

Kombinatorik - Zahlenreihen und Zählfolgen

Oft gibt es Rätsel von der Form "Welche Zahl kommt als nächstes?"

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1. 1,4,9,16,25,36,? | 8. 1,3,6,10,15,21,28,? |
| 2. 2,3,5,7,11,13,17,19,? | 9. 3,5,9,17,33,65,? |
| 3. 8,3,1,5,9,6,7,4,? | 10. 1,2,3,5,8,13,21,? |
| 4. 31,28,31,30,31,30,31,? | 11. 3,4,6,9,13,18,24,? |
| 5. 4,5,3,6,2,7,1,? | 12. 1,5,14,30,55,91,? |
| 6. 3,64,5,16,7,4,9,? | 13. 2,1,3,4,7,11,18,? |
| 7. 3,5,8,13,20,31,44,? | 14. 1,1,2,4,7,13,24,44,81,? |

Zusatzfrage: wie heißt jeweils die hundertste Zahl in der Folge?

Differenzen betrachten

Manche der Folgen sind ohne mathematischen Hintergrund. Bei vielen gibt es aber ein mathematisches Gesetz. Bei diesen lohnt es sich, die Differenzen aufeinanderfolgender Zahlen zu betrachten. Zum Beispiel:

4	7	12	19	28	...
	3	5	7	9	

Hier haben die Differenzen eine leichter zu durchschauende Form. Oder

1	1	2	3	5	8	13	21	...
	0	0	1	2	3	5	8	...

Die Differenzen der Folge ergeben die Folge selbst. Oder

3	5	9	17	33	65	129	...
	2	4	8	16	32	64	...

Es zeichnet sich ein Muster ab (hier: Zweierpotenzen)

Es lohnt sich auch, die Differenzen der Differenzen anzusehen, oder die Differenzen der Differenzen der Differenzen... Z.B.

4	7	12	19	28	39	...
	3	5	7	9	11	...
		2	2	2	2	2

Oder

1	1	3	13	37	81	151...
	0	2	10	24	44	70...
		2	8	14	20	26...
			6	6	6	6...

Fakt:

- Falls in den ersten Differenzen nur gleiche Zahlen stehen ist die allgemeine Formel für die Zahlenreihe

$$an + b, \text{ wobei } a = a_1, b = b_1 - a$$

(dabei sind a_1, b_1 jeweils die ersten Zahlen in der ersten bzw. nullten Differenzenreihe)

- Falls in den zweiten Differenzen nur gleiche Zahlen stehen ist die allgemeine Formel für die Zahlenreihe

$$an^2 + bn + c, \text{ wobei } a = \frac{a_1}{2}, b = b_1 - 3a, c = c_1 - b - a$$

(dabei sind a_1, b_1, c_1 jeweils die ersten Zahlen in der zweiten, ersten, nullten Differenzenreihe)

- Falls in den dritten Differenzen nur gleiche Zahlen stehen ist die allgemeine Formel für die Zahlenreihe

$$an^3 + bn^2 + cn + d, \text{ wobei } a = \frac{a_1}{6}, b = \frac{b_1}{2} - 6a, c = c_1 - 3b - 7a, d = d_1 - b - c - a$$

(dabei sind a_1, b_1, c_1, d_1 jeweils die ersten Zahlen in der dritten, zweiten, ersten, nullten Differenzenreihe)

Aufgabe 1: Wie lautet die Formel? Was ist die hundertste Zahl in der Reihe?

- (a) 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19...
- (b) 1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73...
- (c) 1, 3, 9, 19, 33, 51, 73, 99...
- (d) 1, 5, 19, 49, 101, 181, 295...
- (e) 1, 1, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99...
- (f) 1, 1, 7, 11, 21, 29, 43, 55, 73, 89, 111, 131...
- (g) 0, 2, 4, 19, 36, 76, 120, 197, 280, 406, 540...

Manchmal muss man etwas tricksen: evtl hauen die ersten paar Zahlen nicht hin. Oder es gibt zwei verschiedene Gesetze für gerade und ungerade Zahlen.

Die Methode oben klappt immer, falls ein Gesetz der Form $an^6 + bn^5 + \dots$ oder $an^{11} + bn^{10} + \dots$ usw. zugrunde liegt. (Falls die Formel ein **Polynom** ist).

Andere Zahlenreihen können *exponentiellen* Formeln gehorchen (wie die Beispiele Nr 9, 10, 13 und 14 von Seite 1). Das heißt, das Gesetz ist etwa $2^n + 1$, oder auch $(n^2 + 1)3^n$, oder $1.618 \dots^n$. Das kann man auch mit der Differenzenmethode rausfinden, wenn man die Regeln leicht

ändert. Man findet keine genaue Formel mehr (oder nicht so einfach), aber man bekommt eine Idee.

(Auch zeigen: “Fächer” für Fibonacci, 2^n , 3^n , $3^n - 2^n \dots$)

Rekursionen

Für viele der Folgen oben gibt es — neben der genauen Formel — eine **Rekursionsformel**: Das ist ein Bildungsgesetz wie

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad \text{Startwerte: } f_1 = 1, f_2 = 1$$

Diese Rekursionsformel liefert die **Fibonaccizahlen**, Nr. 10 oben. Mit den Startwerten $f_1 = 2, f_2 = 1$ (und derselben Rekursionsformel) sind es die *Lukaszahlen* (Nr 13 oben). Die Rekursionsformel

$$a_{n+1} = a_n + n, \quad \text{Startwert: } a_1 = 1$$

liefert die *Dreieckszahlen*, Nr. 8 oben) Die Rekursionsformel

$$t_{n+1} = t_n + t_{n-1} + t_{n-2}, \quad \text{Startwerte: } t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = 1$$

liefert die **Tribonaccizahlen**.

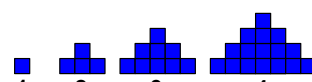
Wenn man keine genaue Formel findet, ist eine Rekursion oft auch nützlich. (Umgekehrt kann man aus Rekursionsformeln oft genaue Formeln herleiten, das ist aber etwas schwierig.)

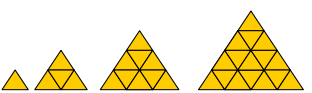
Dinge zählen

Zahlenreihen tauchen oft auf, wenn es darum geht, bestimmte Anzahlen zu zählen.

Beispiel:

1. In wie viele Teile kann ich ein Blatt Papier mit einem geraden Schnitt zerteilen, wenn ich es vorher n -mal falten darf?
2. In wie viele Teile kann ich eine Pizza mit n geraden Schnitten zerschneiden? (Hier soll man an eine zweidimensionale Pizza denken.)
3. In wieviele Teile kann ich ein Stück Käse mit n geraden Schnitten zerschneiden? (Hier soll man an einen dreidimensionalen Block Käse denken.)
4. (als Aufgabe) Wenn ich bei einer Pizza n Punkte am Rand markiere, und dann alle Schnitte von einem der Punkte zu einem anderen der Punkte ausführe, wie viele Teile habe ich?

5. Aus wievielen kleinen Quadraten besteht
- 
- 1 2 3 4 ...?

6. Aus wievielen kleinen Dreiecken besteht
- 
- 1 2 3 4 ...?

7. Aus wievielen Kugeln besteht eine Dreieckspyramide?
8. Aus wievielen Kugeln besteht eine Quadratpyramide?
9. Auf wieviele Weisen kann ich die Kanten eines Dreiecks mit n Farben färben? (Dreiecke, die durch Drehung auseinander hervorgehen, werden hier als identisch betrachtet)
10. Auf wie viele Weisen kann ich ein n -Eck in Dreiecke zerschneiden, wenn nur Schnitte von Ecke zu Ecke erlaubt sind?

Und jeweils: was ist der hunderste Wert?

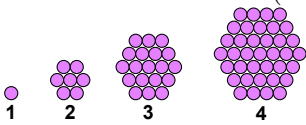
Oft ist es gut, auch die kleinen Fälle zu betrachten: $n = 1$ oder $n = 0$.

Aufgabe 2:

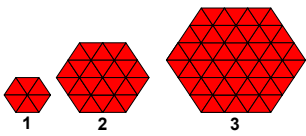
(a) Wieviele verschiedene bunte Türme der Höhe zwei kann ich aus (würfelförmigen) Bauklötzen bauen, wenn die Klötze n verschiedene Farben haben? (Bunt heißt: alle Klötze im Turm haben verschiedene Farben)

(b) Wieviele verschiedene bunte Türme der Höhe drei kann ich aus (würfelförmigen) Bauklötzen bauen, wenn die Klötze n verschiedene Farben haben? (Bunt heißt: s.o.)

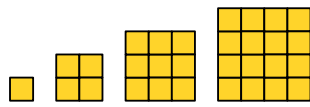
(c) Aus wievielen Kugeln besteht



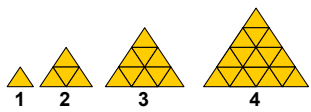
(d) Aus wievielen Dreiecken besteht



(e) Wieviele Quadrate sieht man hier *insgesamt*:



(f) Wieviele Dreiecke sieht man hier *insgesamt*:



Andere Zahlenreihen

Kolakoski 12211212212211... oder auch 224422224444224422442222....

Look-and-say: 1 11 21 1211 111221 312211 ...

Catalanzahlen

oeis.org

Literatur

Vieles steht auf wikipedia. Oft sind die englischen Seiten ausführlicher. Die deutschen Seiten zum Thema Mathe sind aber mittlerweile auch gut. Vieles hier Behandelte steht in diesem schönen Buch:

John Conway, Richard Guy: The Book of Numbers (dt.: Zahlenzauber)