Dr. Dirk Frettlöh 14.5.2024

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 4

Aufgabe 1:
Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 8 \\ -1 & 8 & 14 \end{pmatrix}$ symmetrisch positiv definit. Berechnen Sie die Choleskyzerlegung LL^T von A.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Konditionszahlen der folgenden Funktionen an der Stelle $x = 1$. Also für

$$f_1(x) = (1-x)^6, \quad f_2(x) = (3-2x)^3, \quad f_3(x) = 99 - 70x, \quad f_4(x) = \frac{1}{99+70x}.$$

Der Witz hier ist: es ist $f_i(\sqrt{2}) = f_j(\sqrt{2})$ für alle $i, j = 1, 2, 3, 4$. Wenn man also $(1-\sqrt{2})^6$ näherungsweise berechnen möchte, kann man (wegen $\sqrt{2} \approx 1,4$) ja $f_i(1,4)$ berechnen, für verschiedene i. Die Ergebnisse unterscheiden sich teilweise deutlich. Eigentlich müssten wir ja die Konditionszahlen für $x = 1,4$ bzw. $x = \sqrt{2}$ berechnen, da kommen aber krumme Werte raus. Also hier für $x = 1$.

Aufgabe 3:
Es sei $A = \begin{pmatrix} c & 100c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, wobei $c > 0$. Es ist $A^{-1} = \frac{1}{99}\begin{pmatrix} -1/c & 100 \\ 1/c & -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max\{\sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|\}$. Für welche c wird $\kappa(A)$ minimal?

(Zusatz: berechnen Sie die Frobeniusnorm von A.)

Zusatzfrage: Wenn wir bei der Choleskyzerlegung auf die Forderung $\ell_{ii} > 0$ verzichten, wieviele Möglichkeiten gibt es dann für L mit $LL^T = A$?

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie: ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch, dann hat A m Eigenvektoren, die paarweise orthogonal sind.