} u\\ q\end{smallmatrix}\right]\in V\times Q}\sup_{\left[\begin{smallmatrix} v\\ p\end{smallmatrix}\right]\in V\times Q} \frac{|\langle Av,u\rangle + \langle B^*p,u\rangle - \langle Bv,q\rangle|}{\left\|\left[\begin{smallmatrix} v\\ p\end{smallmatrix}\right]\right\|_{V\times Q}\left\|\left[\begin{smallmatrix} u\\ q\end{smallmatrix}\right]\right\|_{V\times Q}} \\
&= \inf_{\left[\begin{smallmatrix} u\\ q\end{smallmatrix}\right]\in V\times Q}\sup_{\left[\begin{smallmatrix} v\\ p\end{smallmatrix}\right]\in V\times Q} \frac{\left|\left\langle \mathcal{A}\left[\begin{smallmatrix} v\\ p\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} u\\ q\end{smallmatrix}\right]\right\rangle\right|}{\left\|\left[\begin{smallmatrix} v\\ p\end{smallmatrix}\right]\right\|_{V\times Q}\left\|\left[\begin{smallmatrix} u\\ q\end{smallmatrix}\right]\right\|_{V\times Q}} \\
&\geq \varepsilon^*.
\end{aligned}$$

Mit $\gamma^* := \varepsilon^*$ folgt damit (11). Für die Bedingungen (9) und (10) reicht es nach Lemma 5.6 und Satz 5.7 zu zeigen, dass $A|_{V_0}$ ein Isomorphismus von V_0 auf V_0^* ist. Als Einschränkung des Operators A auf V_0 ist $A|_{V_0}$ linear und stetig. Die Stetigkeit von $(A|_{V_0})^{-1}$ folgt direkt aus der Stetigkeit von $\mathcal{A}^{-1}$. Zu zeigen bleibt die Bijektivität von $A|_{V_0} : V_0 \to V_0^*$. Sei dazu $f \in V_0^*\backslash\{0\}$. Da $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus ist, existiert ein eindeutiges Paar $(u,p) \in V \times Q$, so dass

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} u\\ p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au + B^*p\\ -Bu\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{in } V^* \times Q^*. \tag{27}$$

Wegen $V = V_0 \oplus V_\perp$ lässt sich u eindeutig in

$$u = u_0 + u_\perp \quad \text{mit } u_0 \in V_0, u_\perp \in V_\perp$$

zerlegen. Damit gilt dann wegen (27)

$$0 = Bu = B(u_\perp + u_0) = Bu_\perp + Bu_0 = Bu_\perp,$$

also $u_\perp \in V_0 \cap V_\perp = \{0\}$. Weiter folgt, da $f \in V_0^*\backslash\{0\}$, dass $B^*p \in V_0^*$, dies bedeutet aber aufgrund der Definition von V_0^*

$$\langle Bv, p\rangle = \langle B^*p, v\rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V_\perp.$$

Dies kann aber nur für $p = 0$ erfüllt sein. Für $f = 0$ folgt $u = u_0 = 0$. Damit existiert also für jedes $f \in V_0^*$ ein eindeutiges $u_0 \in V_0$, so dass

$$Au_0 = Au_0 + B^*p = Au + B^*p = f \quad \text{in } V^*.$$

Damit ist $A|_{V_0}$ ein Isomorphismus von V_0 auf V_0^*.

□

Bemerkung: Der Satz zeigt, dass es ausreicht, dass $A|_{V_0} : V_0 \to V_0^*$ ein Isomorphismus ist und B die *inf-sup-Bedingung* erfüllt, damit der Operator $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus ist.

Der Fall der starken Positivität des Operators $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$, wie es nach Abschnitt 3 im Stokes-Problem der Fall ist, soll im nächsten Satz formuliert werden.

Satz 5.9. *Seien $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ und $B \in \mathcal{L}(V, Q^*)$ und sei $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V \times Q, V^* \times Q^*)$ definiert durch*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist A stark positiv auf V_0, d.h. existiert $\tilde{\mu} > 0$, so dass

$$\langle Av, v \rangle \geq \tilde{\mu} \, \|v\|_V^2 \quad \text{für alle } v \in V_0,$$

und existiert $\gamma^* > 0$, so dass

$$\inf_{q \in Q} \sup_{v \in V_\perp} \frac{|\langle Bv, q \rangle|}{\|v\|_V \, \|q\|_Q} \geq \gamma^*,$$

dann ist $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus von $V \times Q$ auf $V^* \times Q^*$

Beweis. Aus der starken Positivität von A folgt für alle $v \in V_0$

$$\sup_{w \in V_0} \frac{|\langle Av, w \rangle|}{\|v\|_V} \geq \frac{|\langle Av, v \rangle|}{\|v\|_V} \geq \tilde{\mu} \, \|v\|_V$$

und damit (9) aus Satz 5.8. Analog zeigt man (10), womit die Behauptung aus Satz 5.8 folgt. □

5.4 Stabilitätsaussage

Satz 5.8 garantiert unter den entsprechenden Voraussetzungen die eindeutige Lösbarkeit des Problems 2.2 (Seite 4). Der folgende Satz macht eine Aussage über sie Stabilität dieser Lösung gegenüber Störungen der rechten Seite.

Satz 5.10. *Ist $(u, p) \in V \times Q$ Lösung des Problems 2.2 unter den Voraussetzungen von Satz 5.8, so gilt mit μ,γ,γ^* und α aus dem Beweis von Satz 5.8*

a) $\|u\|_V \leq \left(\frac{1}{\mu} + \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right) \frac{1}{\gamma} \right) \left(\|f\|_{V^*} + \|g\|_{Q^*} \right)$

b) $\|p\|_Q \leq \left(\frac{1}{\gamma^*} \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right) (1 + \alpha) \frac{1}{\gamma} \right) \left(\|f\|_{V^*} + \|g\|_{Q^*} \right).$

Beweis. Da (u, p) Lösung des Problems 2.2 ist, folgen die Babuska-Brezzi-Bedingungen aus Satz 5.8. Die Abschätzungen folgen damit aus dem Beweis dieses Satzes mit (16),(17) und (19) für *a)* und (14) und *a)* für *b).* □

Bemerkung: Der Satz zeigt, dass eine kleine Störung der Anfangsdaten nur kleine Störungen der Lösung hervorrufen, denn seien (u, p) Lösung für die rechte Seite (f, g) und $(\tilde{u}, \tilde{p})$ Lösung für die rechte Seite $(\tilde{f}, \tilde{g})$, dann ist wegen der Linearität des Problems $(u - \tilde{u}, p - \tilde{p})$ Lösung für die rechte Seite $(f - \tilde{f}, g - \tilde{g})$ und es gelten die obigen Abschätzungen.

6 Anwendung der inf-sup-Bedingungen auf das Stokes-Problem

In diesem Abschnitt möchten wir nun das Stokes-Problem vollständig lösen. Dazu werden wir nachweisen, dass die *inf-sup-Bedingungen* in diesem Fall erfüllt sind.

Es werden die Bezeichnungen aus Abschnitt 3 benutzt, insbesondere sei wieder $\mathcal{V}$ der Raum der divergenzfreien Funktionen

$$\mathcal{V} := \left\{ v \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0 \right\}$$

und

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p(x)\, dx = 0 \right\}.$$

In Abschnitt 3 wurde bereits gezeigt, dass die Form $a(\cdot,\cdot)$ stark positiv auf $\mathcal{V}$ ist. Um die Existenz einer eindeutigen Lösung $(u,p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ für das Stokes-Problem 3.1 (Seite 5) nachzuweisen, bleibt also nur noch die *inf-sup-Bedingung* für $b(v,q) = (\!(q, \operatorname{div} v)\!)_{L^2(\Omega)}$ zu zeigen, womit dann Satz 5.9 die eindeutige Existenz einer Lösung garantiert.

Zu zeigen ist also

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{|b(v,q)|}{|v|_{H_0^1(\Omega)} \, \|q\|_{L^2(\Omega)}} \geq \gamma^*,$$

oder in der schon häufig verwendeten äquivalenten Formulierung

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{(\!(q, \operatorname{div} v)\!)_{L^2(\Omega)}}{|v|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \gamma^* \, \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } q \in L_0^2(\Omega)$$

Um dies zu zeigen, benötigen wir zunächst den folgenden abstrakten Satz. Dafür wollen wir annehmen, dass sich der Rand $\partial\Omega$ durch eine undendlich oft differenzierbare Funktion parametrisieren lässt. Die Aussage lässt sich sogar für beschränkte Lipschitz-Gebiete zeigen, wobei der Beweis, der hier schon nicht vollständig geführt wird, dann noch erheblich aufwendiger wird.

Satz 6.1. *Der Operator* $\operatorname{div} : \mathcal{V}^\perp \to L_0^2(\Omega)$ *ist ein Isomorphismus. Dabei ist das orthogonale Komplement im Sinne des* H_0^1*-Skalarproduktes zu verstehen.*

Beweis. Folgende Punkte sind für $\operatorname{div} : \mathcal{V}^\perp \to L_0^2(\Omega)$ zu zeigen:

a) Stetigkeit und Linearität:

Nach der Definition von div ist klar, dass $\operatorname{div} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^\perp, L^2(\Omega))$. Desweiteren gilt für ein $w \in H_0^1(\Omega)^n$, das damit gerade auf dem Rand verschwindet, nach dem Satz von Green mit n als äußere Normale:

$$\int_\Omega \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial\Omega} w \cdot n \, ds = 0$$

Daher gilt $\operatorname{div} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^\perp, L_0^2(\Omega))$

b) Injektivität:

Die Injektivität folgt direkt, da $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}(\mathrm{div})$ und $\mathcal{V}^\perp$ hier der Definitionsbereich von div ist.

c) Surjektivität:

Sei $q \in L_0^2(\Omega)$ beliebig. Gesucht ist ein $w \in H_0^1(\Omega)^n$, so dass $\operatorname{div} w = q$. Da Ω beschränkt und der Rand $\partial\Omega$ ist, existiert nach dem Lemma 3.3 von Lax-Milgram und einer Aussage über die Regularität ein $y \in H^2(\Omega)$, so dass gilt $\Delta y = q$. Da $\operatorname{div} \circ \nabla = \Delta$, folgt mit $\tilde{w} := \nabla y \in H^1(\Omega)^n$, $\operatorname{div} \tilde{w} = q$. Damit wäre die Surjektivität gezeigt, falls der Definitionsbereich von div $H^1(\Omega)^n$ wäre. Es muss also noch gezeigt werden, dass $\tilde{w}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ Null gewählt werden kann.

Dies ist möglich, da zu diesem $\tilde{w}$ ein $\tilde{u}$ gewählt werden kann, so dass $\operatorname{div} \tilde{u} = 0$ und $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = \tilde{w}|_{\partial\Omega}$ gilt. Dabei geht entscheidend ein, dass $\int_\Omega \operatorname{div} \tilde{w}\, dx = \int_\Omega q\, dx = 0$ gilt.

Die Existenz eines solchen $\tilde{u}$ zu zeigen, ist keineswegs trivial und hängt stark von der Art des Randes ab. Lässt sich der Rand $\partial\Omega$ mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion parametrisieren, kann man den Beweis in Girault-Raviart [5] nachlesen. Für Lipschitz-stetige Ränder ist ein Beweis (oder zumindest weitere Quellen) in Temam [8] skizziert. Dort werden auch die Spuroperatoren, die hier bewusst nicht verwendet wurden, in verständlicher Weise eingeführt.

Wählt man nun ein $\tilde{u}$ wie oben und definiert $w := \tilde{w} - \tilde{u}$, dann gilt, da beide auf dem Rand gleich sind: $w|_{\partial\Omega} = 0$ und damit $w \in H_0^1(\Omega)^n$ und wegen $\operatorname{div} \tilde{u} = 0$ auch $\operatorname{div} w = q$, womit die Surjektivität von $\operatorname{div} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_\perp, L_0^2(\Omega))$ gezeigt ist.

d) Stetigkeit der Inversen div^{-1}:

Dies folgt direkt aus dem Satz über die offene Abbildung. Dieser besagt, dass jeder lineare stetige surjektive Operator offen ist, das heißt offene Menge auf offene abbildet. Damit ist insbesondere der inverse Operator stetig. Dieser Satz lässt sich mit Beweis etwa in Werner [9] oder Zeidler [12] nachlesen.

□

Damit kann nun das Stokes-Problem in der folgenden Weise vollständig gelöst werden.

Satz 6.2. *Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $f \in H^{-1}(\Omega)^n$. Dann hat das Stokes-Problem 3.1 (Seite 5) mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen genau eine Lösung in $(u,p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$.*

Beweis. Da bekannt ist, dass $a(\cdot,\cdot)$ stark positiv auf $\mathcal{V}$ ist, genügt es nach obigen Vorüberlegung, die Existenz eines $\gamma^* > 0$ zu zeigen, so dass

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{((q, \operatorname{div} v))_{L^2(\Omega)}}{|v|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \gamma^* \, \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } q \in L_0^2(\Omega).$$

Nach Satz 6.1 kann zu $q \in L_0^2(\Omega)$ ein $w \in \mathcal{V}^\perp$ gewählt werden, so dass $q = \operatorname{div} w$. Da div ein Isormorphismus ist und daher div^{-1} beschränkt ist, existiert $\gamma^* > 0$, so dass

$$\|q\|_{L^2(\Omega)} = \|\operatorname{div} w\|_{L^2(\Omega)} \geq \gamma^* \, |w|_{H_0^1(\Omega)} .$$

Damit gilt nun

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{((q, \operatorname{div} v))_{L^2(\Omega)}}{|v|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \frac{((q, \operatorname{div} w))_{L^2(\Omega)}}{|w|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \frac{\|q\|_{L^2(\Omega)}^2}{|w|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \gamma^* \, \|q\|_{L^2(\Omega)} .$$

Insbesondere ist also die inf-sup-Bedingung erfüllt und die eindeutige Existenz einer Lösung mit Satz 5.9 gezeigt. Die homogene Dirichlet-Randbedingung ist bereits wegen $u \in H_0^1(\Omega)^n$, also $u = 0$ auf $\partial\Omega$, erfüllt. □

7 Allgemeinere gemischte lineare Probleme

Das Problem lässt sich auf verschiedene Arten erweitern. Diese Erweiterungen sind insbesondere bei der numerischen Behandlung gemischter Probleme von großer Bedeutung.

7.1 Aufspaltung des Operators B

Seien dazu $b_1, b_2 : V \times Q \to \mathbb{R}$ zwei verschiedene stetige Bilinearformen. Wir assoziieren wie in Abschnitt 2 zu b_i den Operator $B_i \in \mathcal{L}(V, Q^*)$, $i = 1, 2$, und formulieren damit das

Problem 7.1: *Zu gegebenem $(f, g) \in V^* \times Q^*$, finde $(u, p) \in V \times Q$, so dass:*

$$\begin{bmatrix} A & B_1^* \\ -B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad \text{in } V^* \times Q^*.$$

Satz 7.1. *Erfüllen die Operatoren B_1 und B_2 die inf-sup-Bedingungen*

$$\inf_{q \in Q} \sup_{v \in \operatorname{Ker}(B_1)^\perp} \frac{|\langle B_1 v, q\rangle|}{\|v\|_V \, \|q\|_Q} \geq \gamma_1^*,$$

$$\inf_{q \in Q} \sup_{v \in \operatorname{Ker}(B_2)^\perp} \frac{|\langle B_2 v, q\rangle|}{\|v\|_V \, \|q\|_Q} \geq \gamma_2^*,$$

und ist A ein Isomorphismus von $\operatorname{Ker}(B_2)$ auf $(\operatorname{Ker}(B_1))^*$, das heißt erfüllt A die inf-sup-Bedingungen

$$\inf_{u \in \operatorname{Ker}(B_2)} \sup_{v \in \operatorname{Ker}(B_1)} \frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|v\|_V \, \|u\|_V} \geq \alpha,$$

$$\inf_{v \in \operatorname{Ker}(B_1)} \sup_{u \in \operatorname{Ker}(B_2)} \frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|v\|_V \, \|u\|_V} \geq \alpha^*,$$

dann hat das Problem 7.1 genau eine Lösung $(u, p) \in V \times Q$.

Beweis. Nachzulesen in Bernardi et al. [1]. □

Dieser Satz ermöglicht es etwa bei der numerischen Lösung des Stokes-Problems, Divergenz und Gradient verschieden zu approximieren.

7.2 Hinzunahme eines weiteren Operators C

Eine weitere Möglichkeit, Problem 2.1 zu verallgemeinern, entsteht durch Betrachtung einer weiteren stetigen positiven Bilinearform $c : Q \times Q \to \mathbb{R}$, wobei wie üblich mit $C : Q \to Q^*$ der durch $\langle Cp, q\rangle := c(p, q)$ definierte Operator bezeichnet wird. Damit betrachten wir nun:

Problem 7.2: *Zu gegebenem $(f, g) \in V^* \times Q^*$, finde $(u, p) \in V \times Q$, so dass*

$$\begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad \textit{in } V^* \times Q^*.$$

Eine erste Aussage zur Existenz und Eindeutigkeit ergibt sich, wenn man sowohl von A als auch C starke Positivität auf V bzw. Q fordert:

Satz 7.2. *Seien $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ und $C \in \mathcal{L}(Q, Q^*)$ stark positiv, das heißt es existieren $\alpha, \gamma > 0$ mit*

$$\begin{aligned} \langle Av, v\rangle &\geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \textit{für alle } v \in V, \\ \langle Cq, q\rangle &\geq \gamma \|q\|_Q^2 \quad \textit{für alle } q \in Q, \end{aligned}$$

dann hat Problem 7.2 eine eindeutige Lösung $(u, p) \in V \times Q$.

Beweis. Nach dem Lemma 3.3 von Lax-Milgram genügt es zu zeigen, dass

$$\begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & C \end{bmatrix}$$

stark positiv ist. Dies folgt direkt aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} A & B^* \\ -B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \right\rangle &= \langle Au, u\rangle + \langle Bu, p\rangle - \langle Bu, p\rangle + \langle Cp, p\rangle \\ &= \langle Au, u\rangle + \langle Cp, p\rangle \\ &\geq \alpha \|u\|_V^2 + \gamma \|p\|_Q^2 \\ &\geq \min(\alpha, \gamma) \left\| \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \right\|_{V \times Q}^2 . \end{aligned}$$

□

Satz 7.2 kann man nun jedoch nicht als Verallgemeinerung der Aussagen aus Abschnitt 5 ansehen, da er gerade für den Fall $C \equiv 0$ nicht gültig ist. Weiterhin müssen die Operatoren A und C sehr starke Bedingungen erfüllen, an den Operator B werden jedoch gar keine Voraussetzungen gestellt.

Um ein allgemeineres Resultat zu erreichen, soll angenommen werden, dass $c(\cdot,\cdot)$ symmetrisch und $a(\cdot,\cdot)$ positiv ist. Dass $c(\cdot,\cdot)$ positiv ist, wurde bereits oben gefordert. Desweiteren sollen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$ den *inf-sup-Bedingungen* aus 5.8 genügen, das heißt es existieren $\mu, \mu^*, \gamma^* > 0$, so dass

$$\begin{aligned}
\inf_{v\in V_0} \sup_{w\in V_0} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V \|w\|_V} &\geq \mu, \\
\inf_{w\in V_0} \sup_{v\in V_0} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V \|w\|_V} &\geq \mu^*, \\
\inf_{q\in Q} \sup_{v\in V_\perp} \frac{|b(v,q)|}{\|v\|_V \|q\|_Q} &\geq \gamma^*.
\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt zunächst für jedes $\varepsilon > 0$ das regularisierte

Problem 7.3: *Zu gegebenem $(f,g) \in V^* \times Q^*$, finde $(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V \times Q$, so dass*

$$\begin{bmatrix} A + \varepsilon \operatorname{Id}_V & B^* \\ B & -C - \varepsilon \operatorname{Id}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\varepsilon \\ p_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad \text{in } V^* \times Q^*.$$

oder äquivalent

$$\varepsilon(\!(u_\varepsilon, v)\!)_V + a(u_\varepsilon, v) + b(v, p_\varepsilon) = \langle f, v\rangle \quad \text{für alle } v \in V, \tag{28}$$

$$b(u_\varepsilon, q) - \varepsilon(\!(p_\varepsilon, q)\!)_Q - c(p_\varepsilon, q) = \langle g, q\rangle \quad \text{für alle } q \in Q. \tag{29}$$

Da die Bilinearformen $\tilde{a}(u,v)_\varepsilon := a(u,v) + \varepsilon(\!(u,v)\!)$ und $\tilde{c}(p,q)_\varepsilon := c(p,q) + \varepsilon(\!(p,q)\!)$ aufgrund der starken Positivität des Skalarproduktes stark positiv auf V bzw Q sind, besitzt dieses Problem nach Satz 7.2 für jedes $\varepsilon > 0$ eine eindeutige Lösung $(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V \times Q$.

Das Ziel ist es jetzt, die Lösungen u_ε und p_ε gleichmäßig in ε zu beschränken, so dass der Grenzwert der Lösung des regularisierten Problems eine Lösung von Problem 7.2 liefert. Zur besseren Lesbarkeit wird im Folgenden auf den Index ε verzichtet. Wählt man $q = p$ und $v = u$ und subtrahiert nun Gleichung (29) von (28), so erhält man:

$$\varepsilon \|u\|_V^2 + \varepsilon \|p\|_Q^2 + a(u,u) + c(p,p) = \langle f, u\rangle - \langle g, p\rangle$$

Um nun u und p abschätzen zu können, zerlegt man

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + u_\perp \quad \text{mit} \quad u_0 \in \operatorname{Ker}(B)\,, u_\perp \in (\operatorname{Ker}(B))^\perp, \\
p &= p_0 + p_\perp \quad \text{mit} \quad p_0 \in \operatorname{Ker}(B^*)\,, p_\perp \in (\operatorname{Ker}(B^*))^\perp.
\end{aligned}$$

Die Abschätzungen, zunächst für $c(p,p)$ und $\sqrt{\varepsilon}\,\|p\|$, dann für $p_\perp, u_\perp$ und u_0 lassen sich jetzt ähnlich zum Beweis von Satz 5.8 bilden, wobei ausgenutzt wird, dass $g \in \operatorname{Im}(B)$, was jedoch dadurch, dass $b(\cdot,\cdot)$ die *inf-sup-Bedingungen* erfüllt, für jedes $g \in Q^*$ erfüllt ist. Gut nachzulesen sind diese Abschätzungen in Brezzi [2, Seite 46].

Nur für p_0 lässt sich aus den gegebenen Voraussetzungen keine Abschätzung ableiten. Da $p_0 \in \mathrm{Ker}(B^*)$ und $g \in \mathrm{Im}(B)$ ist, folgt aus Gleichung (29)

$$\varepsilon((p_0, q))_Q + c(p_0, q) = -c(p_\perp, q) \quad \text{für alle } q \in \mathrm{Ker}(B^*)\,. \tag{30}$$

p_0 als Lösung dieser Gleichung muss nun gleichmäßig beschränkt werden. Deshalb wird zusätzlich gefordert:

Bedingung B: Es gibt ein κ_0, so dass für jedes $p_\perp \in (\mathrm{Ker}(B^*))^\perp$ und für jedes $\varepsilon > 0$ die Lösung $p_0 \in \mathrm{Ker}(B^*)$ der Gleichung (30) beschränkt ist durch $\kappa_0 \|p_0\|_Q \leq \|p_\perp\|_Q$.

Ist nun also zusätzlich die Bedingung B erfüllt, so ist auch p_0 gleichmäßig beschränkt. Nun lässt sich über Grenzwertaussagen zeigen, dass genau eine Lösung von Problem 7.2 existiert. Dieses Ergebnis soll noch einmal mit allen Voraussetzungen in folgendem Satz zusammengefasst werden:

Satz 7.3. *Seien $a(\cdot,\cdot)$ und $c(\cdot,\cdot)$ positiv und $c(\cdot,\cdot)$ außerdem symmetrisch. Erfüllen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$ die inf-sup-Bedingungen aus Satz 5.8 und gilt außerdem Bedingung B, dann hat Problem 7.2 für jedes $(f,g) \in V^* \times Q^*$ eine eindeutige Lösung $(u,p) \in V \times Q$. Weiterhin gilt die Abschätzung*

$$\|u\|_V + \|p\|_Q \leq K(\|f\|_{V^*} + \|g\|_{Q^*}),$$

wobei K eine Funktion ist, die auf beschränkten Mengen beschränkt ist und nichtlinear von $\|a\|$, $\|c\|$, $1/\mu$, $1/\mu^*$, $1/\gamma^*$, $1/\kappa_0$ abhängt.

7.3 Beispiele

Um ein Gefühl insbesondere für Bedingung B zu bekommen, wollen wir noch zwei einfache Beispiele angeben.

Beispiel 1: Sei $c(p,q) := \lambda((p,q))_Q$ mit $\lambda \geq 0$. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung im Fall $\lambda > 0$ folgt schon wegen der starken Positivität des Skalarproduktes aus Satz 7.2. Dies sollte nun immer noch erfüllt sein. Weiterhin sollte auch gerade im Fall $\lambda = 0$ eine Lösung existieren, damit tatsächlich von einer Verallgemeinerung der *inf-sup-Bedingungen* gesprochen werden kann.

Gleichung (30) wird in diesem Fall gerade zu

$$(\varepsilon + \lambda)((p_0, q))_Q = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathrm{Ker}(B^*)$$

Also muss $p_0 = 0$ gelten, womit es offensichtlich gleichmäßig beschränkt ist. Insbesondere gilt die Bedinung B und die Lösung existiert für alle $\lambda \geq 0$ nach Satz 7.3.

Beispiel 2: Sei $c(\cdot,\cdot)$ nun stark positiv auf $\mathrm{Ker}(B^*)$, das heißt es existiert $\lambda > 0$, so dass

$$c(q,q) \geq \lambda \|q\|_Q^2 \quad \text{für alle } q \in \mathrm{Ker}(B^*)$$

Für $q = p_0$ gilt dann in Gleichung (30)

$$\varepsilon \left\| p_0 \right\|_Q^2 + c(p_0, p_0) = -c(p_\perp, p_0)$$

Wegen der starken Positivität und der Stetigkeit von $c(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\begin{aligned}(\lambda + \varepsilon) \left\| p_0 \right\|_Q^2 &\leq \left| c(p_0, p_0) + \varepsilon \left\| p \right\|_Q^2 \right| \\ &= \left| c(p_\perp, p_0) \right| \\ &\leq \left\| c \right\| \left\| p_\perp \right\|_Q \left\| p_0 \right\|_Q ,\end{aligned}$$

also wegen $\varepsilon > 0$

$$\left\| p_0 \right\|_Q \leq \frac{\left\| c \right\|}{\lambda + \varepsilon} \left\| p_\perp \right\|_Q \leq \frac{\left\| c \right\|}{\lambda} \left\| p_\perp \right\|_Q .$$

Mit $\kappa_0 := \frac{\|c\|}{\lambda}$ ist damit Bedingung B erfüllt und damit die eindeutige Lösbarkeit nach Satz 7.3.

In diesem Fall müsste $c(\cdot, \cdot)$ nicht stark positiv sein, eine *inf-sup-Bedingung* wie für $a(\cdot, \cdot)$ würde genügen.

8 Anhang: Eigenschaften von Produkträumen

Die folgenden zwei Sätze zeigen grundlegende Eigenschaften von Produkträumen und deren Dualräumen auf. Dabei ist $\|.\|_p$ die übliche p-Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

Satz 8.1 (Normen auf Produkträumen)**.** *Seien $X_1, X_2, \dots, X_n, n \in \mathbb{N}$, normierte Räume. Dann ist für jedes p mit $1 \leq p \leq \infty$*

$$\|x\| := \left\|(\|x_1\|_{X_1}, \cdots, \|x_n\|_{X_n})\right\|_p$$

eine Norm auf $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Satz 8.2 (Dualraum von Produkträumen)**.** *Seien $X_1, X_2, \dots, X_n, n \in \mathbb{N}$, normierte Räume und sei $1 \leq p, q \leq \infty$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ferner seien die Räume $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ und $X' := X_1^* \times X_2^* \times \cdots \times X_n^*$ ausgestattet mit den Normen*

$$\|x\|_X := \left\|\left(\|x_1\|_{X_1}, \dots, \|x_n\|_{X_n}\right)\right\|_p$$

und

$$\|y\|_{X'} := \left\|\left(\|y_1\|_{X_1^*}, \dots, \|y_n\|_{X_n^*}\right)\right\|_q.$$

Dann ist $T \in \mathcal{L}(X', X^*)$ definiert durch

$$\langle Ty, x\rangle_{X^*,X} := \langle y_1, x_1\rangle_{X_1^*,X_1} + \cdots + \langle y_n, x_n\rangle_{X_n^*,X_n}$$

ein Isomorphismus.

Literatur

[1] C. Bernardi, C. Canuto, Y. Maday: *Generalized Inf-Sup-Conditions for Chebyshev Spectral Approximation of the Stokes Problem*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 25, No. 6. (Dec., 1988), pp. 1237 - 1271, 1988.

[2] F. Brezzi, M. Fortin: *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1991.

[3] I. Ekeland, R. Temam: *Convex analysis and variational problems*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam - Oxford, 1976.

[4] E. Emmrich: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*, Vieweg, Wiesbaden, 2004.

[5] V. Girault, P.-A. Raviart: *Finite element approximation of the Navier-Stokes Equations*, Band 749 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1981, Revised reprint of the first edition 1979.

[6] W. Hackbusch: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1986.

[7] A. Kurdila, M. Zabarankin: *Convex Functional Analysis*, Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 2005.

[8] R. Temam: *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, Band 2 der Reihe *Studies in Mathematics and Its Applications*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam - New York - Oxford, 1977.

[9] D. Werner: *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 5. überarbeitete Auflage, 2005.

[10] J. Wloka: *Funktionalanalysis und Anwendungen*, Walter de Gruyter, Berlin - New York, 1971.

[11] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*, Band 108 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1995.

[12] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications*, Band 109 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1995.