Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie

Inhaltsübersicht und Stichwortverzeichnis

Algebraische Topologie

Einführung

Zu Beginn dieser Veranstaltung erwarten Sie vermutlich von mir, daß ich Ihnen in wenigen Worten beschreibe, was "Algebraische Topologie" ist. Das geht zwar nicht, aber ich will es wenigstens versuchen.

Die algebraische Topologie ist etwa so alt wie dieses Jahrhundert.[1] Ihre Erschaffung geschah in einer Art Urknall, nämlich durch Poincaré's Erfindung der sogenannten "Homologiegruppen". Die Anzahl der bisher publizierten wissenschaftlichen Arbeiten, die der algebraischen Topologie zuzurechnen sind, dürfte an die zehntausend betragen. Es werden auch immer noch mehr, denn es gibt heutzutage einige hundert Mathematiker, die sich in ihrer Eigenschaft als Forscher hauptsächlich mit algebraischer Topologie beschäftigen. Nun zu mehr inhaltlichen Dingen. In der "Topologie"–Veranstaltung des vorherigen Semesters haben wir Beispiele dafür kennengelernt, wie man einem topologischen Raum X gewisse "diskrete Strukturen" zuordnet, von denen man hofft, daß sie überschaubarer sind als der Raum X selbst, nämlich einmal

$$\pi_0(X) \ = \ \text{Menge der Weg–Zusammenhangsklassen von } \ X$$

und zum anderen

$$\pi_1(X, x_0) \ = \ \text{Fundamentalgruppe von } \ X \ \text{ zum Basispunkt } \ x_0 \ .$$

Ganz grob nun gesprochen, befaßt sich algebraische Topologie mit der Systematik derartiger "Diskretisierungen", nämlich deren Konstruktion, Berechnung und Anwendung.

In dieser Veranstaltung werden wir uns mit zwei solcher Konstruktionen beschäftigen, nämlich den *Homotopiegruppen* $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$ (aus technischen Gründen braucht man wie im Falle $n = 1$ (Fundamentalgruppe) immer einen Basispunkt) und den *Homologiegruppen* $H_n(X)$, $n \geq 0$.

Bei beiden Konstruktionen muß ich leider eine traurige Nachricht vorweg schicken: Die Homotopiegruppen sind zwar sehr einfach zu definieren (nämlich die unterliegende Menge von $\pi_n(X, x_0)$ ist nichts anderes als die Menge der Homotopieklassen (Homotopie relativ zum Basispunkt) von Abbildungen $S^n \longrightarrow X$), aber sie sind extrem schwierig zu berechnen. Sei z.B. X ein "vernünftiger" Raum mit den Eigenschaften (i) X ist kompakt, (ii) es gibt ein $m \geq 2$, so daß $\pi_m(X, x_0) \neq 0$ (die m–dimensionale

[1] Das Skript (und damit auch diese Feststellung) stammt aus dem vorigen Jahrhundert.

Sphäre S^m ist ein Beispiel für solch ein X), dann weiß man: Es gibt unendlich viele n mit $\pi_n(X,x_0) \neq 0$, und nur sehr wenige von diesen sind explizit bekannt.

Die Homologiegruppen andererseits sind verhältnismäßig einfach zu berechnen (es gibt beliebig viele Räume, wo man sie alle kennt), aber sie sind schwierig zu konstruieren. Zumindest wird ihre Konstruktion, wenn man sie kennenlernt, meist als sehr technisch empfunden. Das mag überraschend erscheinen auf dem Hintergrund dessen, daß die Homologiegruppen ca. 40 Jahre älter sind als die Homotopiegruppen (ca. 1890 bzw. ca. 1930). Es ist aber so, daß die Homologiegruppen zunächst nur erklärt waren für Räume mit einer gewissen Zusatzstruktur (sogenannte Simplizialkomplexe), und die Annahme, daß die Homologiegruppen "topologische Invarianten" seien, d.h., nur von dem Raum abhängen und nicht von der Zusatzstruktur, diese Annahme erforderte gewisse Akte des Glaubens. Erst im Laufe der 20er und 30er Jahre gelang es, Konstruktionen der Homologiegruppen zu geben, die sowohl topologisch invariant waren als auch technisch einwandrei (d.h., frei von inneren Widersprüchen). Ein interessanter Aspekt der Entwicklung ist, daß es sich schließlich auch als unvernünftig herausstellte, die topologische Invarianz der Homologiegruppen direkt beweisen zu wollen. Das richtige Vorgehen war vielmehr, einen in Wirklichkeit viel stärkeren Satz zu beweisen, nämlich den, daß die Homologiegruppen sogar nur von dem *Homotopietyp* des fraglichen Raumes abhängen.

Erinnerung. Es bezeichne $[0,1]$ das Einheits-Intervall. Zwei (stetige!) Abbildungen $f_0,\, f_1 :\ X \longrightarrow X'$ heißen *homotop*, wenn eine *Homotopie* zwischen ihnen existiert; d.h., eine Abbildung

$$F :\ X \times [0,1] \ \longrightarrow\ X'$$

so daß

$$F \,|\, X \times 0 \ =\ f_0 \quad \text{und} \quad F \,|\, X \times 1 \ =\ f_1 \ .$$

(Vielleicht sollte man hier etwas genauer sagen, daß $F \,|\, X \times 0 \ =\ f_0 \circ i_0$, wo i_0 eine Identifikation von X mit dem Unterraum $X \times 0$ bezeichnet; und ähnlich auch für f_1).

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ wird eine *Homotopieäquivalenz* genannt, wenn eine Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ existiert, so daß die zusammengesetzten Abbildungen gf und fg jeweils homotop sind zu der identischen Abbildung auf X bzw. auf Y.

Und ein *Homotopietyp* bezeichnet eine Äquivalenzklasse von topologischen Räumen bezüglich der Äquivalenzrelation "Homotopieäquivalenz". Mit anderen Worten: zwei Räume X und Y gehören zum selben Homotopietyp, wenn eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen existiert.

Abweichend von der historischen Entwicklung des Gebiets werden wir uns in dieser Veranstaltung zunächst nicht mit den Homologiegruppen befassen, sondern vielmehr mit den Homotopiegruppen. Der Hauptgrund ist der, daß wir auf diese Weise am besten an das Material des vorigen Semesters anknüpfen können. Im Zusammenhang hiermit werden wir auch eine wichtige Art von "vernünftigen" Räumen studieren, die sogenannten *Zellenkomplexe*. Eines der ersten Resultate, die wir dann herleiten wollen ist folgender spektakulär aussehender Satz, der zum Glück nicht ganz so schwierig ist, wie das auf den ersten Blick aussieht.

SATZ VON WHITEHEAD. $f : X \longrightarrow Y$ *sei eine Abbildung zwischen wegzusammenhängenden "vernünftigen" Räumen. Folgende Aussagen sind zueinander äquivalent*:
(i) f *ist eine Homotopieäquivalenz.*
(ii) f *induziert Isomorphismen der Homotopiegruppen*

$$f_*\colon\ \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\approx} \pi_n(Y, f(x_0)) \ , \quad n = 1, 2 \ldots .$$

Nachdem wir anhand dieses Satzes zur Kenntnis genommen haben, daß der Begriff der Homotopieäquivalenz doch schon recht algebraisch angehaucht ist, wollen wir bei unserem weiteren Vorgehen dann auch selbst etwas mehr in Richtung Algebra und Kombinatorik abdriften. — Soweit zur Einführung in das Programm.

Als nächstes werde ich jetzt eine Abschweifung machen. Ich werde einfach einige Räume vorstellen, die es wert sind, daß man sich dafür interessiert. Dabei wird es insbesondere auch um die explizite Konstruktion einiger sehr interessanter Homotopien gehen.

Die Menge der reellen $n \times n$ Matrizen

$$M_n(\mathbb{R}) \quad = \quad \Big\{ \ (a_{i,j})_{\,1 \le i,j \le n} \ \ | \ \ a_{ij} \in \mathbb{R} \ \Big\}$$

ist in offensichtlicher Weise isomorph zu $\mathbb{R}^{n \times n}$, und damit selbst auch ein topologischer Raum. Unterräume davon sind

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) \ &— \ \text{der Raum der invertierbaren Matrizen} \\ O_n(\mathbb{R}) \ &— \ \text{der Raum der orthogonalen Matrizen}\,. \end{aligned}$$

Ersterer Unterraum ist gegeben durch die Ungleichung $\det(M) \neq 0$ (bezüglich der stetigen Funktion *Determinante* : $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$), daher ist er *offener* Unterraum. Letzterer ist gegeben durch das Gleichungssystem

$$O_n(\mathbb{R}) \quad = \quad \left\{ \ (a_{i,j}) \ \middle| \ \sum_j a_{ij}\ a_{kj} \ = \ \delta_{ik} \ = \ \begin{cases} 1 \text{ wenn } i = k \\ 0 \text{ wenn } i \neq k \end{cases} \right\} \ ,$$

ist also ein *abgeschlossener* Unterraum; aus dem Gleichungssystem folgt auch noch, daß $|a_{i,j}| \ \le \ 1$ für alle i, j. Damit ist $O_n(\mathbb{R})$ isomorph zu einem *beschränkten* abgeschlossenen Unterraum des $\mathbb{R}^{n \times n}$, und ist somit *kompakt*.

BEHAUPTUNG. *Die Inklusion* $O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ *ist eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Wir werden zeigen, daß sogar $O_n(\mathbb{R})$ *Deformationsretrakt* von $GL_n(\mathbb{R})$ ist; das heißt, daß eine stetige Familie von stetigen Abbildungen existiert,

$$h_t : \ GL_n(\mathbb{R}) \ \longrightarrow \ GL_n(\mathbb{R}) \ , \quad t \in [0, 1] \ ,$$

so daß gilt

$$h_0\,(\,GL_n(\mathbb{R})\,) \ \subset \ O_n(\mathbb{R}) \ , \quad h_1 \ = \ \mathrm{Id}_{GL_n(\mathbb{R})} \ , \quad h_t \,|\, O_n(\mathbb{R}) \ = \ \mathrm{Id}_{O_n(\mathbb{R})} \quad (\text{für alle } t)\,.$$

Die Familie $t \longmapsto h_t$ ist gegeben durch den sogenannten *Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsprozeß* — wenn man diese aus der linearen Algebra bekannte Konstruktion nur richtig anschaut. Bezeichne nämlich $a_i = (a_{ij})_{1 \leq j \leq n}$ den i-ten Zeilenvektor, sei $\langle a_i\,, a_k \rangle = \sum_j a_{ij}\, a_{kj}$, und $|a_i|^2 = \langle a_i, a_i \rangle$. In einem ersten Schritt wird definiert:

$$
\begin{aligned}
f_t\,(a_1) &= a_1 \\
f_t\,(a_2) &= a_2 - (1{-}t)\, \tfrac{\langle a_2, f_t(a_1)\rangle}{|f_t(a_1)|^2}\, f_t\,(a_1) \\
&\vdots \\
f_t\,(a_n) &= a_n - (1{-}t)\, \tfrac{\langle a_n, f_t(a_{n-1})\rangle}{|f_t(a_{n-1})|^2}\, f_t\,(a_{n-1}) \\
&\qquad - \;\ldots\; - (1{-}t)\, \tfrac{\langle a_n, f_t(a_1)\rangle}{|f_t(a_1)|^2}\, f_t\,(a_1) \ .
\end{aligned}
$$

Die Vektoren $f_0(a_1)\,, \ldots\,, f_0(a_n)$ sind nun orthogonal zueinander, sie haben aber vielleicht noch nicht die Länge 1. Das erreichen wir im zweiten Schritt; wir setzen nämlich einfach

$$h_t(a_i) \ := \ |f_t(a_i)|^{t-1}\, f_t(a_i) \ . \qquad \square$$

Jeder reellen $n{\times}n$ Matrix entspricht eine (automatisch stetige!) lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und wenn die Matrix *invertierbar* ist, so ist auch diese Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar, d.h., sie ist eine topologische Äquivalenz. Wir können allgemeiner die Menge solcher topologischen Äquivalenzen betrachten; also

$$\mathrm{Top}\,(\mathbb{R}^n) \ = \ \big\{\, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ \mid \ h \ \text{ ist topologische Äquivalenz} \,\big\} \ .$$

Man könnte diese Menge als metrischen Raum auffassen bezüglich der Sup-Norm; weil aber $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt ist, wäre die hiervon induzierte topologische Struktur nicht sehr schön, wie sich herausstellt. Das 'richtige' Vorgehen ist es vielmehr, das Verhalten der h's 'im Unendlichen' in geeigneter Weise zu vernachlässigen. Dazu betrachtet man die folgende topologische Struktur. Sie wird dadurch spezifiziert, daß man für jedes h eine *Umgebungsbasis* $\{\, U_{K,\varepsilon}(h)\,\}$ definiert; nämlich in Abhängigkeit von einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ und von einer reellen Zahl $\varepsilon > 0$ wird definiert

$$U_{K,\varepsilon}(h) \ = \ \{\, g \in \mathrm{Top}\ (\mathbb{R}^n) \ \mid \ |g(x) - h(x)| < \varepsilon \ \text{ für } \ x \in K \,\} \ .$$

Die so spezifizierte topologische Struktur auf $\mathrm{Top}\,(\mathbb{R}^n)$ nennt man auch die *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta*.

In ähnlicher Weise kann man auch die Menge der *Diffeomorphismen* betrachten,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Diff}\ (\mathbb{R}^n) \ = \ \{\, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \ & \textit{h ist topologische Äquivalenz;} \\
& \textit{h und } h^{-1} \textit{ sind stetig differenzierbar} \,\} \,.
\end{aligned}
$$

Eine Topologie verschafft man sich ähnlich wie vorhin, nur daß man jetzt auch die Ableitung noch mit einbaut — kurz gesagt ist dies die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta *für die Abbildung* h *selbst und für ihre erste Ableitung.*

Behauptung. *Die Inklusion* $GL_n(\mathbb{R}) \to$ *Diff* $(\mathbb{R}^n)$ *ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis (Skizze). Wir geben eine Deformationsretraktion an. In einem ersten (offensichtlichen) Schritt geben wir eine Deformationsretraktion in einen Unterraum $\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)_0$ an. Der Unterraum besteht aus den $h \in \mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $h(0) = 0$; die Deformation ist so definiert: dem Paar $g \in \mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)$ und $t \in [0,1]$ wird zugeordnet

$$g_t(x) \;=\; g(x) - (1{-}t)\, g(0) \;.$$

Es ist dann $g_0 \in \mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)_0$.

Der zweite (interessantere) Schritt gibt eine Deformationsretraktion von $\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)_0$ in den Unterraum $GL_n(\mathbb{R})$ an; nämlich zu $f \in \mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)_0$ und zu $t \in [0,1]$ definieren wir

$$f_t(x) \;=\; \tfrac{1}{t} \cdot f(t \cdot x)\ ,\ \text{ für }\ t > 0\ ,\quad \text{und}\quad f_0(x) \;=\; D_0 f(x)\ ,$$

wobei $D_0 f \in GL_n(\mathbb{R})$ die Ableitung von f im Nullpunkt bezeichnet. Die Definition der Ableitung $D_0 f$ (eine *lineare Funktion, die* f *in der Nähe von* 0 *besser als linear approximiert*) besagt nun, daß bei $t \to 0$ tatsächlich $f_t \to f_0$ gilt (Konvergenz für die Funktionswerte). Um auch die ensprechende Sache für die Ableitung zu bekommen, braucht man die *stetige* Differenzierbarkeit. Auf die Details wollen wir hier nicht weiter eingehen. $\square$

Insgesamt erhält man so, daß der 'sehr große' Raum $\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n)$ als Deformationsretrakt den doch sehr viel übersichtlicheren Raum $O_n(\mathbb{R})$ enthält. Eine Frage, die sich danach geradezu aufdrängt, ist die, ob etwa die Inklusion

$$\mathrm{Diff}\,(\mathbb{R}^n) \;\longrightarrow\; \mathrm{TOP}\,(\mathbb{R}^n)$$

ebenfalls eine Homotopieäquivalenz ist?

Die Antwort zu dieser Frage ist *nein*. Allerdings ist dieses 'nein' eine von den Aussagen in der Mathematik, die nicht so leicht zu begründen sind, wie man das vielleicht hoffen möchte. Die Begründung braucht viel Apparat und darüberhinaus auch viele Ideen. Sie wird nicht Gegenstand dieser Veranstaltung sein.

CW-Komplexe

Ein 'Zellenkomplex' ist ein topologischer Raum, der "aus Zellen besteht". Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese Aussage zu interpretieren. Uns wird es in erster Linie darum gehen, Räume zu betrachten, die auf eine bestimmte induktive Weise konstruiert werden können mit Hilfe eines Prozesses *Anheften von Zellen*. Unser Grund ist natürlich der, daß die (richtig eingeführte) 'Zellenstruktur' ein ungeheuer nützliches Hilfsmittel ist und daß sie für viele Zwecke nicht einmal eine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Nachdem der Anhefte-Prozeß beschrieben ist, werden wir eine besonders wichtige Sorte von Zellenkomplexen zur Kenntnis nehmen, die als *CW-Komplexe* bezeichnet werden.

Zunächst also der Prozess 'Anheften von Zellen' — oder, um klein anzufangen, das 'Anheften einer Zelle'. Es sei X ein topologischer Raum. Wir wollen erklären, was es heißt, daß ein topologischer Raum X' *aus* X *entsteht durch das Anheften einer Zelle*; oder, etwas genauer, *durch das Anheften einer* n*-Zelle*, wo die Zahl n die *Dimension* der Zelle bezeichnet.

Es bezeichne D^n den *n-dimensionalen Ball*,

$$D^n \ = \ \{ \, x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ \|x\| \leq 1 \, \} \ ,$$

und ∂D^n seinen *Rand*,

$$\partial D^n \ = \ S^{n-1} \ = \ \{ \, x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ \|x\| = 1 \, \} \ .$$

Der Raum X' nun soll aus der disjunkten Vereinigung $X \,\dot{\cup}\, D^n$ gebildet werden mit Hilfe einer geeigneten Quotientenraum-Konstruktion; nämlich die Randpunkte von D^n sollen "keine neuen Punkte liefern", sie sollen also mit schon vorhandenen Punkten aus X identifiziert werden. Dazu benötigen wir eine Abbildung $f\colon \partial D^n \to X$, die sogenannte *Anhefte-Abbildung*. Dies gibt uns die Möglichkeit zu sagen, daß jeder Punkt $z \in \partial D^n$ mit seinem Bildpunkt $f(z)$ in X identifiziert werden soll — so daß also solch ein Punkt $z \in \partial D^n$ tatsächlich nichts neues liefern wird.

Warum nun diese so umständliche Prozedur? Es sollen ja schließlich nur die Punkte aus dem *Innern* von D^n zu dem Raum X hinzugefügt werden. Warum fügt man zuerst *alle* Punkte aus D^n hinzu, um dann nachträglich die Randpunkte von D^n wieder zu vernichten? Nun, dieses 'Vernichten' geht nicht irgendwie, es geht vielmehr mit Hilfe der Anhefte-Abbildung; und dies gibt uns die Möglichkeit zur Einbringung eines ungemein wichtigen Details. Nämlich wir können (und wir wollen auch) von der Anhefte-Abbildung verlangen, daß es sich um eine *stetige* Abbildung handelt. Wir werden später des öfteren die Gelegenheit haben, festzustellen, daß es insbesondere die *Stetigkeit der Anhefte-Abbildungen* ist, die die Nützlichkeit von 'Zellenstrukturen' ausmacht.

Wie schon ausgeführt, definieren wir also X' als den Quotientenraum

$$X' \ = \ X \ \dot{\cup} \ D^n \, / \ _{z\sim f(z)\,,\ \text{für } z\in\partial D^n} \ ;$$

für diese Konstruktion ist auch die Schreibweise

$$X \cup_{\partial D^n} D^n \ := \ X \ \dot{\cup} \ D^n \, / \ _{z\sim f(z)\,,\ \text{für } z\in\partial D^n}$$

gebräuchlich; in Worten: $X \cup_{\partial D^n} D^n$ *ist entstanden aus* X *und* D^n *durch Verkleben entlang* ∂D^n *vermöge* f. Die Notation ist etwas ungenau insofern als in ihr die Abbildung f nicht genannt wird; eine genauere Notation wäre etwa

$$X \, {}_f\!\cup_{\partial D^n} D^n \ \ ,$$

solch genauere Notation werden wir aber nur selten verwenden. Abkürzend sagen wir für den beschriebenen Sachverhalt auch: $X \cup_{\partial D^n} D^n$ entsteht aus X durch *Anheften einer n-Zelle*; und die benutzte Abbildung f heißt die *Anhefte-Abbildung* der Zelle.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, soll noch betont werden, daß weitere Eigenschaften der Anhefte-Abbildung (über die Stetigkeit hinaus) *nicht* verlangt werden. Insbesondere wird z.B. *nicht* verlangt, daß die Anhefte-Abbildung injektiv wäre. Unser erstes Beispiel illustriert das in drastischer Weise.

Beispiel (*Anheften einer n-Zelle an einen Punkt*). Es ist $D^0 \cup_{\partial D^n} D^n \ \approx \ S^n$.

Denn D^0 ist ein einziger Punkt, und $D^0 \cup_{\partial D^n} D^n$ ist deshalb in Wirklichkeit dasselbe wie der Quotientenraum $D^n \, / \, \partial D^n$. Von diesem Quotientenraum wissen wir aber schon, daß er isomorph zu S^n ist. Nämlich nach dem *Quotientenraum-Kriterium* genügt es dafür, zu wissen, daß $D^n \, / \, \partial D^n$ quasi-kompakt ist, S^n ein Hausdorff-Raum, und daß eine stetige bijektive Abbildung $D^n \, / \, \partial D^n \to S^n$ existiert; oder, was auf dasselbe hinausläuft wie letzteres, daß man eine Abbildung $D^n \to S^n$ mit bestimmten Eigenschaften finden kann (nämlich: das Urbild des Nordpols ist ∂D^n , und jeder andere Punkt hat genau einen Urbildpunkt). Es ist klar (oder?), daß das geht. $\square$

Beispiel (*Anheften einer n-Zelle an die* $(n{-}1)$*-Sphäre* — erster spezieller Fall). $S^{n-1} \cup_{\partial D^n} D^n$ ergibt D^n , wenn die Anhefte-Abildung $\partial D^n \to S^{n-1}$ die identische Abbildung ist (oder, allgemeiner, wenn sie ein Isomorphismus ist). $\square$

Beispiel (*Anheften einer n-Zelle an die* $(n{-}1)$*-Sphäre* — zweiter spezieller Fall). Die Anhefte-Abbildung $\partial D^n \to S^{n-1}$ sei eine *triviale* Abbildung; d.h., die Abbildung läßt sich schreiben als eine Komposition $\partial D^n \to D^0 \to S^{n-1}$. Man erhält dann

$$S^{n-1} \cup_{\partial D^n} D^n \ \approx \ S^{n-1} \cup_{D^0} \left(D^0 \cup_{\partial D^n} D^n \right) \ \approx \ S^{n-1} \cup_{D^0} S^n \ \ ,$$

eine sogenannte "1-Punkt-Vereinigung" von S^{n-1} und S^n . $\square$

Die beiden letzten Beispiele illustrieren die plausible Tatsache, daß das Resultat der Konstruktion "*Anheften von* D^n *an* X *vermöge von* $f : \partial D^n \to X$ " i.a. von der Anhefte-Abbildung f in erheblicher Weise wirklich abhängen wird.

Eine technische Variante vom “*Anheften einer n-Zelle*” ist das “*Anheften mehrerer n-Zellen*”. Es ist nützlich, diese Variante explizit zur Kenntnis zu nehmen.

Wenn man nämlich erst eine n-Zelle an einen Raum X anheftet, und dann an den entstehenden Raum X' eine weitere, so ist folgendes Phänomen möglich, das wir andererseits nicht wollen, da es eine überflüssige Komplikation darstellt. Die Anhefte-Abbildung für die zweite n-Zelle ist ja einfach eine Abbildung $f' : \partial D^n \to X'$ (eine *stetige* Abbildung; aber das Wort ‘stetig’ fangen wir jetzt an, wegzulassen). Und nichts hindert die Abbildung f' daran, daß ihr Bild die erste Zelle in nicht-trivialer Weise trifft; genauer, *daß der Bildraum $f'(\partial D^n)$ nicht-leeren Durchschnitt hat mit dem Innern der ersten Zelle*. Das nun ist das Phänomen, das wir nicht wollen. Und wir können es auch ganz leicht vermeiden; wir müssen nur darauf achten, daß die beiden n-Zellen *gleichzeitig* angeheftet werden (und zwar beide an den Raum X). Daß das unerwünschte Phänomen durch unseren einfachen Kunstgriff wirklich vermieden wird, ist nicht ganz selbstverständlich, wir werden uns später davon überzeugen. Im Moment begnügen wir uns damit, das “*gleichzeitige Anheften mehrerer n-Zellen*” zu beschreiben.

Da wir jetzt mehrere Zellen gleichzeitig betrachten wollen, sollten wir, um sie auseinanderzuhalten, ihnen Namen geben und über diese Namen auch Buch führen. Wir machen das hier nicht mit dem Einwohnermeldeamt. Wir benutzen stattdessen eine Menge J (*die Indexmenge für die anzuheftenden n-Zellen*). Die Menge J braucht nicht einmal endlich zu sein (die etwas exotisch aussehende Tatsache, daß wir gelegentlich auch das Anheften von *unendlich vielen* Zellen zulassen wollen, macht praktisch kaum zusätzliche Mühe).

Für die Zwecke der Buchführung ist es bequem, die Menge J in trivialer Weise als topologischen Raum aufzufassen (mit der *diskreten Topologie*) und dann davon den Produktraum mit dem n-Ball D^n zu bilden, $J \times D^n$. Denn dieser Produktraum liefert eine prägnante Beschreibung für den (kanonisch isomorphen) Raum

$$\dot{\bigcup}_{j\in J} \{j\} \times D^n \ ,$$

die *disjunkte Vereinigung* von n-Bällen, indiziert durch die Menge J. Statt der pedantischen (und eigentlich richtigen) Bezeichnung $\{j\} \times D^n$ werden wir im folgenden abkürzend auch die Bezeichnung $j \times D^n$ für den durch j indizierten Ball in dieser disjunkten Vereinigung verwenden.

Ähnlich haben wir auch eine Identifizierung von dem Produktraum $J \times \partial D^n$ mit der disjunkten Vereinigung $\dot{\bigcup}_{j\in J} \{j\} \times \partial D^n$.

Für das “*Anheften von n-Zellen, indiziert durch J*” benötigen wir je eine Anhefte-Abbildung $f_j : \partial D^n \longrightarrow X$ für jedes $j \in J$. Eine solche Kollektion von Abbildungen können wir auch beschreiben als eine *einzige* Abbildung, nämlich eine Abbildung der disjunkten Vereinigung,

$$f : \dot{\bigcup}_{j\in J} \{j\} \times \partial D^n \ \longrightarrow \ X \ .$$

Diese Abbildung ist so, daß die Einschränkung $f \,|\, j \times \partial D^n$ gerade die Abbildung f_j ist (vermöge der Identifizierung von $j \times \partial D^n$ mit ∂D^n). Mit der obigen Übersetzung der disjunkten Vereinigung in den Produktraum (und unter Weiterverwendung des Buchstabens 'f') können wir die Abbildung nun schließlich auch schreiben als

$$f: \ J \times \partial D^n \longrightarrow X \ .$$

(Bei all diesen Abbildungen ist im übrigen die Stetigkeit gemeint, wenn sie auch nicht mehr erwähnt wurde.)

Man bildet nun den Quotientenraum

$$X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n \ = \ X \ \dot{\cup} \ J \times D^n \,/\, _{x \sim f(x)\,, \text{ für } x \in J \times \partial D^n} \ ,$$

und das ist der gewünschte Raum, das Resultat der *Anheftung von n-Zellen an* X, *indiziert durch* J.

Wir listen einfache Eigenschaften der Konstruktion auf. Bezeichne

$$p: \ X \ \dot{\cup} \ J \times D^n \ \longrightarrow \ X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$$

die Projektionsabbildung. Es gilt (nach Definition der Quotientenraumtopologie) folgendes. Sei N Teilmenge von $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$. Dann ist N genau dann offen (bzw. abgeschlossen) in $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$, wenn das Urbild $p^{-1}(N)$ offen (bzw. abgeschlossen) in $X \ \dot{\cup} \ J \times D^n$ ist.

Es werde, wie früher auch schon, eine Untermenge $M \subset X \ \dot{\cup} \ J \times D^n$ als *saturiert* bezeichnet, wenn

$$p^{-1}(\,p(M)\,) \ = \ M \ ;$$

wenn also das Urbild des Bildes nicht größer ist als die Menge selbst. Aus der Definition der Quotiententopologie folgt, speziell: Sei M *saturierte* Teilmenge von $X \ \dot{\cup} \ J \times D^n$. Wenn M offen (bzw. abgeschlossen) in $X \ \dot{\cup} \ J \times D^n$ ist, dann ist auch die Bildmenge $p(M)$ offen (bzw. abgeschlossen) in $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$.

Wir fassen X als Unterraum von $X \ \dot{\cup} \ J \times D^n$ auf. Bezeichne $\mathring{D}^n$ das *Innere* von D^n,

$$\mathring{D}^n \ = \ \{\, x \in \mathbb{R}^n \ | \ \|x\| < 1 \,\} \ .$$

Wir fassen $J \times D^n$ und $J \times \mathring{D}^n$ ebenfalls als Unterräume von $X \ \dot{\cup} \ J \times D^n$ auf.

Satz. X *ist* (topologisch äquivalent zu einem) *Unterraum von* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$; *nämlich die Projektion* p *induziert eine topologische Äquivalenz von* X *auf den Bildraum* $p(X)$ *in* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$. *Dieser Unterraum ist abgeschlossen. Ähnlich ist* $J \times \mathring{D}^n$ (topologisch äquivalent zu einem) *Unterraum von* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$; *nämlich die Projektion* p *induziert eine topologische Äquivalenz von* $J \times \mathring{D}^n$ *auf den Bildraum* $p(J \times \mathring{D}^n)$ *in* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$. *Dieser Unterraum ist offen.*

Beweis. Die Abbildung von X auf den Unterraum $p(X)$ in $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ ist stetig und bijektiv. Wir werden also wissen, daß sie eine topologische Äquivalenz ist, sobald wir uns davon überzeugt haben, daß sie eine *abgeschlossene* Abbildung ist. Sei also A abgeschlossene Teilmenge von X. Wir wollen uns davon überzeugen, daß dann auch das Urbild $p^{-1}(\,p(A)\,)$ abgeschlossen in $X \ \dot{\cup} \ J \times D^n$ ist. Dieses Urbild besteht aus zwei Teilen, nämlich $A \subset X$ einerseits (was zweifellos abgeschlossen im Gesamtraum ist) und

$$f^{-1}(A) \;\subset\; J\times\partial D^n \;\subset\; X \,\dot\cup\, J\times D^n$$

andererseits. Letzterer Teil ist abgeschlossen wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Anhefte-Abbildung f, und da $J\times\partial D^n$ abgeschlossener Unterraum von $J\times D^n$ ist.

Der zweite Teil des Beweises geht ähnlich, aber noch einfacher. Nämlich die Abbildung von $J\times\mathring{D}^n$ auf den Bildraum $p(J\times\mathring{D}^n)$ ist ebenfalls stetig und bijektiv, und es wird genügen zu wissen, daß sie eine *offene* Abbildung ist. Wir wollen uns also davon überzeugen, wenn O offene Teilmenge in $J\times\mathring{D}^n$ ist, dann ist das Bild $p(O)$ offene Teilmenge in $X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$. Das ist aber klar, denn eine offene Teilmenge von $J\times\mathring{D}^n$ ist auch offen in dem Gesamtraum $X \,\dot\cup\, J\times D^n$, und eine offene Teilmenge von $J\times\mathring{D}^n$ ist automatisch auch saturiert. □

Aus ähnlichen Gründen haben wir die folgende Tatsache, die nützlich ist, um offene Mengen zu konstruieren.

SATZ. *Für jedes $j \in J$ sei V_j eine offene Teilmenge in $j\times D^n$, die den Rand $j\times\partial D^n$ enthält. Dann ist*

$$V \;=\; X \cup \textstyle\bigcup_{j\in J} \mathrm{Bild}\,(V_j)$$

offene Teilmenge von $X \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$.

BEWEIS. Die Bedingung $V_j \supset j\times\partial D^n$ garantiert, daß

$$X \;\dot\cup\; \dot{\textstyle\bigcup}_{j\in J}\, V_j$$

saturierte Teilmenge ist. □

BEISPIEL. "*Die Hawaiischen Ohrringe*" ist der Name für einen bestimmten Unterraum des $\mathbb{R}^2$. Der Unterraum ist eine Vereinigung von Kreislinien, die alle den Punkt $(0,0)$ (aber keinen andern Punkt des $\mathbb{R}^2$) gemeinsam haben. Die Kreise werden immer kleiner, und sie häufen sich gegen den Punkt $(0,0)$; kurz, der Unterraum ist

$$H \;=\; H_1 \cup H_2 \cup \;\ldots\;,$$

wo H_j den Kreis mit Radius $1/j$ und Mittelpunkt $\left(0\,,\frac{-1}{j}\right)$ bezeichnet,

$$H_j \;=\; \left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+(\,y+1/j\,)^2 \;=\; (\,1/j\,)^2\,\right\} \;.$$

Wenn man ein Bild malt, so meint man zu sehen, daß der Raum H erhalten werden kann durch Anheften von (unendlich vielen) 1-Zellen an den Unterraum $\{\,(0,0)\,\}$. Der Eindruck ist aber nicht ganz richtig, was die topologische Struktur angeht: *Der Raum H entsteht nicht durch Anheften von 1-Zellen an den Unterraum* $\{\,(0,0)\,\}$. Denn angenommen, das wäre doch der Fall. Nach dem vorigen Satz könnte man dann eine offene Umgebung V des Punktes $(0,0)$ konstruieren, die *keinen* der Kreise H_j ganz enthält. Das kann aber nicht sein: Nach Definition der Topologie von H (Unterraum-Topologie von H in $\mathbb{R}^2$) enthält jede Umgebung von $(0,0)$ den Durchschnitt von H mit einer Kreisumgebung von $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$. Bis auf endlich viele Ausnahmen enthält sie deshalb alle die Kreise H_j ganz. □

Satz. (i) *Ist* X *Hausdorff-Raum, dann auch* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$.

(ii) *Ist* X *kompakt und* J *endlich, dann ist auch* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ *kompakt.*

(iii) *Ist* J *nicht endlich, dann ist* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ *nicht kompakt. Allgemeiner gilt: Ist* K *kompakte Teilmenge von* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ *, dann ist* $K \cap \mathrm{Bild}\,(j \times \mathring{D}^n) \neq \emptyset$ *für höchstens endlich viele* j *.*

Beweis. (i) Seien $x, y \in X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$. Wir wollen disjunkte offene Umgebungen dieser beiden Punkte finden.

1. Fall. $x, y \in J \times \mathring{D}^n$. Dieser Fall ist klar, weil $J \times \mathring{D}^n$ offener Unterraum (s. oben) und selbst ein Hausdorff-Raum ist.

2. Fall. $x \in X,\ y \in j \times \mathring{D}^n$. Wir können eine offene Menge V_j in $j \times D^n$ finden, die den Rand $j \times \partial D^n$, aber nicht den Punkt y enthält, und weiter dann eine offene Menge U_j in $j \times D^n$, die den Punkt y enthält, aber die Menge V_j nicht trifft. Umgebungen der verlangten Art in $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ sind nun gegeben durch die beiden Mengen U_j einerseits und

$$X \,\cup\, V_j \,\cup\, \bigcup_{j' \neq j} j' \times D^n$$

andererseits (die Mengen sind offen nach dem vorigen Satz).

3. Fall. $x, y \in X$. Nach Voraussetzung über X gibt es offene Mengen O_x und O_y , die x und y trennen. Wir benutzen:

Lemma. *Es gibt eine offene Umgebung* V *von* X *in* $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ *, und eine Retraktion* $r : V \to X$ (d.h. $r \circ i = \mathrm{Id}_X$, wobei $i : X \to V$ die Inklusion bezeichnet).

Die verlangten trennenden Mengen im 3. Fall können wir dann erhalten als Urbilder unter der Retraktions-Abbildung, nämlich als die beiden Mengen $r^{-1}(O_x)$ und $r^{-1}(O_y)$.

Beweis des Lemmas. Wir können nehmen

$$V \;=\; X \cup_{J \times \partial D^n} J \times (D^n\text{–Mittelpunkt}) \;.$$

Die verlangte Retraktion ist induziert durch die Retraktion "radiales Hinausschieben"

$$(D^n\text{–Mittelpunkt}) \longrightarrow \partial D^n \;, \qquad x \;\mapsto\; \tfrac{x}{|x|} \;.$$

Letztere Abbildung gibt nämlich eine Abbildung der disjunkten Vereinigungen

$$X \;\dot\cup\; J \times (D^n\text{–Mittelpunkt}) \;\longrightarrow\; X \;\dot\cup\; J \times \partial D^n \;.$$

Diese ist mit der Äquivalenzrelation verträglich, und sie faktorisiert deshalb über eine Abbildung

$$X \cup_{J \times \partial D^n} J \times (D^n\text{–Mittelpunkt}) \;\longrightarrow\; X \cup_{J \times \partial D^n} J \times \partial D^n \;\;\approx\;\; X \;,$$

die die gesuchte Abbildung r ist. $\square$

(ii) Ein Ball ist kompakt, und endlich viele sind es auch. Also ist $J \times D^n$ kompakt, da J endlich ist. Folglich ist $X \ \dot\cup \ J \times D^n$ die disjunkte Vereinigung zweier kompakter Räume und daher auch kompakt. Von diesem Raum ist $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ ein Quotientenraum und daher zumindest quasikompakt — was uns hier reicht, da wir die Hausdorff-Eigenschaft ja schon in (i) geklärt haben.

(iii) Wie wir auch oben schon benutzt haben, so können wir eine offene Menge in D^n finden, die einerseits den ganzen Rand ∂D^n enthält, die andererseits aber einen vorgegebenen Punkt im Innern von D^n *nicht* enthält. Das bedeutet: wenn der Durchschnitt $K \cap p(j \times \overset{\circ}{D}{}^n)$ nicht leer ist, dann können wir eine offene Menge V_j in $j \times D^n$ finden, die einerseits den Rand $j \times \partial D^n$ ganz enthält, die andererseits aber mindestens einen Punkt aus $p^{-1}(K) \cap j \times D^n$ nicht enthält. Wir fixieren ein solches V_j .

Wenn $K \cap p(j \times \overset{\circ}{D}{}^n) = \emptyset$, so sei für V_j irgendeine offene Menge genommen, die den Rand $j \times \partial D^n$ enthält; z.B. $j \times D^n$ selbst.

Die Menge $X \cup \bigcup_{j \in J} p(V_j)$ ist offene Teilmenge in $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$; und die Mengen $p(j \times \overset{\circ}{D}{}^n)$ sind es auch. Diese Mengen zusammen bilden eine offene Überdeckung von $X \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$. Ihre Durchschnitte mit dem Unterraum K geben also eine offene Überdeckung von dem Unterraum.

Nun ist K nach Voraussetzung *kompakt*. Die Überdeckung hat also eine endliche Teilüberdeckung.

Andererseits hat die Überdeckung die folgende Eigenschaft: Wenn $j \in J$ derart ist, daß $K \cap p(j \times \overset{\circ}{D}{}^n) \neq \emptyset$, dann gibt es mindestens einen Punkt aus $p^{-1}(K) \cap j \times D^n$, der *nicht* enthalten ist in der Menge $(X \cup \bigcup_{j \in J} p(V_j))$ — und natürlich auch nicht in einer von den Mengen $p(j' \times \overset{\circ}{D}{}^n)$, $j' \neq j$. Es muß also so sein, daß die Menge $p(j \times \overset{\circ}{D}{}^n)$, für dieses spezielle j , in der Teilüberdeckung wirklich vorkommt.

Da die Teilüberdeckung endlich ist, gibt es deshalb nur endlich viele j von dieser Art. $\square$

Nun zu der wichtigen Definition.

Definition. Sei A ein topologischer Raum. Ein *CW-Komplex, relativ zu* A , besteht aus einem Raum X (dem *Totalraum*) zusammen mit einer Folge von Unterräumen

$$A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots \subset X ,$$

so daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) *Für jedes* $n \geq 0$ *kann der Raum* X_n *aus dem Raum* X_{n-1} *erhalten werden durch das Anheften von Zellen* (in dem oben beschriebenen Sinn), *und zwar von Zellen der Dimension* n .

(ii) Es ist $X = \bigcup_n X_n$, *und die topologische Struktur von* X *ist bereits festgelegt durch die Folge der Unterräume* X_n . Das heißt konkret: *Eine Teilmenge* O *von* X

ist genau dann eine offene Menge von X *, wenn gilt, daß für jedes* n *die Menge* $O \cap X_n$ *eine offene Menge von* X_n *ist.*

Der bei weitem wichtigste Spezialfall ist der, wo $A = \emptyset$, wo, in anderen Worten, der Raum A eigentlich gar nicht da ist. In dem Fall spricht man auch von einem *absoluten CW-Komplex*, oder einfach von einem *CW-Komplex*. Es ist aber gut, den allgemeinen Fall zu haben; er ist z.B. nützlich bei Buchführungstricks in Beweisen.

Die Bedingung (ii) an $X = \bigcup_n X_n$ impliziert:

(ii′) Sei $f\colon X \to Y$ eine nicht notwendigerweise stetige Abbildung. Es sind äquivalent:

- die Abbildung f ist stetig,
- für jedes n ist die eingeschränkte Abbildung $f \mid X_n$ stetig.

Man kann sich, umgekehrt, überlegen, daß die unter (ii) genannte Bedingung auch von der Bedingung (ii′) impliziert wird (der Beweis besteht darin, daß man sich einen ganz bestimmten Raum Y ausdenkt, nämlich gerade das unter (ii) beschriebene X !) .

Die Bedingung (i) sagt insbesondere, daß das Komplement $X_n - X_{n-1}$ eine *disjunkte Vereinigung von offenen* n*-Zellen* ist. Denn, wie wir anläßlich eines Satzes (Stichwort: *Anheften von* n*-Zellen an einen Raum*) zur Kenntnis genommen haben, so ist dieses Komplement ja topologisch äquivalent zu einer disjunkten Vereinigung offener Bälle,

$$J_n \times \mathring{D}^n \;\approx\; \dot{\bigcup}_{j \in J_n} j \times \mathring{D}^n \;,$$

und die einzelnen Zellen kann man charakterisieren als die Zusammenhangskomponenten von $X_n - X_{n-1}$. Das ist aber noch nicht alles. Darüberhinaus nämlich besagt die Bedingung auch — und das ist sehr wichtig — daß für jede einzelne solche Zelle eine Inklusion

$$\mathring{D}^n \;\longrightarrow\; X_n - X_{n-1}$$

so gewählt werden kann (Identifikation von $\mathring{D}^n$ mit der fraglichen offenen Zelle), *daß die Inklusions-Abbildung sich fortsetzen läßt zu einer stetigen Abbildung* $D^n \to X_n$.

Bemerkung. 1.) Diese Inklusionen $\mathring{D}^n \to X_n – X_{n-1}$ sind (für $n \geq 1$) *nicht* eindeutig bestimmt. Ferner gibt es (im allgemeinen) ‘schlechte’ Inklusionen, d.h. solche, die sich überhaupt nicht zu einer stetigen Abbildung $D^n \to X_n$ fortsetzen lassen. Auch ‘gute’ Inklusionen sind (i.a.) nicht eindeutig bestimmt.

2.) Man könnte die Definition eines CW-Komplexes so modifizieren, daß man ganz bestimmte Inklusionen $\mathring{D}^n \to X_n - X_{n-1}$ sowie ihre stetigen Fortsetzungen $D^n \to X_n$ explizit auswählt (letztere Abbildung wird auch als eine *charakteristische Abbildung* der Zelle bezeichnet). Die modifizierte Definition würde darauf hinauslaufen, daß der Begriff CW-Komplex eine vollständige Beschreibung der zugrunde liegenden Konstruktion beinhaltet. Wir gehen bei der hier gewählten Definition (die auch die übliche ist) einen Mittelweg: wir erinnern nur die bei der Konstruktion auftretende Filtrierung (Folge von Unterräumen)

$$A = X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n \subset \;\cdots\; \subset X$$

und die Fakten, daß

– X_n aus X_{n-1} erhalten werden kann durch Anheften von n-Zellen (für jedes n)
– die Struktur von X durch die Folge $X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ bestimmt ist.

Es sind diese Daten, mit denen man arbeitet. Die speziellen Daten der Konstruktion von X_n aus X_{n-1} sind in der Praxis nicht so wichtig. Wichtig ist vor allem, daß X_n überhaupt auf die beschriebene Weise aus X_{n-1} konstruiert werden kann.

Um es noch einmal zu betonen, ein CW-Komplex ist ein topologischer Raum X *zusammen mit* einer Zusatzstruktur (nämlich einer Filtrierung $X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots \subset X$, so daß gewisse Bedingungen erfüllt sind). Es ist daher nicht überraschend, daß ein Raum, wenn er überhaupt eine Struktur als CW-Komplex besitzt, dann i.a. auch gleich ganz viele solcher Strukturen hat.

Wir werden jetzt einige Beispiele betrachten.

Beispiel (*n-Sphäre*). Wir haben schon früher zur Kenntnis genommen, daß

$$D^0 \cup_{\partial D^n} D^n \ \approx \ D^n / \partial D^n \ \approx \ S^n .$$

Die n-Sphäre besitzt also eine Struktur als CW-Komplex mit genau zwei Zellen, nämlich mit je einer 0-Zelle und einer n-Zelle.

Beispiel (1-*Sphäre*). Man nimmt m verschiedene Punkte auf S^1 als 0-Zellen; und die "Stücke dazwischen" als 1-Zellen. Die 1-Sphäre hat also eine Struktur als CW-Komplex mit m 0-Zellen und m 1-Zellen. Für $m \geq 3$ kann man sich den Sachverhalt vielleicht besser mit regelmäßigen Figuren vorstellen: Dreieck, Viereck, Pentagon, ... , m-gon.

Beispiel (2-*Sphäre*). Oben haben wir eine Zellenstruktur (genauer: eine Struktur als CW-Komplex) mit einer 0-Zelle und einer 2-Zelle gesehen.

Für eine andere Zellenstruktur kann man mit der S^1 (dem "Äquator") anfangen (mit, z.B., zwei 0-Zellen und zwei 1-Zellen, wie gerade gesehen); und man setzt dann mit zwei 2-Zellen fort ("nördliche Halbkugel" und "südliche Halbkugel"). Das gibt eine Zellenstruktur mit je zwei Zellen in den Dimensionen 0 , 1 und 2 .

Der *Würfel* (genauer: die Würfeloberfläche) entspricht einer Zellenstruktur der S^2 mit acht 0-Zellen, zwölf 1-Zellen und sechs 2-Zellen.

Das *Tetraeder* entspricht einer Zellenstruktur der S^2 mit vier 0-Zellen, sechs 1-Zellen und vier 2-Zellen.

Bemerkung. Wenn man einen *endlichen CW-Komplex* hat (das heißt, wenn in der Folge $\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset X_0 \ \cdots \ \subset X_n \ \cdots \ \subset X$ bei jedem Schritt nur endlich viele Zellen dazukommen ; und von irgendeinem Zeitpunkt an gar keine mehr — die obigen Beispiele sind alle von diesem Typ), so kann man auf die folgende Weise eine Zahl definieren, die sogenannte *Euler'sche Charakteristik*. Man bildet nämlich die Wechselsumme

$$\#(\text{0-Zellen}) \ - \ \#(\text{1-Zellen}) \ + \ \#(\text{2-Zellen}) \ - \ \#(\text{3-Zellen}) \ + \ - \ \ldots$$

wo $\#(n\text{-Zellen})$ die *Anzahl der n-Zellen* (oder, was dasselbe ist, die Anzahl der (Weg-)Zusammenhangskomponenten von $X_n - X_{n-1}$) bezeichnet.

Euler hat experimentell festgestellt, daß im Falle von $X = S^2$ hier immer die Zahl '2' herauskommt. Natürlich geht es eigentlich nicht, daß man 'experimentell' irgendetwas feststellt über eine so große Menge wie die der endlichen Zellenkomplexe mit Totalraum S^2. Euler hat auch gar nicht Zellenkomplexe in unserem Sinne betrachtet, sondern eher spezielle ('Polyeder'), aber selbst da ist nicht so klar, welche genau das waren. Jedenfalls wurde der *Euler'sche Polyeder-Satz* sehr berühmt und hatte in der Folge auch eine turbulente Geschichte.

Eine—wohl etwas persiflierte—Darstellung dieser Geschichte kann man in dem Buch eines Logikers finden (I. Lakatoś, *Proofs and Refutations*; Beweise und Widerlegungen). Da ist die Rede von Beweisen in Spezialfällen, dann Gegenbeispielen von speziellen dieser Spezialfälle; danach Widerlegungen von einigen dieser Gegenbeispiele, danach ... . Das Buch nimmt den Euler'schen Polyeder-Satz (und speziell diese Geschichte) als exemplarisch für die Mathematik überhaupt, es hat eine Art Moral (so etwas wie die intellektuelle Erbsünde). Man kann die ganze Sache aber vielleicht auch ein wenig tiefer hängen: Wenn eine Sprache erst im Entstehen ist, so ist bei denen, die mit dieser Sprache umgehen müssen, und die sie gleichzeitig auch noch zu entwickeln haben, die Fehlerwahrscheinlichkeit eben ein bißchen größer. Software-Entwickler z.B. sehen das gelassen; sie wissen, daß es ohne 'de-bugging' nicht geht, und sie planen dafür eigens einen Arbeitsgang von vornherein ein. □

Inoffizielle Mitteilung. Den Euler'schen Polyeder-Satz werden wir im Laufe dieser Veranstaltung beweisen. Dies wird eine der Anwendungen sein, die wir mit den sogenannten *Homologiegruppen* machen werden. □

Wir werden jetzt einige Dinge über CW-Komplexe systematisch auflisten. Im Hinblick auf eventuelle Buchführungstricks betrachten wir für solche technischen Dinge grundsätzlich den Fall eines *relativen CW-Komplexes*, auch wenn wir letztlich eigentlich eher an dem absoluten Fall interessiert sein werden.

Sei also (X, A) ein relativer CW-Komplex (oder, genauer: X ist mit einer Filtrierung $A = X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots \subset X$ versehen, etc.); er heißt *endlich*, wenn insgesamt nur endlich viele Zellen angeheftet werden. D.h. erstens, es gibt ein m, so daß $X_m = X$ (X ist also insbesondere das, was man *endlich-dimensional* nennt), und zweitens ist es so, daß für jedes n der Raum X_n aus dem Raum X_{n-1} entsteht durch das Anheften von nur endlich vielen Zellen.

Satz. *Sei (X, A) relativer CW-Komplex.*

(i) *Ist A Hausdorff-Raum, so auch X.*

(ii) *Ist A kompakt und (X, A) endlich, so ist auch X kompakt.*

Beweis. Induktion über einen früheren Satz (über das Anheften von n-Zellen) liefert die Behauptung (ii) und einen Teil der Behauptung (i), nämlich daß X_n Hausdorff ist für alle n. Daß dann auch X Hausdorff ist, folgt aus:

Behauptung. *Seien* O_n *und* P_n *disjunkte offene Mengen in* X_n . *Dann existieren disjunkte offene Mengen* O *und* P *in* X *mit* $O \cap X_n = O_n$, $P \cap X_n = P_n$.

Beweis. Wir hatten gezeigt, es gibt eine offene Teilmenge V_{n+1} in X_{n+1} und eine Retraktion $r_{n+1} \colon V_{n+1} \to X_n$. Wir definieren

$$O_{n+1} \ = \ r_{n+1}^{-1}\,(O_n) \ , \quad P_{n+1} = r_{n+1}^{-1}\,(P_n) \ \ .$$

Entsprechend werden auch O_{n+2} , P_{n+2} , O_{n+3} , P_{n+3} ... definiert, und dann

$$O \ = \ \bigcup\nolimits_j \ O_{n+j} \ \ , \quad P \ = \ \bigcup\nolimits_j \ P_{n+j} \ \ .$$

Es ist $O \cap P = \emptyset$, da $O_{n+j} \cap P_{n+j} = \emptyset$ für alle j . Die Menge O ist offen in X , da der Durchschnitt $O \cap X_m = O_m$ offen in X_m ist für alle m — dies ist so wegen der Bedingung in der Definition von CW-Komplexen, daß die topologische Struktur des Raumes X schon bestimmt sein soll durch die topologische Struktur der Unterräume $A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots$. Entsprechend ist auch die Menge P offen in X . □

Die Hausdorff-Eigenschaft sei hinfort vorausgesetzt.

Satz. *Sei* (X, A) *relativer CW-Komplex.*

(i) *Der Abschluß jeder Zelle ist kompakt.*

(ii) *Sei* $U \subset X$ *Unterraum,* $U \supset A$. *Dann ist* U *abgeschlossen in* X *schon dann, wenn der Durchschnitt von* U *mit dem Abschluß jeder Zelle abgeschlossen ist.*

Beweis. (i) Zu einer n-Zelle gibt es, nach Definition, eine charakteristische Abbildung $D^n \to X$, so daß die Einschränkung $\mathring{D}^n \to X$ ein Isomorphismus auf die vorgegebene offene Zelle ist. Der Abschluß von $\mathring{D}^n$ ist ganz D^n , folglich ist $\mathrm{Bild}(D^n)$ enthalten im Abschluß der Zelle. Andererseits ist $\mathrm{Bild}(D^n)$ (quasi-)kompakt (weil D^n kompakt), daher (kompakt und) abgeschlossen (wegen der vorausgesetzten Hausdorff-Eigenschaft) und folglich auch gleich diesem Abschluß.

(ii) Ist U abgeschlossen, so auch sein Durchschnitt mit einer abgeschlossenen Teilmenge; z.B. dem Abschluß irgendeiner Zelle. Es gelte umgekehrt, daß für jede Zelle der Durchschnitt von U mit dem Abschluß dieser Zelle abgeschlossen ist. Zu zeigen (nach Definition der Topologie von X) , daß $U \cap X_n$ abgeschlossen in X_n , für alle n . Dies gilt nach Voraussetzung (und weil A abgeschlossener Unterraum ist) für $n = -1$. Es gelte induktiv für $n{-}1$. Sei p die Projektion,

$$p : \ X_{n-1} \ \dot\cup \ \dot{\bigcup}_{j \in J} \ j \times D^n \ \longrightarrow \ X_{n-1} \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$$

(wobei wir die Indexmenge für die n-Zellen mit J statt mit J_n bezeichnet haben). Es folgt aus der Voraussetzung betreffend den Durchschnitt mit dem Abschluß von Zellen, daß das Urbild $p^{-1}(U \cap X_n)$ abgeschlossen ist. Denn was den Anteil in X_{n-1} angeht, so ist das die Induktionsvoraussetzung. Und was den Anteil in dem Ball $j{\times}D^n$ angeht, so folgt das aus der Voraussetzung, daß der Durchschnitt mit dem Abschluß einer Zelle, nämlich mit dem Bild $p(j \times D^n)$, abgeschlossen ist. Aus der Abgeschlossenheit von

$p^{-1}(U \cap X_n)$ folgt die von $U \cap X_n$, da ja X_n die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung p trägt. $\square$

Sei (X,A) wieder ein relativer CW-Komplex. Ein anderer relativer CW-Komplex (Y,A) (das A ist in beiden Fällen dasselbe) heißt *Unterkomplex* von (X,A) , wenn erstens Y ein Unterraum von X ist und wenn zweitens gilt, daß die Zellenstruktur des Raumes Y durch die Zellenstruktur des Raumes X induziert ist. Letzteres heißt, daß für jedes $n \geq 0$ zum einen gilt

$$Y_n \ = \ Y \cap X_n$$

und zum andern auch,

$$Y_n - Y_{n-1} \ \text{ ist Vereinigung von offenen Zellen aus } \ X_n - X_{n-1} \ .$$

Bemerkung. Die letzte dieser Bedingungen ist tatsächlich überflüssig, insofern, als sie sich aus den anderen Bedingungen folgern läßt — das ist aber nicht einfach.

Satz. *Wenn (Y,A) Unterkomplex von (X,A) ist, dann ist Y abgeschlossen in X .*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $Y \cap X_n$ abgeschlossen in X_n ist, für alle n . Wir nehmen induktiv an, daß $Y \cap X_{n-1}$ abgeschlossen in X_{n-1} ist. Dann ist $Y \cap X_{n-1}$ auch abgeschlossen in X_n , da X_{n-1} abgeschlossen in X_n ist. Bezeichne wieder p die Quotientenraumprojektion, $p: \ X_{n-1} \,\dot{\cup}\, \dot{\bigcup}_{j \in J}\, j \times D^n \ \to \ X_{n-1} \cup_{J \times \partial D^n} J \times D^n$ (wo auch wieder die Indexmenge für die n-Zellen mit J statt mit J_n bezeichnet wird). Es ist

$$Y \cap X_n \ = \ Y \cap X_{n-1} \,\cup\, \bigcup\nolimits_{j \in J} \ Y \cap p(j \times \mathring{D}^n) \quad ,$$

und sobald der Durchschnitt $Y \cap p(j \times \mathring{D}^n)$ nicht-leer ist, muß notwendigerweise die Zelle $p(j \times \mathring{D}^n)$ von (X,A) auch eine Zelle von (Y,A) sein. Folglich[1] ist ihr Abschluß, der gleich dem Bild $p(j \times D^n)$ ist, auch enthalten in Y . Es folgt, daß, abgesehen von $Y \cap X_{n-1}$, das Urbild $p^{-1}(Y \cap X_n)$ durch die Vereinigung der beiden Teile

$$\dot{\bigcup}_{j \in J\,,\, Y \cap p(j \times \mathring{D}^n) \neq \emptyset} j \times D^n \qquad \text{und} \qquad \bigcup\nolimits_{j \in J} \ j \times D^n \cap p^{-1}(Y \cap X_{n-1})$$

gegeben ist. Diese sind abgeschlossen. Also ist auch $p^{-1}(Y \cap X_n)$ abgeschlossen in $X_{n-1} \,\dot{\cup}\, \dot{\bigcup}_{j \in J} j \times D^n$, wie zu zeigen war. $\square$

---

[1]Hier sind Details für diese Behauptung. Y ist selbst CW-Komplex, deshalb läßt die Inklusion der offenen Zelle sich fortsetzen zu einer stetigen Abbildung $q: j \times D^n \to Y$. Zwar hat die Abbildung q nicht notwendigerweise irgendetwas mit der Einschränkung der obigen Abbildung p zu tun; das ist aber auch nicht nötig. Alles was wir brauchen, ist, daß das Bild von q quasi-kompakt ist. Aus der Quasi-Kompaktheit (zusammen mit der schon etablierten Hausdorff-Eigenschaft) ergibt sich, daß das Bild von q ein abgeschlossener Unterraum von X ist, der in Y liegt und der das Bild der offenen Zelle unter der Abbildung p enthält. Er enthält also auch davon den Abschluß, $p(j \times D^n)$.

Satz. *Sei (X, A) CW-Komplex, sei Y abgeschlossener Unterraum von X, mit $A \subset Y$. Es gelte, daß für jedes n der Durchschnitt $Y \cap (X_n - X_{n-1})$ eine Vereinigung von offenen n-Zellen ist. Dann ist*

$$A = Y_{-1} \subset Y_0 \subset \ldots \subset Y_n \subset \ldots \subset Y$$

ein CW-Komplex, wo $Y_n = Y \cap X_n$.

Beweis. (i) Wir prüfen nach, daß Y_n aus Y_{n-1} durch Anheften von n-Zellen entsteht. Bezeichne J die Indexmenge für die n-Zellen von X und J' die Teil–Index–Menge derjenigen n-Zellen, deren Inneres in Y liegt. Die charakteristischen Abbildungen $D^n \to X$ für letztere Zellen (wir nehmen an, charakteristische Abbildungen für Zellen waren in X gewählt) können auch als Abbildungen $D^n \to Y$ aufgefaßt werden, da Y *abgeschlossen in* X ist. Per Einschränkung dieser Abbildungen auf den Rand ∂D^n erhalten wir (Anhefte-)Abbildungen $\partial D^n \longrightarrow Y \cap X_{n-1} = Y_{n-1}$ zur Konstruktion von

$$\widetilde{Y}_n \;=\; Y_{n-1} \cup_{J' \times \partial D^n} J' \times D^n \;.$$

Mit Hilfe der Abbildungen $D^n \to Y$ bekommen wir eine stetige bijektive Abbildung $\widetilde{Y}_n \to Y_n$. Dafür, daß dies eine topologische Äquivalenz ist, müssen wir noch nachprüfen, daß es sich hier um eine *abgeschlossene Abbildung* handelt: Sei $\widetilde{B} \subset \widetilde{Y}_n$ eine Teilmenge (z.B. eine abgeschlossene). Bezeichne B das Bild davon in Y. Es sei B' das Urbild von B in $X_{n-1} \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup}_{j \in J} j \times D^n$; und entsprechend $\widetilde{B}'$ das Urbild von $\widetilde{B}$ in $Y_{n-1} \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup}_{j \in J'} j \times D^n \;=\; Y \cap X_{n-1} \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup}_{j \in J'} j \times D^n$. Die Frage ist, ob die Abgeschlossenheit von $\widetilde{B}'$ diejenige von B' impliziert. Das ist der Fall. Denn diese beiden unterscheiden sich nur dadurch, daß zu $\widetilde{B}'$ in B' der Teil $q^{-1}(B \cap X_{n-1})$ hinzukommt, wo q die (Anhefte-) Abbildung $q\colon (J - J') \times \partial D^n \to X_{n-1}$ bezeichnet. Als Anhefte-Abbildung ist q stetig. Und $B \cap X_{n-1}$ ist abgeschlossen, da es in $\widetilde{B}'$ vorkommt.

(ii) Sei M Teilmenge von Y. Dann ist M abgeschlossen in Y genau dann, wenn M abgeschlossen in X ist (da Y abgeschlossen in X ist). Nach Definition der Topologie von X ist dies äquivalent dazu, daß $M \cap X_n$ abgeschlossen in X_n ist für alle n. Unter nochmaliger Benutzung der Abgeschlossenheit von Y schließt man dann, daß dieses gleichbedeutend damit ist, daß $M \cap X_n \cap Y$ abgeschlossen in $X_n \cap Y = Y_n$ ist für alle n. □

Satz. *Sei (X, A) CW-Komplex.*

(i) *Der Abschluß jeder Zelle liegt in einem endlichen Unterkomplex.*

(ii) *Jedes Kompaktum $K \subset X$ liegt in einem endlichen Unterkomplex.*

Beweis. Wir zeigen zunächst

Hilfssatz 1. *Sei K kompakt. Es gelte, $K \subset X_n$, für ein $n \geq -1$. Dann liegt K in einem endlichen Unterkomplex.*

Beweis. (*durch Induktion über n*). Der Induktionsanfang $n = -1$ ist trivial. Die Behauptung gelte induktiv für $n{-}1$. Wir haben früher gesehen, daß das Kompaktum K nur *endlich viele* der offenen n-Zellen in $X_n{-}X_{n-1}$ trifft; diese seien indiziert durch

$j \in J'$. Wegen der Endlichkeit von J' ist $\bigcup_{j\in J'} \mathrm{Bild}(j\times D^n)$ kompakt. Da X_{n-1} abgeschlossen in X_n ist, folgt, daß der Durchschnitt

$$X_{n-1} \cap \big(K \cup \bigcup_{j\in J'} \mathrm{Bild}(j\times D^n) \big)$$

ebenfalls kompakt ist; also, nach der Induktionsvoraussetzung, enthalten ist in einem endlichen Unterkomplex (Y, A) . Der gewünschte endliche Unterkomplex ist nun gegeben durch

$$Y \cup_{J'\times\partial D^n} J'\times D^n \ . \qquad \square$$

Zum Satz: Wir haben früher gesehen, daß der Abschluß einer n-Zelle kompakt ist und in X_n liegt. Nach dem Hilfssatz liegt er daher in einem endlichen Unterkomplex; Teil (i) des Satzes ist damit gezeigt. — Wir benötigen einen weiteren Hilfssatz.

Hilfssatz 2. *Sei $D \subset (X - A)$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft, daß D jede Zelle von X nur in endlich vielen Punkten trifft. Dann gilt*

a) *D ist abgeschlossene Teilmenge von X*

b) *Als Unterraum von X trägt D die diskrete Topologie.*

Beweis. (a) Nach einem früher gegebenen Kriterium genügt es zu zeigen, daß

$$D \cap \textit{Abschluß einer Zelle}$$

abgeschlossen ist für jede Zelle. Nach Teil (i) des Satzes (den wir schon gezeigt haben) ist dies enthalten in

$$D \cap \textit{endlicher Unterkomplex}\ ,$$

also eine endliche Menge (nach Definition von D) und damit *abgeschlossen* in X , da X Hausdorff-Raum ist.

(b) Zu zeigen ist, daß jede Teilmenge $D' \subset D$ abgeschlossen in D ist. Dafür genügt es zu zeigen, daß D' abgeschlossen in X ist. Aber letzteres gilt nach Anwendung von (a) auf die Teilmenge $D' \subset X$. $\square$

Beweis des Satzes (Fortsetzung). Es ist noch zu zeigen, zu $K \subset X$ kompakt existiert ein n , so daß $K \subset X_n$. Angenommen, dies wäre falsch. Dann gäbe es eine unendliche Menge $D \subset K$

$$D \ = \ \{ \ x_1 \ , \ x_2 \ , \ \dots \ \}$$

mit $x_i \in X_{n_i} - X_{n_{i-1}}$, $n_i > n_{i-1}$. Nach Hilfssatz 2 wäre D abgeschlossen in X , daher auch in K und somit kompakt in der von K induzierten Topologie. Die von K induzierte Topologie ist aber dieselbe, wie die von X induzierte Topologie, da ja K Unterraum von X ist (Unterraumtopologie!). Folglich trägt die Menge D die *diskrete* Topologie. Das ist aber ein Widerspruch, da eine unendliche Menge mit der diskreten Topologie ganz sicherlich nicht kompakt ist. $\square$

Bemerkung. Die Terminologie CW-Komplex (wie auch der Begriff selbst) stammen von J.H.C. Whitehead. Der Buchstabe C steht (laut Whitehead) für *closure finite* (der vorige Satz) und W steht für *weak topology* (eine Menge $M \subset X$ ist genau dann offen, wenn $M \cap X_n$ offen für alle n) .

Zellulärer Approximations-Satz

Seien (X, A) und (Y, B) CW-Komplexe, und sei $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von CW-Komplexen. D.h., $f : X \to Y$ ist stetige Abbildung mit $f(A) \subset B$.

Definition. Die Abbildung heißt *zelluläre Abbildung*, wenn sie die zelluläre Struktur respektiert in dem Sinne, daß

$$f(X_n) \subset Y_n \ , \quad \text{für alle } n \ .$$

Satz. (Zellulärer Approximations-Satz). *Sei $f_0 : (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von CW-Komplexen. Es existiert eine Homotopie, relativ zu dem Unterraum A, von der Abbildung f_0 zu einer zellulären Abbildung f_1 .*

Hierbei bezeichnet eine *Homotopie, relativ zu A*, eine Homotopie, die *auf dem Unterraum A konstant* ist; das heißt, eine Abbildung

$$F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

die erstens eine Homotopie von f_0 zu f_1 ist, d.h.,

$$F \,|\, X \times 0 = f_0 \ , \quad F \,|\, X \times 1 = f_1 \ ;$$

und die zweitens auf dem Unterraum A nichts tut (“konstant ist”)

$$F \,|\, A \times t = f_0 \,|\, A \quad \text{für alle } t \ .$$

Bemerkung. Die Terminologie “Approximations-Satz” soll hier nur suggerieren “hinreichend genau ersetzen” (nämlich ersetzen bis auf Homotopie) durch eine ‘bessere’ (nämlich durch eine zelluläre) Abbildung. Die Terminologie hat dagegen nichts zu tun mit Approximation etwa im Sinne einer Metrik.

Der Satz ist ziemlich inhaltsreich, wie der folgende spezielle Fall zeigt.

Beispiel. Sei $A = \{x_0\}$ (ein Punkt) und $X = \{x_0\} \cup_{\partial D^m} D^m$ (die m-Sphäre) , wobei (X, A) als CW-Komplex aufgefaßt wird durch die Festsetzung

$$X_i = \begin{cases} \{x_0\} & \text{wenn } i < m \ , \\ X & \text{wenn } i \geq m \ . \end{cases}$$

Sei entsprechend $B = \{y_0\}$, $Y = \{y_0\} \cup_{\partial D^n} D^n$, und sei (Y, B) in ähnlicher Weise als CW-Komplex aufgefaßt.

Wenn $m < n$ ist, dann kann eine zelluläre Abbildung $(X, A) \to (Y, B)$ offenbar nichts anderes sein als die triviale Abbildung in den Punkt y_0. Der zelluläre Approximations-Satz sagt also in diesem Falle:

Korollar. *Wenn $m < n$, dann ist jede Abbildung*

$$(S^m, x_0) \longrightarrow (S^n, y_0)$$

homotop, relativ zum Punkt x_0, zur trivialen Abbildung in den Punkt y_0. $\square$

Bemerkung. Wir werden das Korollar später interpretieren als das "Verschwinden der m-ten Homotopiegruppe der S^n, für $m < n$" — was immer das sein mag.

Der Hauptteil des Beweises des zellulären Approximations-Satzes besteht tatsächlich darin, daß wir eine leichte Verallgemeinerung des im Korollar genannten speziellen Falles vorweg behandeln.

Satz. *Sei $X = A \cup_{\partial D^m} D^m$, $Y = B \cup_{\partial D^n} D^n$, wo $m < n$. Sei $f : (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung. Die Abbildung f ist homotop, relativ zu A, zu einer Abbildung mit Bild in B.*

Beweis. Der Satz ist äquivalent zu der Behauptung, daß für $Y = B \cup_{\partial D^n} D^n$, und $m < n$, gilt: Jede Abbildung $g : (D^m, \partial D^m) \to (Y, B)$ ist homotop, relativ zu ∂D^m, zu einer Abbildung mit Bild in B. Denn zunächst ist dies ein spezieller Fall. Umgekehrt, ist $f : (A \cup_{\partial D^m} D^m, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung, dann induziert eine Deformation (relativ zu ∂D^m) von der zusammengesetzten Abbildung g,

$$D^m \xrightarrow{\text{char. Abb.}} A \cup_{\partial D^m} D^m \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

ganz automatisch eine Deformation von f relativ zu A — zumindest ist es plausibel, daß das so ist; tatsächlich ist hier noch ein technisches Detail zu klären (Stichwort: *Kompatibilität von Produkten mit Quotientenraum-Konstruktionen*; der Homotopiebegriff benutzt ja Produktbildung). Wir werden das in Kürze nachholen.

Der Beweis der Behauptung geht über Induktion nach n. Als Induktions-Anfang nehmen wir den Fall $n = 1$. Dann ist $m = 0$, $\partial D^0 = \emptyset$, und die Behauptung ist, daß jede Abbildung $f : D^0 \to B \cup_{\partial D^1} D^1$ homotop ist zu einer Abbildung mit Bild in B. Das ist sicherlich richtig: Ein Weg in $B \cup_{\partial D^1} D^1$ mit Anfangspunkt $f(D^0)$ und mit Endpunkt in $\mathrm{Bild}(\partial D^1)$ liefert die verlangte Homotopie.

Sei jetzt $n \geq 2$. Wir setzen induktiv voraus, daß der Satz für $n{-}1$ bereits bewiesen ist. Wir leiten einige Folgerungen hieraus ab, die wir benötigen werden.

Folgerung 1. *Für $p < n{-}1$ ist jede Abbildung $h : S^p \to S^{n-1}$ deformierbar in eine triviale Abbildung.*

Das wurde im vorigen Korollar schon angemerkt: Wir schreiben $S^p = \{x_0\} \cup_{\partial D^p} D^p$ und $S^{n-1} = \{y_0\} \cup_{\partial D^{n-1}} D^{n-1}$, wo $y_0 = h(x_0)$, und wenden dann die Induktionsvoraussetzung an.

Folgerung 2. *Für* $p < n-1$ *ist jede Abbildung* $h\colon S^p \to S^{n-1} \times (a,b)$ *deformierbar in eine triviale Abbildung* (*wo* (a,b) *ein Intervall bezeichnet*).

Das folgt durch Zusammenbauen zweier Homotopien, nämlich Homotopien für die beiden Abbildungen

$$\mathrm{pr}_1 \circ h : \ S^p \longrightarrow S^{n-1} \ , \quad \mathrm{pr}_2 \circ h : \ S^p \longrightarrow (a,b)$$

(wo pr_i die i–te Projektion bezeichnet). Erstere Homotopie ist die aus Folgerung 1, letztere ist induziert von einer Null-Homotopie der identischen Abbildung auf (a,b) .

Folgerung 3. *Für* $q < n$ *gilt: Jede Abbildung* $h : \partial D^q \longrightarrow S^{n-1} \times (a,b)$ *kann erweitert werden zu einer auf ganz* D^q *definierten Abbildung.*

Das folgt aus Folgerung 2 wegen

Lemma. *Sei* Z *topologischer Raum,* $h : \partial D^q \to Z$ *eine Abbildung. Es sind äquivalent:*

(i) h *ist homotop zu einer trivialen Abbildung,*

(ii) h *kann auf* D^q *erweitert werden.*

Beweis. Die erste Aussage besagt, es gibt eine Abbildung $H\colon \partial D^q \times [0,1] \to Z$ mit

$$H \,|\, \partial D^q \times 1 \;=\; h \ , \quad H \,|\, \partial D^q \times 0 \;=\; \text{triviale Abbildung} \ .$$

Dies ist äquivalent dazu, daß sich h ($= H \,|\, \partial D^q \times 1$) fortsetzen läßt zu einer Abbildung des Quotientenraumes

$$\partial D^q \times [0,1] \ / \ \partial D^q \times 0 \quad \longrightarrow \quad Z \ .$$

Schließlich ist der Quotientenraum $\partial D^q \times [0,1] \,/\, \partial D^q \times 0$ topologisch äquivalent zu D^q (man kann sich die Punkte aus D^q , bis auf den Mittelpunkt, vorstellen als durch *verallgemeinerte Polarkoordinaten* dargestellt, d.h. einem solchen Punkt entspricht ein Paar (x,t) mit $x \in \partial D^q$ und $t \in [0,1]$; dem Mittelpunkt dagegen entspricht der Wert $t = 0$, und x ist unbestimmt). □

Wir kommen jetzt zum Beweis des Satzes für den Fall der Dimension n . Die Hauptarbeit besteht darin, sicherzustellen, daß *mindestens ein Punkt von*

$$\mathring{D}^n \ \subset \ B \cup_{\partial D^n} D^n$$

von der Abbildung g *nicht mehr getroffen wird.* Bei unserer Konstruktion wird das der Mittelpunkt sein — wenn das natürlich letztlich auch irrelevant ist.

Das Argument beruht auf einer Anwendung des Lebesgue'schen Überdeckungs-Satzes. Dazu verschaffen wir uns eine offene Überdeckung von $B \cup_{\partial D^n} D^n$, um damit zu arbeiten. Das Ziel ist es, wie gesagt, eine Umgebung des Mittelpunktes von dem Bild der Abbildung g 'freizuschaufeln'. Deshalb wird eine der offenen Mengen in unserem Werkzeugkasten (die Menge U unten) eine offene Umgebung eben dieses Mittelpunktes sein, und die andere offene Menge (die Menge V unten) wird für den Rest des Raumes zuständig sein.

Für die genauere Beschreibung dieser Mengen seien U' und V' definiert als

$$U' \;=\; \{\, x \in D^n \mid \; \|x\| < \tfrac{2}{3} \,\} \qquad \text{und} \qquad V' \;=\; \{\, x \in D^n \mid \; \|x\| > \tfrac{1}{3} \,\}$$

und U und V in $B \cup_{\partial D^n} D^n$ als

$$U \;=\; \mathrm{Bild}(U') \;\; , \quad V \;=\; B \cup \mathrm{Bild}(V') \;\; .$$

U und V sind dann offene Mengen in $B \cup_{\partial D^n} D^n$, und ihre Vereinigungsmenge ist der ganze Raum; sie bilden also eine offene Überdeckung. Ihr Durchschnitt ist

$$U \cap V \;\approx\; U' \cap V' \;\approx\; S^{n-1} \times (\tfrac{1}{3}\, ,\, \tfrac{2}{3}) \; .$$

Nach der obigen Folgerung 3 aus der Induktionsvoraussetzung gilt deshalb:

TATSACHE. *Für $q < n$ besitzt jede Abbildung $\partial D^q \to U \cap V$ eine Fortsetzung auf ganz D^q .*

Für die Zwecke einer bequemeren Beschreibung dessen, was nun kommt, wollen wir, durch die Wahl einer topologischen Äquivalenz, den m-dimensionalen Ball D^m mit dem m-dimensionalen Würfel identifizieren. Statt von D^m werden wir also von jetzt an von

$$[0,1]^m \;\;=\;\; \underbrace{[0,1] \times \;\ldots\; \times [0,1]}_{\longleftarrow\; m \;\longrightarrow}$$

reden. Der Einfachheit halber behalten wir die Bezeichnung ‘ g ’ für die vorgegebene Abbildung, wir bezeichnen diese Abbildung also jetzt als $g:\; [0,1]^m \to B \cup_{\partial D^n} D^n$.

Wir wenden den Lebesgue’schen Überdeckungssatz an auf die offene Überdeckung $\big\{ g^{-1}(U),\; g^{-1}(V) \big\}$ von $[0,1]^m$. Wir schließen: Es gibt eine Unterteilung von $[0,1]^m$ in m-dimensionale Würfel gleicher Größe, so daß für jeden der m-dimensionalen Teilwürfel gilt: Das Bild dieses Teilwürfels unter der Abbildung g ist entweder ganz enthalten in U oder ganz enthalten in V (oder, natürlich, eventuell auch in beiden).

Wir müssen nicht nur die Würfel der Dimension m betrachten, sondern, für induktive Zwecke, auch solche von kleinerer Dimension. Der Rand eines Würfels besteht ja aus Würfeln kleinerer Dimension — z.B. besteht der Rand eines 2-Würfels (Quadrat) aus 0-Würfeln (Ecken) und 1-Würfeln (Kanten). Gegenstand unserer Betrachtung werden alle die Würfel sein, die in der angesprochenen Weise mit der Zerlegung von $[0,1]^m$ in Teilwürfel daherkommen: Ecken, Kanten, Quadrate, 3-Würfel, etc..

Für die anstehende Konstruktion zerlegen wir die Menge der Würfel der Dimension p (wobei $p = 0, 1, 2, \ldots, m$) in zwei Klassen, die *guten* und die *schlechten*. Die guten, das sind die, wo wir nichts mehr tun müssen, und die schlechten, das sind eben die anderen. Den genannten Namen entsprechend, wird die erste Teilmenge mit Γ^p bezeichnet; und die zweite mit Σ^p .

Sei W ein p-dimensionaler Würfel. Wir sagen, $W \in \Gamma^p$ (Menge der ‘guten’ Würfel), wenn $W \subset g^{-1}(V)$. Und wir sagen, $W \in \Sigma^p$ (Menge der ‘schlechten’ Würfel), wenn W *nicht ganz* in $g^{-1}(V)$ enthalten ist. Σ^p ist also das Komplement von Γ^p .

Wenn $W \in \Sigma^p$, dann ist notwendigerweise $W \subset g^{-1}(U)$, weil ja W ganz in einem der m-dimensionalen Teilwürfel enthalten ist; und jeder von denen wiederum ganz in $g^{-1}(U)$ oder ganz in $g^{-1}(V)$, nach der Konstruktion über den Lebesgue'schen Satz.

Es sei nun Γ definiert als

$$\Gamma \;=\; \bigcup\nolimits_p \;\; (\,\text{Vereinigung der Würfel in } \Gamma^p\,)$$

(der 'gute' Unterraum aller der Teilwürfel der Dimensionen $0, 1, \ldots, m$, die schon ganz nach V abgebildet werden). Nach Voraussetzung über die Abbildung g ist der Rand von $[0,1]^m$ ganz enthalten in Γ .

Durch Induktion über die Dimension p werden wir die Abbildung g auf den 'schlechten' Würfeln nun abändern. Die Konstruktion beruht auf der folgenden Beobachtung.

Es sei W ein 'schlechter' Würfel mit der Eigenschaft, daß die Würfel im Rand von W 'gut' sind. Z.B. ein schlechter Würfel von kleinster Dimension (kleinste Dimension unter den schlechten Würfeln) hat notwendigerweise diese Eigenschaft. Weil nun W ein schlechter Würfel ist, so ist W enthalten in $g^{-1}(U)$. Andererseits sind die Würfel im Rand von W 'gut' und deshalb enthalten in $g^{-1}(V)$. Es folgt, daß die Würfel im Rand von W enthalten sind im Durchschnitt dieser beiden. D.h., die Würfel im Rand von W werden durch die Abbildung g abgebildet in den Durchschnitt $U \cap V$; oder, was dasselbe ist, der ganze Rand des Würfels W wird durch g nach $U \cap V$ abgebildet. Nach der früher festgestellten Folgerung aus der Induktionsvoraussetzung (Folgerung 3 oben) existiert deshalb eine Abbildung (eine 'bessere' Abbildung für unsere Zwecke)

$$W \longrightarrow U \cap V \;\; ,$$

die mit der Abbildung g auf dem Rand ∂W übereinstimmt.

Dieses wollen wir nun systematisieren. Es sei $K^{-1} = \Gamma$ ($=$ Unterraum der 'guten' Würfel). Wir definieren induktiv

$$\begin{aligned}
K^0 &= K^{-1} \cup \text{ 0-Würfel aus } \Sigma^0 \\
&\;\;\vdots \\
K^p &= K^{p-1} \cup \; p\text{-Würfel aus } \Sigma^p \\
&\;\;\vdots \\
K^m &= K^{m-1} \cup \; m\text{-Würfel aus } \Sigma^m
\end{aligned}$$

so daß also K^m der ganze Würfel $[0,1]^m$ ist.

Auf diesen Unterräumen definieren wir durch Induktion über $p = 0,\, 1,\, \ldots\,,$ eine Folge von Abbildungen

$$g_p : \; K^p \longrightarrow Y$$

mit den beiden Eigenschaften

(1) $g_p \,|\, K^{p-1} \;=\; g_{p-1}$ (insbesondere also $g_p \,|\, \Gamma \;=\; g \,|\, \Gamma$) und

(2) *wenn* $W \in \Sigma^p$, *dann* $g_p(W) \subset U \cap V$.

Der Induktionsanfang ist trivial, $g_{-1} = g\,|\,\Gamma$. Induktiv nehmen wir jetzt an, daß die Folge schon konstruiert ist bis $p{-}1$. Sei $W \in \Sigma^p$.

Behauptung. $\partial W \subset (g_{p-1})^{-1}(U \cap V)$.

Denn sei W' ein q-Würfel in ∂W, wo $q < p$. Wenn W' 'gut' ist, dann ist $g_{p-1}(W') = g(W') \subset V$; andererseits aber auch $g_{p-1}(W') = g(W') \subset g(W) \subset U$, weil W selbst 'schlecht' ist. Wenn W' 'schlecht' ist, dann ist $g_{p-1}(W') \subset U \cap V$ nach der Induktionsvoraussetzung.

Wir erinnern uns jetzt daran, daß (für $p < n$) jede Abbildung

$$\partial W \longrightarrow U \cap V \ (\approx S^{n-1} \times (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}))$$

erweitert werden kann zu einer Abbildung des p-Würfels W (wegen der Induktionsvoraussetzung unseres Satzes). Also können wir $g_p\,|\,W$ jetzt *definieren* als (irgend-)eine solche Erweiterung. Nachdem wir dies für alle Würfel aus Σ^p gemacht haben, ist die Konstruktion von g_p fertig. Der Fall $p = m$ schließlich liefert eine Abbildung

$$g' = g_m : \ [0,1]^m \longrightarrow V \ .$$

Behauptung. *g' ist homotop zu g , relativ zum Rand von $[0,1]^m$.*

Beweis. Der Rand von $[0,1]^m$ ist enthalten in Γ , und wir zeigen, daß g und g' sogar homotop sind relativ zu Γ . Zunächst ist es so, nach Konstruktion, daß $g'\,|\,\Gamma = g\,|\,\Gamma$. Wenn nun Σ definiert wird als der 'schlechte' Unterraum, die Vereinigung der 'schlechten' Würfel (einschließlich ihrer Ränder), so enthält Σ das Komplement von Γ , so daß sich also g und g' höchstens innerhalb von Σ unterscheiden.

Nach Definition von Σ ist $g(\Sigma) \subset U$. Und nach Konstruktion von g' ist $g'(\Sigma) \subset U \cap V \subset U$. Also können $g\,|\,\Sigma$ und $g'\,|\,\Sigma$ beide aufgefaßt werden als Abbildungen nach U . Andererseits ist U topologisch äquivalent zu einer offenen Kugel, also einem konvexen Unterraum eines Vektorraumes. Die Abbildungen $g\,|\,\Sigma$ und $g'\,|\,\Sigma : \ \Sigma \to U$ sind also homotop mit Hilfe einer linearen Homotopie, und diese Homotopie ist automatisch dort konstant, wo g und g' übereinstimmen; insbesondere also auf $\Sigma \cap \Gamma$.

Wir erweitern die Homotopie zu einer auf ganz $[0,1]^m$ definierten Homotopie von g zu g' dadurch, daß wir auf Γ die konstante Homotopie nehmen — das geht sicherlich, da $\Sigma \cap \Gamma$ abgeschlossener Unterraum ist (denn $\Sigma \cap \Gamma$ ist endliche Vereinigung von Würfeln, daher kompakt). □

Ende des Beweises. Die Abbildung g' läßt die Mitte der offenen Zelle $\mathrm{Bild}(\mathring{D}^n) \subset Y$ frei. Durch eine *radiale Homotopie*,

$$(x,t) \longmapsto (\,(1{-}t) + t \cdot \tfrac{1}{|g'(x)|}\,)\ g'(x) \ ,$$

schieben wir das Bild von g' aus der Zelle hinaus. □

Als Folgerung dieses Satzes können wir nun einen Teil der Behauptung des zellulären Approximations-Satzes beweisen. Diesen Teil werden wir später benötigen im induktiven Beweis des zellulären Approximations-Satzes. Wir formulieren ihn als Hilfssatz.

Hilfssatz. *Sei* $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ *eine Abbildung von CW-Komplexen. Es gelte, daß* f *zellulär ist bis zur Stufe* $m{-}1$ *, d.h.,*

$$f(X_0) \subset Y_0\ ,\ f(X_1) \subset Y_1\ ,\ \ldots\ ,\ f(X_{m-1}) \subset Y_{m-1}\ .$$

Dann ist die eingeschränkte Abbildung

$$f \,|\, X_m :\ X_m \ \longrightarrow\ Y$$

homotop, relativ zu X_{m-1} *, zu einer Abbildung nach* Y_m *.*

Beweis. Wir wählen ein System von charakteristischen Abbildungen für die m-Zellen von X ,

$$d_j :\ D^m \ \longrightarrow\ X_m\ ,\quad j \in J$$

(so daß also $X_m = X_{m-1} \cup_{J \times \partial D^m} J \times D^m$ bezüglich der Anhefte-Abbildungen $d_j \,|\, \partial D^m$: $\partial D^m \to X_{m-1}\ ,\ j \in J$) .

Das Paar (Y, Y_m) kann aufgefaßt werden als ein relativer CW-Komplex, und zwar als ein solcher *ohne* Zellen der Dimension $\leq m$.

Für jedes j ist das Bild $f(\, d_j\, (D^m)\,)$ kompakt, deshalb enthalten in einem *endlichen Unterkomplex* $\big(Y^j, Y_m\big)$. Die Komposition von f mit der charakteristischen Abbildung d_j ,

$$f \circ d_j :\ D^m \ \longrightarrow\ Y$$

kann nun aufgefaßt werden als eine Abbildung

$$g_j :\ (D^m, \partial D^m) \ \longrightarrow\ \big(Y^j, Y_m\big)\ .$$

Wir betrachten eine Zelle höchster Dimension in dem endlichen relativen CW-Komplex $\big(Y^j, Y_m\big)$. Wir können dann schreiben

$$Y^j \ = \ \overline{Y}^j \cup_{\partial D^{\overline{n}}} D^{\overline{n}}$$

wobei $(\overline{Y}^j, Y_m)$ Unterkomplex von (Y^j, Y_m) ist, und zwar mit einer Zelle weniger. Die fragliche Zelle hat Dimension $> m$, deshalb können wir unseren Satz anwenden auf die Abbildung

$$(D^m, \partial D^m) \longrightarrow (Y^j, \overline{Y}^j)$$

und schließen, daß diese Abbildung homotop ist, relativ zu ∂D^m , zu einer Abbildung mit Bild in $\overline{Y}^j$.

In $\overline{Y}^j$ nehmen wir wieder eine Zelle höchster Dimension, die Dimension dieser Zelle ist auch $> m$, und wir können wie oben wieder unseren Satz anwenden. Und so fort.

Nach endlich vielen Schritten haben wir eine Homotopie, relativ zu ∂D^m , konstruiert von der Abbildung $g_j : (D^m, \partial D^m) \longrightarrow (Y, Y_m)$ zu einer Abbildung mit Bild in Y_m .

Es ist nun plausibel, daß die konstruierten Homotopien der Abbildungen g_j sich zusammensetzen zu einer Homotopie (relativ X_{m-1}) der auf $X_{m-1} \cup_{J\times\partial D^m} J\times D^m$ definierten Abbildung f.

Im Detail: die Homotopie von g_j ist eine Abbildung

$$G_j : D^m \times [0,1] \longrightarrow Y$$

mit gewissen Eigenschaften. Die Gesamtheit der G_j können wir auffassen als Abbildung

$$G : J\times D^m \times [0,1] \longrightarrow Y$$

und G hat die Eigenschaft, daß die eingeschränkte Abbildung $G \mid J\times\partial D^m \times t$ nicht von t abhängt. Deshalb existiert (nach Definition der Quotiententopologie) eine Abbildung F des zusammengeklebten Raumes,

$$F : X_{m-1}\times [0,1] \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]} J\times D^m\times[0,1] \longrightarrow Y$$

mit den Eigenschaften

(i) die Einschränkung $F \mid X_{m-1}\times[0,1]$ ist gegeben durch

$$f \mid X_{m-1} \circ (\mathrm{pr}_1 : X_{m-1}\times[0,1] \to X_{m-1})$$
$$(= \text{konstante Homotopie von } f \text{ auf } X_{m-1})$$

(ii) die Abbildung G ist die Zusammensetzung von F mit der Abbildung

$$J\times D^m\times[0,1] \longrightarrow X_{m-1}\times[0,1] \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]} J\times D^m\times[0,1]$$

— und F ist durch die Bedingungen (i) und (ii) eindeutig festgelegt.

An dieser Stelle brauchen wir einen Akt des Glaubens, um F als Homotopie interpretieren zu können. Nämlich wir brauchen

Lemma. *Die natürliche Abbildung* (eine stetige bijektive Abbildung!)

$$X_{m-1}\times[0,1] \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]} J\times D^m\times[0,1] \longrightarrow (X_{m-1}\cup_{J\times\partial D^m} J\times D^m)\times[0,1]$$

ist eine topologische Äquivalenz.

Die Richtigkeit dieses Lemmas könnten wir uns an dieser Stelle direkt überlegen. Das lohnt sich aber nicht, da wir uns in Kürze ähnliche Sachen etwas allgemeiner klarmachen werden. Wir verschieben deshalb den Beweis.

Der Hilfssatz, den wir soeben bewiesen haben (oder jedenfalls bewiesen haben bis auf das noch nachzutragende Lemma), dieser Hilfssatz zeigt ein Problem auf. Nämlich wir haben uns klargemacht, daß wir die Situation auf den m-Zellen wie gewünscht durch eine Homotopie verbessern können. Die Sache hat aber den Haken, daß diese Homotopie auf einem zu kleinen Raum definiert ist, nämlich auf X_m (statt X). Erfreulicherweise gibt es nun einen sehr allgemeinen Sachverhalt, der dieses Problem auf einfache Weise löst, nämlich

Satz (Homotopie-Erweiterungs-Satz). *Sei (Z,C) ein CW-Komplex. Das Paar (Z,C) hat die* Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft (*abkürzend* HEE), *im folgenden Sinne:*

Definition (HEE). Ein Paar von Räumen (Z, C) hat die *Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft* wenn folgendes gilt. Gegeben seien

(i) eine auf Z definierte Abbildung

(ii) eine Homotopie der auf C eingeschränkten Abbildung.

Dann existiert eine Homotopie der auf Z definierten Abbildung, die die auf C vorgegebene Homotopie erweitert.

Den Beweis des HE-Satzes wollen wir auf später verschieben, um zunächst den Satz über die zelluläre Approximation zu Ende zu bringen. Damit wir nicht die Übersicht verlieren, formulieren wir den nächsten Schritt als Hilfssatz.

Hilfssatz. *Sei* $f = f_{-1} : (X, A) \to (Y, B)$ *eine Abbildung von CW-Komplexen. Es existiert eine Folge von Abbildungen* $f_m : (X, A) \to (Y, B)$ *,* $m = -1, 0, 1, \dots$ *, und von Homotopien*

$$F_m : \, (\, X \times [0,1] \,,\, A \times [0,1] \,) \;\longrightarrow\; (Y, B)$$

mit

(i) f_m *ist zellulär bis zur Stufe* m *, d.h.* $f_m(X_i) \subset Y_i$ *für* $i \leq m$

(ii) *für* $m = 0\,, 1\,, \dots$ *, ist* F_m *Homotopie (relativ* X_{m-1}*) von* f_{m-1} *zu* f_m *.*

Beweis. Das ist eine Folgerung aus dem vorigen Hilfssatz und dem Homotopie-Erweiterungs-Satz. Seien nämlich induktiv die Paare $(f_0, F_0)\,, \dots, (f_{m-1}, F_{m-1})$ schon konstruiert. Nach dem vorigen Hilfssatz existiert eine Homotopie H_m (relativ X_{m-1}) von der eingeschränkten Abbildung $h_m = f_{m-1} \,|\, X_m$ zu einer Abbildung $h'_m = H_m \,|\, X_m \times 1$ mit $h'_m(X_m) \subset Y_m$. Nach dem Homotopie-Erweiterungs-Satz existiert eine Erweiterung der Homotopie H_m zu einer Homotopie F_m der Abbildung f_{m-1} , d.h. $F_m \,|\, X \times 0 = f_{m-1}$. Wir *definieren* die Abbildung f_m nun als die Einschränkung $f_m = F_m \,|\, X \times 1$. Der Induktionsschritt ist fertig. □

Mit diesem Hilfssatz haben wir tatsächlich den zellulären Approximations-Satz schon bewiesen für den speziellen Fall eines endlich-dimensionalen CW-Komplexes, d.h., wo ein m existiert, so daß $X_m = X$. Denn in diesem Fall ist ja das f_m aus dem Hilfssatz schon eine zelluläre Abbildung, und die Homotopien $F_0\,, \dots, F_m$ liefern (per Zusammensetzung) eine Homotopie von f zu f_m .

Im Fall eines nicht endlich-dimensionalen CW-Komplexes sieht es auf den ersten Blick so aus, als ob dieses Argument nicht funktionieren kann. Denn der Hilfssatz liefert ja explizit eine unendliche Folge von Homotopien $F_0, F_1, \dots$ und die müßten wir ja alle sozusagen hintereinander durchlaufen.

Es geht aber doch! Tatsächlich können wir ohne weiteres so etwas wie eine Homotopie *hinschreiben*, die das Hintereinanderdurchlaufen der ganzen Folge $F_0, F_1, \dots$ beinhaltet. Die einzige Unbequemlichkeit ist die, daß wir zum Schluß die Stetigkeit der hingeschriebenen Abbildung noch explizit werden nachweisen müssen.

Hier ist die (Pseudo-)Homotopie (Stetigkeit wird im Moment noch nicht behauptet). Für $t < 1$ sei

$$F(x,t) \quad = \quad \begin{cases} F_0(\,x,\,2\,t\,) & \text{wenn} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ F_1(\,x,\,2\cdot 3\,(\,t - \frac{1}{2})\,) & \text{wenn} \quad \frac{1}{2} \le t \le \frac{2}{3} \\ \quad \vdots & \\ F_m(\,x,\,(m{+}1)(m{+}2)\,(\,t - \frac{m}{m+1})\,) & \text{wenn} \quad \frac{m}{m+1} \le t \le \frac{m+1}{m+2} \\ \quad \vdots & \end{cases}$$

Für $t = 1$ verwenden wir einen Trick. Nämlich für $n > m$ und $x \in X_m$ ist das vorher definierte $F_n(x,t)$ *unabhängig* von n und t (wo $t \in [0,1)$), weil F_n ja Homotopie *relativ zu* X_{n-1} ist. Wir *definieren* $F(x,1)$ als diesen Wert. Da jedes $x \in X$ in einem der X_m liegt, ist $F(x,t)$ somit auch für $t = 1$ für alle x definiert.

Zu zeigen ist noch, daß die Abbildung $F: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tatsächlich stetig ist. Sobald man das gezeigt hat, bekommt man auch die verlangte zelluläre Abbildung von X nach Y ; sie wird einfach *definiert* als die Einschränkung $F \,|\, X \times 1$.

Nach Konstruktion von F nun ist für jedes $m = 0, 1, \ldots$ die eingeschränkte Abbildung

$$F \,|\, X_m \times [0,1]$$

stetig, denn das ist ja, bis auf Umparametrisierung, nichts anderes als die Zusammensetzung der Homotopien

$$F_i \,|\, X_m \times [0,1] \ , \ i = 0, 1, \ldots, m \ .$$

Also genügt es, zu zeigen:

LEMMA. *Sei* (X, A) *CW-Komplex und*

$$F: X \times [0,1] \longrightarrow T$$

eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) F *ist stetig*

(ii) *für jedes* n *ist die eingeschränkte Abbildung* $F \,|\, X_n \times [0,1]$ *stetig.*

Bis auf die beiden noch nachzutragenden Lemmas und den ebenso noch nachzutragenden Homotopie-Erweiterungs-Satz ist der Beweis des Satzes über die zelluläre Approximation damit nun fertig.

Produkte

Im Falle der beiden nachzutragenden Lemmas muß man etwas darüber wissen, wie weit die Bildung von *Quotientenräumen* mit der Bildung von *Produkten* verträglich ist. Wir brauchen einen Satz, den wir im vorigen Semester hätten machen können, aber nicht gemacht haben.

Satz. *Sei* $f : X \to Y$ *eine Quotientenraum-Abbildung* (d.h., f ist surjektive Abbildung; und eine Teilmenge A von Y ist offene Menge in Y dann (und nur dann), wenn ihr Urbild $f^{-1}(A)$ offene Menge in X ist). *Sei* K *ein topologischer Raum.*

Hinreichend dafür, daß dann auch die Abbildung

$$f \times \mathrm{Id}_K : \; X \times K \;\longrightarrow\; Y \times K$$

eine Quotientenraum-Abbildung ist, ist jede der beiden folgenden Bedingungen:

(i) K *ist kompakt*

(ii) K *ist lokal-kompakt* (d.h., für jedes $x \in K$ und für jede Umgebung U von x, existiert eine *kompakte* Umgebung V von x in U).

Beweis. Zunächst ist (i) ein Spezialfall von (ii) wegen:

Hilfssatz. *Ist* K *kompakt, dann ist* K *auch lokal kompakt.*

(Die Umkehrung davon gilt natürlich nicht. Beispiel: $\mathbb{R}^n$, $n > 0$.)

Beweis. Die vorgegebene Umgebung U enthält eine offene Umgebung U' von x. Nun sind $\{x\}$ und das Komplement CU' abgeschlossene disjunkte Mengen in K, also ("*ein kompakter Raum ist normal*") existieren offene Mengen W_1 und W_2 mit

$$x \in W_1 \;, \quad CU' \subset W_2 \;, \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset \;.$$

Das Komplement CW_2 ist dann abgeschlossen in K und daher selbst kompakt. Es ist $CW_2 \subset U'$. Und CW_2 ist Umgebung von x, weil $W_1 \subset CW_2$. □

Bemerkung. Der obige Beweis zeigt, daß schon die folgende Bedingung 'lokal-kompakt' impliziert: "Jedes $x \in K$ besitzt mindestens eine kompakte Umgebung V". Um nämlich hieraus auf 'lokal-kompakt' zu schließen, argumentiert man anstelle des Kompaktums K mit der nach Voraussetzung existierenden kompakten Umgebung V. □

Zurück zum Beweis des Satzes. Die Abbildung $f \times \mathrm{Id}_K$ ist, als Produkt zweier stetiger Abbildungen, wieder stetig. Wenn also W offene Teilmenge von $Y \times K$ ist, dann hat W offenes Urbild in $X \times K$. Wir müssen zeigen, daß diese Eigenschaft schon die offenen Mengen in $Y \times K$ charakterisiert (unter der Voraussetzung, daß K lokal-kompakt ist), d.h., wir müssen zeigen: Sei W Teilmenge von $Y \times K$. Wenn

$$(f \times \mathrm{Id}_K)^{-1}(W)$$

offene Teilmenge von $X \times K$ ist, dann ist notwendigerweise W offen in $Y \times K$; d.h. (nach Definition der Produkttopologie) zu jedem $(y_0, k_0) \in W$ existieren Umgebungen

$$U = U(y_0) \subset Y \ , \quad L = L(k_0) \subset K \ ,$$

so daß

$$U \times L \subset W \ .$$

Zu vorgegebenem (y_0, k_0) wollen wir solche U und L jetzt konstruieren.

Um die Voraussetzung auszunutzen, daß $(f \times \mathrm{Id}_K)^{-1}(W)$ offen in $X \times K$ ist (über W selbst wissen wir ja gar nichts!) wählen wir $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Sei $K_0 \subset K$ so definiert, daß

$$\{x_0\} \times K_0 \ = \ (\{x_0\} \times K) \ \cap \ (f \times \mathrm{Id}_K)^{-1}(W) \ .$$

Dann ist K_0 offen in K und enthält k_0. Nach Voraussetzung über K existiert deshalb eine *kompakte* Umgebung L von k_0 in K_0.

Versuchsweise definieren wir die Menge U jetzt als

$$U \ = \ \{ \, y \in Y \ \mid \ \{y\} \times L \subset W \, \} \ .$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$(y_0, k_0) \in U \times L \ , \quad L \ \text{ist Umgebung von} \ k_0 \ , \quad \text{und} \ \ y_0 \in U \ .$$

Zu zeigen ist also nur noch, daß U Umgebung von y_0 ist. Dazu zeigen wir, daß U offen ist oder, was dasselbe ist nach Voraussetzung über die Abbildung f, daß $f^{-1}(U)$ offen in X ist. Nun ist, nach Definition von U,

$$f^{-1}(U) \ = \ \Big\{ \, x \in X \mid \{x\} \times L \subset (f \times \mathrm{Id}_K)^{-1}(W) \, \Big\} \ .$$

Wir zeigen, zu vorgegebenem $x \in f^{-1}(U)$ existiert eine Umgebung V von x in X, so daß gilt

$$V \times L \subset (f \times \mathrm{Id}_K)^{-1}(W) \ .$$

Der Existenzbeweis für V ist einer der elementaren Sätze über Kompaktheit, nämlich:

Hilfssatz. *Seien X und K topologische Räume. Sei $x \in X$ und sei L kompakter Unterraum von K. Sei W' eine offene Teilmenge von $X \times K$ derart, daß $\{x\} \times L \subset W'$. Dann existiert eine offene Umgebung V von x in X so daß $V \times L \subset W'$.*

Beweis. Nach Definition der Produkttopologie hat jeder Punkt $(x, \ell) \in W'$ eine ganz in W' liegende Kästchen-Umgebung

$$A_{x,\ell} \times B_{x,\ell} \ , \quad A_{x,\ell} \ \text{offen in} \ X \ , \quad B_{x,\ell} \ \text{offen in} \ K \ .$$

Für variables $\ell \in L$ bilden die $L \cap B_{x,\ell}$ eine offene Überdeckung von L. Endlich viele dieser ℓ tun's dann auch schon wegen der Kompaktheit von L, und der Durchschnitt der fraglichen endlich vielen $A_{x,\ell}$ liefert die behauptete Umgebung V von x. Damit ist der Hilfssatz (und somit auch der Satz) bewiesen. $\square$

Nach diesem Exkurs in die allgemeine Topologie können wir die beiden nachzutragenden Lemmas nun abhaken. Die nachfolgenden Korollare sind ein bißchen allgemeiner.

KOROLLAR 1. *Der Raum K sei kompakt (oder allgemeiner: lokal kompakt). Dann ist der Prozeß "Produkt mit K" verträglich mit dem Anheften von n-Zellen, d.h. wenn*

$$X \;=\; X' \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n$$

dann ist die natürliche Abbildung

$$X'\times K \cup_{J\times\partial D^n\times K} \; J\times D^n\times K \;\longrightarrow\; (X' \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n) \times K$$

eine topologische Äquivalenz.

BEWEIS. Der Term auf der linken Seite ist nach Definition ein Quotientenraum der disjunkten Vereinigung

$$X'\times K \;\dot\cup\; J\times D^n\times K \;,$$

nämlich zu der Äquivalenzrelation, die erzeugt wird von der Anhefte-Abbildung

$$(g\times \mathrm{Id}_K) : \; J\times\partial D^n\times K \;\longrightarrow\; X'\times K \;,$$

wo g die Anhefte-Abbildung für X ist. Nun ist

$$X'\times K \;\dot\cup\; J\times D^n\times K \;\xrightarrow{\approx}\; (\,X' \;\dot\cup\; J\times D^n\,) \times K$$

(*disjunkte Vereinigung ist mit Produkten verträglich* — ein ziemlich triviales Nachprüfen der Definitionen), deshalb ist der Raum $X'\times K \cup_{J\times\partial D^n\times K} J\times D^n\times K$ ebenso auch ein Quotientenraum von $(\,X' \,\dot\cup\, J\times D^n\,) \times K$ (bezüglich der 'transportierten' Äquivalenzrelation). Der andere Raum, $(X' \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n) \times K$, ist Quotient von letzterem Raum bezüglich *derselben* Äquivalenzrelation — zumindest, was die unterliegenden Mengen angeht. Die topologische Struktur ist aber möglicherweise anders, und unser Problem ist es, zu zeigen, daß sie tatsächlich nicht anders ist. Dazu verwenden wir den vorigen Satz. Die Abbildung ist nämlich gegeben durch

$$f\times \mathrm{Id}_K : \; (\,X' \;\dot\cup\; J\times D^n\,) \times K \;\longrightarrow\; (X' \cup_{J\times\partial D^n} J\times D^n) \times K$$

wo f die Quotientenraumprojektion bezeichnet. Unter der Voraussetzung, daß K lokal-kompakt ist, sagt der Satz, daß auch die Abbildung $f\times \mathrm{Id}_K$ eine Quotientenraumprojektion ist, wie behauptet. $\square$

KOROLLAR 2. *Sei (X,A) CW-Komplex mit Zellfiltrierung*

$$A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X \;.$$

Sei K lokal kompakt. Sei $O \subset X\times K$. Dann sind äquivalent:

(i) *O ist offen*

(ii) *für jedes n ist $O \cap (X_n\times K)$ offen in $X_n\times K$*

(iii) *für jeden endlichen Unterkomplex (Y,A) von (X,A) ist $O \cap (Y\times K)$ offen in $Y\times K$.*

Beweis. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Wir bilden die disjunkte Vereinigung

$$\overline{X} \;=\; X_{-1} \;\dot\cup\; X_0 \;\dot\cup\; X_1 \;\dot\cup\; \dots \;\dot\cup\; X_n \;\dot\cup\; \dots \;.$$

Dann gibt es eine natürliche Abbildung $p : \overline{X} \longrightarrow X$. Diese Abbildung ist eine Quotientenraumprojektion. Denn wenn $P \subset X$, dann ist $p^{-1}(P)$ offen in $\overline{X}$ genau dann, wenn $P \cap X_n$ offen in X_n für alle n , und das ist ja gerade (nach Definition eines CW-Komplexes) gleichbedeutend damit, daß P offen in X ist.

Unter der Voraussetzung, daß K lokalkompakt ist, sagt nun der Satz, daß $X \times K$ Quotientenraum von

$$\overline{X} \times K \quad (\;\approx\; X_{-1}{\times}K \;\dot\cup\; X_0{\times}K \;\dot\cup\; \dots \;\dot\cup\; X_n{\times}K \;\dot\cup\; \dots)$$

ist. D.h., eine Teilmenge $W \subset X \times K$ ist offen genau dann, wenn $(p \times \mathrm{Id})^{-1}(W)$ offen in $\overline{X} \times K$ ist, was wiederum bedeutet, daß $W \cap (X_n \times K)$ offen in $X_n \times K$ ist, für jedes n .

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) Das Argument ist ganz analog. $\square$

Satz. *Sei* (X, A) *relativer CW-Komplex. Sei* K *lokal-kompakt* (z.B. $K = [0, 1]$) . *Sei* Y *ein topologischer Raum, und sei*

$$f : \; X \times K \longrightarrow Y$$

eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
(i) f *ist stetig*
(ii) *für jedes* m *ist die eingeschränkte Abbildung* $f \mid X_m{\times}K$ *stetig.*

Beweis. Für jede offene Menge $O \subset Y$ sind nach dem vorigen Korollar äquivalent:
(i) $f^{-1}(O)$ ist offen in $X \times K$
(ii) für jedes m ist $(f \mid X_m{\times}K)^{-1}\,(O)$ offen in $X_m \times K$. $\square$

Der Raum $X \times K$ verhält sich also in einer wichtigen Angelegenheit genauso wie ein CW-Komplex (für den ja auch gilt, daß eine Abbildung genau dann stetig ist, wenn ihre Einschränkungen auf die Skelette stetig sind). Dies suggeriert, daß auch $X \times K$ ein CW-Komplex sein sollte, wenn es eine Chance hat. Wir wollen uns überlegen, daß das tatsächlich so ist. Der Einfachheit halber behandeln wir nur den Fall *absoluter* CW-Komplexe,

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X \;.$$

Bemerkung. *Dieses* X *ist Quotientenraum der disjunkten Vereinigung*

$$\widehat{X} \;=\; J_0 \times D^0 \;\dot\cup\; J_1 \times D^1 \;\dot\cup\; \dots \;\dot\cup\; J_n \times D^n \;\dot\cup\; \dots$$

wobei J_n *die Indexmenge für die* n*-Zellen bezeichnet.*

Beweis. Für jede Zelle sei eine charakteristische Abbildung $D^n \to X_n$ ausgewählt. Diese Abbildungen liefern zusammen eine surjektive Abbildung $p : \widehat{X} \to X$. Zu zeigen:

Wenn $B \subset X$ und $p^{-1}(B)$ abgeschlossen in $\widehat{X}$, dann ist schon B abgeschlossen in X. Das kennen wir aber: nämlich "$p^{-1}(B)$ abgeschlossen" heißt, $p^{-1}(B)$ trifft jedes $j \times D^n$ in einer abgeschlossenen (und damit kompakten) Untermenge. Dann ist auch $p\left(p^{-1}(B) \cap (j \times D^n)\right)$ kompakt und daher abgeschlossen. Das heißt, B trifft den Abschluß einer jeden Zelle in einer abgeschlossenen Teilmenge. Das ist aber ein Kriterium dafür, daß B selbst abgeschlossen ist. □

Bemerkung. Die vorige Bemerkung können wir auch umkehren. Nämlich sei $\widehat{X}$ eine disjunkte Vereinigung von Bällen

$$\widehat{X} \;=\; J_0 \times D^0 \;\dot\cup\; J_1 \times D^1 \;\dot\cup\; \ldots$$

und sei X ein Quotientenraum von $\widehat{X}$. Dann ist X ein CW-Komplex, sobald die zugrundeliegende Äquivalenzrelation eine gewisse induktiv formulierbare Bedingung erfüllt. Es sei nämlich $\widehat{X}_n$ definiert als $\widehat{X}_n := J_0 \times D^1 \;\dot\cup\; \ldots \;\dot\cup\; J_n \times D^n$, und X_n als das Bild von $\widehat{X}_n$. Die Bedingung ist dann, daß die eingeschränkte Äquivalenzrelation auf $\widehat{X}_n$ erzeugt wird von

1. *der eingeschränkten Äquivalenzrelation auf* $\widehat{X}_{n-1}$
2. *einer Anhefteabbildung* $J_n \times \partial D^n \longrightarrow X_{n-1}$. □

Wir wollen nun Produkte von CW-Komplexen betrachten. Seien also X und X' CW-Komplexe, aufgefaßt als Quotientenräume von

$$\widehat{X} \;=\; J_0 \times D^0 \;\dot\cup\; J_1 \times D^1 \;\dot\cup\; \ldots \quad \text{und} \quad \widehat{X}' \;=\; J_0' \times D^0 \;\dot\cup\; J_1' \times D^1 \;\dot\cup\; \ldots$$

Die Äquivalenzrelationen auf $\widehat{X}$ und $\widehat{X}'$ erzeugen eine Äquivalenzrelation auf

$$\begin{aligned} \widehat{X} \times \widehat{X}' \;&=\; \Big(\dot\bigcup_p \, J_p \times D^p \Big) \times \Big(\dot\bigcup_q \, J_q' \times D^q \Big) \\ &=\; \dot\bigcup_n \Big(\dot\bigcup_{p+q=n} \; J_p \times J_q' \times D^p \times D^q \Big) \\ &\approx\; \dot\bigcup_n \Big(\dot\bigcup_{p+q=n} \; J_p \times J_q' \Big) \times D^n \,, \end{aligned}$$

weil $D^p \times D^q \;\approx\; D^n$, wenn $p + q = n$.

Diese Äquivalenzrelation ist von dem soeben diskutierten speziellen Typ. Denn der Rand des Balles $D^p \times D^q$ setzt sich zusammen in der Weise

$$\partial(D^p \times D^q) \;=\; (\partial D^p \times D^q) \;\cup\; (D^p \times \partial D^q) \,.$$

Soweit die Äquivalenzrelation Punkte aus $D^p \times D^q$ und solche von Zellen kleinerer Dimension betrifft, kommt sie also her von einer Anhefte-Abbildung

$$\begin{aligned} &\partial(D^p \times D^q) \;=\; (\partial D^p \times D^q) \cup (D^p \times \partial D^q) \;\longrightarrow \\ &\qquad\qquad \mathrm{Bild}(\widehat{X}_{p-1} \times \widehat{X}_q') \cup \mathrm{Bild}(\widehat{X}_p \times \widehat{X}_{q-1}') \;\subset\; \mathrm{Bild}\big(\bigcup_{p+q \le n-1} \; \widehat{X}_p \times \widehat{X}_q'\big) \,. \end{aligned}$$

Der zugehörige Quotientenraum ist folglich ein CW-Komplex. Wir bezeichnen ihn mit $X \mathbin{\widehat{\times}} X'$. Die Skelette sind

$$\begin{aligned} (X \mathbin{\widehat{\times}} X')_n &= \operatorname{Bild}(\textstyle\bigcup_{p+q \le n} \ \widehat{X}_p \times \widehat{X}'_q \ ) \\ &= \textstyle\bigcup_{p+q \le n} \ X_p \mathbin{\widehat{\times}} X'_q \ . \end{aligned}$$

Es gibt eine natürliche Abbildung

$$X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X' \ .$$

Sie kommt daher, daß die Abbildung $\operatorname{proj}_X \times \operatorname{proj}_{X'} \colon \widehat{X} \times \widehat{X}' \to X \times X'$ faktorisiert als die Projektion $\widehat{X} \times \widehat{X}' \to X \mathbin{\widehat{\times}} X'$, gefolgt von einer stetigen bijektiven Abbildung, eben $X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X'$.

Diese Abbildung ist *nicht immer* eine topologische Äquivalenz (ein Beispiel dazu wird unten angegeben). Es ist Geschmacksache, ob man in einem solchen Fall $X \mathbin{\widehat{\times}} X'$ oder $X \times X'$ (das übliche Produkt) als besser ansehen will. (Viele Leute entscheiden sich in der Situation für den CW-Komplex $X \mathbin{\widehat{\times}} X'$.)

SATZ: *Wenn X' endlicher CW-Komplex ist, dann ist die Abbildung*

$$X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X'$$

eine topologische Äquivalenz. Ansonsten sind zueinander äquivalent:

(a) $X \times X'$ (mit der induzierten Zellenstruktur) *ist CW-Komplex.*

(b) *Die stetige bijektive Abbildung $X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X'$ ist topologische Äquivalenz.*

BEWEIS. Sei X' endlicher CW-Komplex. Zu zeigen ist, daß dann $\widehat{X} \times \widehat{X}' \longrightarrow X \times X'$ eine Quotientenraum-Abbildung ist. Dies nun folgt, sobald die beiden Abbildungen

$$\widehat{X} \times \widehat{X}' \longrightarrow \widehat{X} \times X' \quad \text{und} \quad \widehat{X} \times X' \longrightarrow X \times X'$$

Quotientenraum-Abbildungen sind. Das ist aber so nach einem oben angegebenen Kriterium über die Verträglichkeit von Quotientenraum-Konstruktionen mit Produkten: Im Fall der ersten Abbildung ist das Kriterium anwendbar, da der Raum $\widehat{X}$ eine disjunkte Vereinigung von Bällen ist, und daher lokal-kompakt. Im Fall der zweiten Abbildung ist es anwendbar, da der Raum X' als lokal-kompakt (sogar als kompakt) ausdrücklich vorausgesetzt wurde.

Auch im allgemeinen Fall ist der Raum $X \mathbin{\widehat{\times}} X'$ ein CW-Komplex. Wenn also $X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X'$ eine topologische Äquivalenz ist, so erbt der Produktraum $X \times X'$ eine solche Struktur.

Umgekehrt sei nun vorausgesetzt, daß $X \times X'$, mit der induzierten Zellenstruktur, ein CW-Komplex ist. Die offenen Zellen der beiden Räume $\widehat{X} \times \widehat{X}'$ und $X \times X'$ entsprechen sich dann unter der stetigen bijektiven Abbildung $\widehat{X} \times \widehat{X}' \longrightarrow X \times X'$.

Wir wollen zeigen, daß letztere Abbildung eine topologische Äquivalenz ist. In unserer Situation läuft es auf dasselbe hinaus, zu zeigen, daß es sich um eine *abgeschlossene*

Abbildung handelt. Dies gibt uns die Möglichkeit, einen Trick zu benutzen. Denn wir können abgeschlossene Mengen mit Hilfe der *endlichen Unterkomplexe* charakterisieren (eine Menge ist abgeschlossen schon dann, wenn ihr Durchschnitt mit jedem endlichen Unterkomplex abgeschlossen ist).

Seien Y und Y' endliche Unterkomplexe von X und X', dann ist die induzierte Abbildung $Y \mathbin{\widehat{\times}} Y' \longrightarrow Y \times Y'$ eine topologische Äquivalenz, wie schon gezeigt. Wegen der nunmehr gemachten Voraussetzung (a) gilt auch: Eine Teilmenge $O \subset X \times X'$ ist abgeschlossen schon dann, wenn ihr Durchschnitt mit jedem endlichen Unterkomplex von $X \times X'$ abgeschlossen ist. Dies ist aber äquivalent dazu, daß der Durchschnitt von O mit $Y \times Y'$ abgeschlossen ist, für jedes Paar endlicher Unterkomplexe (Y, Y') (denn jeder endliche Unterkomplex von $X \times X'$ ist enthalten in einem solchen $Y \times Y'$). Die Abbildung $X \mathbin{\widehat{\times}} X' \longrightarrow X \times X'$ ist also abgeschlossen. □

Bemerkung. Die Endlichkeits-Bedingung in dem Satz wurde nur benutzt, um sicherzustellen, daß X' *lokal kompakt* ist. Letzteres ist z.B. auch dann erfüllt, wenn X' *lokal-endlich* ist, d.h., wenn jeder Punkt als Umgebung einen endlichen Unterkomplex besitzt. □

Bemerkung. *Sind X und Y CW-Komplexe, so muß das Produkt $X \times Y$ nicht wieder CW-Komplex sein.*

Hierzu betrachten wir zwei CW-Komplexe, deren jeder eine einzige 0-Zelle und unendlich viele 1-Zellen hat. (Das ist der einfachste Fall eines nicht lokal-endlichen Komplexes; allerdings wird einer der beiden Komplexe besonders viele 1-Zellen haben, nämlich überabzählbar viele). Das Produkt $X \times Y$ ist dann ein Zellenkomplex (möglicherweise aber nicht CW-Komplex) mit Zellen in den Dimensionen 0, 1 und 2. Speziell gibt es eine einzige 0-Zelle, und die 2-Zellen entsprechen den Paaren

$$(\,1\text{-}\textit{Zelle von } X\,,\ 1\text{-}\textit{Zelle von } Y\,)\,.$$

Um einzusehen, daß $X \times Y$ (mit der Produkttopologie!) tatsächlich nicht die richtige Topologie für einen CW-Komplex hat, werden wir einen bestimmten Unterraum P betrachten. Nach Konstruktion wird P aus jeder der 2-Zellen genau einen Punkt enthalten; und keine Punkte sonst. Wäre $X \times Y$ ein CW-Komplex, dann müßte, wie wir wissen, ein solches P ein *abgeschlossener* Unterraum sein. Wir werden uns aber davon überzeugen, daß jede Umgebung der 0-Zelle den Unterraum P trifft. Da die 0-Zelle selbst nicht zu dem Unterraum gehört, kann dieser somit nicht abgeschlossen sein; also kann auch $X \times Y$ kein CW-Komplex sein.

Um Dinge im Detail benennen zu können, stellen wir uns nun vor, daß für jede der 1-Zellen in unseren beiden CW-Komplexen eine charakteristische Abbildung fest gewählt ist; oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß der Abschluß einer solchen Zelle in bestimmter Weise mit einer S^1 identifiziert ist. Wir können somit von *Distanz* reden. Z.B. kann eine Umgebung der 0-Zelle charakterisiert werden als eine Teilmenge, die aus der i-ten 1-Zelle alle Punkte bis zu einer Distanz ε_i enthält; ε_i ist hier eine Zahl > 0, die von i (und natürlich auch von der Umgebung) abhängt.

Wie eingangs gesagt, sollen X und Y jeweils eine einzige 0-Zelle haben und ansonsten nur 1-Zellen; letztere seien indiziert von Indexmengen

$$I = I_X \quad , \quad J = J_Y \quad ,$$

über die wir nun verfügen wollen. Die Menge J sei einfach die Menge der natürlichen Zahlen $j = 1, 2, 3, \dots$. Die Menge I ist dagegen viel größer (und ist auch ein wenig komplizierter zu beschreiben), die Elemente $i \in I$ sind die *Folgen natürlicher Zahlen*

$$i \;=\; (i_1\,,\; i_2\,,\; i_3\,,\; \dots\;)\;.$$

Der Trick, der mit dieser großen Indexmenge hier erreicht wird, ist, daß die Punkte der nunmehr zu definierenden Menge P in der Nähe der 0-Zelle sich arg werden drängen müssen. Die Menge P wird so definiert. P enthält, nach Definition, genau einen Punkt aus der durch das Paar (i,j) indizierten offenen 2-Zelle von $X \times Y$. Dazu nimmt man irgendeinen Punkt aus dieser 2-Zelle, der genügend nahe bei der 0-Zelle ist; nämlich dessen Koordinaten in den beiden zugehörigen 1-Zellen von der 0-Zelle eine Distanz von höchstens $(i_j)^{-1}$ haben.

Der Unterraum P trifft jede Umgebung der 0-Zelle. Denn sei eine solche Umgebung vorgegeben. Da $X \times Y$ mit der *Produkttopologie* versehen ist, enthält diese Umgebung eine *Produktumgebung* (*Kästchen-Umgebung*) $U \times V$. Wir werden zeigen, daß P schon $U \times V$ trifft.

Als Umgebung der 0-Zelle in Y enthält V aus der 1-Zelle mit dem Index j alle Punkte bis zu einer Distanz b_j von der 0-Zelle. Wir nehmen dies zum Anlaß, eine ganz bestimmte Folge von natürlichen Zahlen zu bestimmen, nämlich

$$\mathbf{i} \;=\; (\mathbf{i}_1\,,\; \mathbf{i}_2\,,\; \mathbf{i}_3\,,\; \dots\,)$$

wo für alle j gilt

$$\mathbf{i}_j \;>\; j \qquad \text{und} \qquad \mathbf{i}_j \;>\; (b_j)^{-1} \quad .$$

Ähnlich enthält U als Umgebung der 0-Zelle in X aus der 1-Zelle mit dem Index i alle Punkte bis zu einer Distanz a_i . Dies nutzen wir aus für die Wahl einer Zahl $\mathbf{j}$ mit

$$\mathbf{j} > (a_{\mathbf{i}})^{-1} \quad .$$

Der Punkt in P , dessen Index $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ist, hat von der 0-Zelle in beiden Koordinaten eine Distanz von $(\mathbf{i}_\mathbf{j})^{-1}$ oder weniger. Nach Konstruktion ist andererseits

$$(\mathbf{i}_\mathbf{j})^{-1} \;<\; (\mathbf{j})^{-1} \;<\; a_\mathbf{i} \qquad \text{und} \qquad (\mathbf{i}_\mathbf{j})^{-1} \;<\; b_\mathbf{j}\;,$$

der Punkt ist also enthalten in $U \times V$. $\square$

Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft

Die HEE ist nützlich und ist auch nicht selten. Speziell werden wir uns von ihrem Vorhandensein bei CW-Komplexen überzeugen. Wir beginnen mit einigen Allgemeinheiten: wir wiederholen die Definition und geben ein paar Umformulierungen.

DEFINITION (HEE). Sei X Raum und $A \subset X$ Unterraum. Das Paar (X, A) hat die *Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft*, wenn folgendes gilt. Gegeben seien

(i) eine auf X definierte Abbildung

(ii) eine Homotopie der auf A eingeschränkten Abbildung.

Dann existiert eine Homotopie der auf X definierten Abbildung, die die auf A vorgegebene Homotopie erweitert.

BEMERKUNG 1. Die HEE für (X, A) ist äquivalent zu der folgenden Bedingung. Gegeben seien ein Raum Y und Abbildungen $X \to Y$ und $A \times [0,1] \to Y$, die auf $A = A{\times}0$ übereinstimmen, dann haben diese Abbildungen eine gemeinsame Erweiterung auf den Raum $X \times [0,1]$ (wo X als Unterraum von letzterem betrachtet wird vermöge $X = X \times 0$).

Das ist nur die Ausformulierung der Definition.

BEMERKUNG 2. Die HEE für (X, A) ist äquivalent zu der folgenden Bedingung. Gegeben seien ein Raum Y und eine auf dem zusammengeklebten Raum $X \cup_A A{\times}[0,1]$ definierte Abbildung

$$X \cup_A A \times [0,1] \longrightarrow Y .$$

Dann existiert eine Erweiterung dieser Abbildung auf den Raum $X \times [0,1]$.

Denn statt, wie in der Bemerkung 1, die beiden Abbildungen auf X und auf $A{\times}[0,1]$ anzugeben, so kann man ebenso gut eine Abbildung auf deren disjunkter Vereinigung angeben,

$$X \ \dot\cup \ A \times [0,1] \longrightarrow Y ,$$

die verträglich ist mit einer gewissen Äquivalenzrelation (sie wird erzeugt durch die beiden Inklusionen $A \to X$ und $A \to A \times [0,1]$, $a \longmapsto (a, 0)$). Es läuft deshalb auf dasselbe hinaus, eine Abbildung auf $X \cup_A A \times [0,1]$, dem zusammengeklebten Raum, anzugeben.

Bemerkung 3. Wenn A *abgeschlossener* Unterraum von X ist, dann ist die HEE für (X, A) äquivalent zu der folgenden Bedingung. Gegeben seien ein Raum Y und eine auf dem Unterraum $X\times 0 \cup A\times[0,1] \subset X\times[0,1]$ definierte Abbildung

$$X\times 0 \cup A\times[0,1] \longrightarrow Y .$$

Dann existiert eine Erweiterung dieser Abbildung auf den Raum $X\times[0,1]$.

Denn die Abgeschlossenheit von A garantiert, daß die natürliche Abbildung

$$X \cup_A A \times [0,1] \longrightarrow X\times 0 \cup A\times[0,1]$$

eine topologische Äquivalenz ist. Diese Abbildung ist ja ohnehin eine stetige bijektive Abbildung. Wegen der Abgeschlossenheit von A ist sie auch eine *abgeschlossene Abbildung* (das läuft darauf hinaus, daß eine Teilmenge in dem Unterraum $X\times 0 \cup A\times[0,1]$ genau dann abgeschlossen ist, wenn ihre Durchschnitte mit den abgeschlossenen Unterräumen $X\times 0$ und $A\times[0,1]$ jeweils abgeschlossen sind).

Bemerkung 4. Wenn A *abgeschlossener* Unterraum von X ist, dann ist die HEE für (X, A) äquivalent zu der folgenden Bedingung. Der Unterraum $X\cup A\times[0,1] \subset X\times[0,1]$ ist *Retrakt* von $X\times[0,1]$.

Der Übergang zwischen (3) und (4) ist ein Spezialfall von

Hilfssatz. *Sei C Unterraum von Z. Es sind äquivalent*:
(a) *Jede Abbildung $C \to Y$ läßt sich erweitern zu einer Abbildung $Z \to Y$.*
(b) *C ist Retrakt von Z.*

Beweis. (b) $\Rightarrow$ (a). Sei $r : Z \to C$ eine Retraktion (also $r\,|\,C = \mathrm{Id}_C$). Ist $f : C \to Y$ eine Abbildung, so ist $f\circ r :\ Z \to Y$ eine Erweiterung von f.
(a) $\Rightarrow$ (b). Die Voraussetzung liefert, insbesondere, daß Id_C, die identische Abbildung auf C, erweitert werden kann zu einer Abbildung $r\colon Z \to C$. $\square$

Um die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft für interessante Raumpaare nun nachzuweisen, hangeln wir uns hoch an Fällen wachsender Allgemeinheit.

Satz. *Das Paar $(D^m, \partial D^m)$ hat die* HEE.

Beweis. Wir geben eine Retraktion an,

$$D^m\times[0,1] \longrightarrow D^m\times 0 \,\cup\, \partial D^m\times[0,1] .$$

Die Abbildung wird definiert mit Hilfe der Schar von Geraden in $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^1$, die durch den Punkt $(0,2)$, $0\in\mathbb{R}^m$, $2\in\mathbb{R}^1$, gehen. Jede solche Gerade trifft $D^m\times 0\cup\partial D^m\times[0,1]$ in höchstens einem Punkt. Andererseits liegt jeder Punkt von $D^m\times[0,1]$ auf genau einer von den Geraden.

Die Abbildung besteht nun darin, daß für jede von den Geraden der gesamte Durchschnitt mit $D^m\times[0,1]$ auf den entsprechenden Punkt in $D^m\times 0\cup\partial D^m\times[0,1]$ abgebildet wird. Es ist klar (oder?), daß die Abbildung stetig ist. $\square$

Bezeichne eine *diskrete Menge* eine Menge, die mit der diskreten Topologie versehen ist — das, was manchmal auch als "diskreter topologischer Raum" bezeichnet wird.

KOROLLAR. *Für jede diskrete Menge J hat $(J\times D^m,\ J\times\partial D^m)$ die* HEE.

BEWEIS. Ist $r:\ D^m\times[0,1] \longrightarrow D^m\times 0 \,\cup\, \partial D^m\times[0,1]$ eine Retraktion, dann auch

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_J\times r):\ J\times D^m\times[0,1] &\longrightarrow J\times(D^m\times 0\cup\partial D^m\times[0,1])\\ &\approx J\times D^m\times 0\,\cup\, J\times\partial D^m\times[0,1]\ .\end{aligned}$$

□

SATZ. *X entstehe aus X' durch Anheften von m-Zellen,* (*mit Indexmenge J*),

$$X \;=\; X'\cup_{J\times\partial D^m} J\times D^m\ .$$

Dann hat (X,X') die HEE.

BEWEIS. Eine Retraktion

$$J\times D^m\times[0,1] \;\longrightarrow\; J\times D^m\times 0\,\cup\, J\times\partial D^m\times[0,1]$$

induziert eine solche auf der disjunkten Vereinigung mit $X'\times[0,1]$. Letztere Retraktion ist verträglich mit der Äquivalenzrelation, die durch die Verklebe-Abbildung

$$(\,g\times\mathrm{Id}_{[0,1]}\,):\ J\times\partial D^m\times[0,1] \;\longrightarrow\; X'\times[0,1]$$

gegeben ist (wo $g\colon J\times\partial D^m\to X'$ die ursprüngliche Verklebe-Abbildung bezeichnet). Sie induziert deshalb eine Retraktion der verklebten Räume,

$$\begin{aligned}X\times[0,1] &\underset{\text{(Satz von oben)}}{\approx} X'\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]}\ J\times D^m\times[0,1]\\ &\longrightarrow X'\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]}\ (J\times D^m\times 0\cup J\times\partial D^m\times[0,1])\ .\end{aligned}$$

Den Zielraum können wir über Buchführungs-Manipulationen nun umformen,

$$\begin{aligned}&X'\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]}\ (J\times D^m\times 0\cup J\times\partial D^m\times[0,1])\\ \approx\ &X'\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]}\ (J\times\partial D^m\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times 0}\ J\times D^m\times 0)\\ \approx\ &(\ X'\times[0,1]\cup_{J\times\partial D^m\times[0,1]}\ J\times\partial D^m\times[0,1]\ )\cup_{J\times\partial D^m\times 0}\ J\times D^m\times 0\\ \approx\ &X'\times[0,1]\ \cup_{J\times\partial D^m\times 0}\ J\times D^m\times 0\\ \approx\ &X'\times[0,1]\cup X\times 0\quad(\ \subset X\times[0,1]\ )\ .\end{aligned}$$

□

SATZ. *Sei (X,A) ein relativer CW-Komplex. Das Raumpaar (X,A) hat die* HEE.

BEWEIS. Zu zeigen ist, daß eine Retraktion

$$f:\ X\times[0,1] \longrightarrow X\times 0\cup A\times[0,1]$$

existiert. Sei

$$A = X_{-1}\subset X_0\subset\ldots\subset X_n\subset\ldots\subset X$$

die Skelettfiltrierung. Das gesuchte f würde, per Restriktion, eine Folge von Retraktionen

$$f_m : \ X_m \times [0,1] \ \longrightarrow \ X_m \times 0 \cup A \times [0,1]$$

induzieren, mit

$$f_m \mid X_{m-1} \times [0,1] \ = \ f_{m-1} \ .$$

Um f zu konstruieren, genügt es umgekehrt aber auch, eine solche Folge von f_m's zu finden. Wir können dann nämlich f *definieren* als

$$f \mid X_m \times [0,1] \ = \ f_m \ ;$$

dieses f ist wohldefiniert (weil $f_m \,|\, X_{m-1} \times [0,1] \ = \ f_{m-1}$), es ist eine Retraktion (weil die f_m Retraktionen sind), und schließlich ist f auch stetig (nach dem Satz, daß f genau dann stetig ist, wenn die Einschränkungen $f \mid X_m \times [0,1]$ für alle m stetig sind.)

Die Existenz der gesuchten Folge $\{f_m\}$ haben wir praktisch schon früher gezeigt. Hier sind die Details. Wir konstruieren die Folge induktiv. Der Induktionsanfang ist trivial: f_{-1} ist die identische Abbildung auf $A \times [0,1]$. Wir nehmen nun an, f_{m-1} sei schon konstruiert. f_m verschaffen wir uns dann so:

Weil die Einschränkung von f_{m-1} auf

$$X_m \times 0 \ \cap \ X_{m-1} \times [0,1] \ = \ X_{m-1} \times 0$$

eine identische Abbildung ist, können wir f_{m-1} mit der Identität auf $X_m \times 0$ fortsetzen zu einer Abbildung

$$X_m \times 0 \ \cup \ X_{m-1} \times [0,1] \ \xrightarrow{\ \mathrm{Id} \ \cup \ f_{m-1}\ } \ X_m \times 0 \cup A \times [0,1] \ .$$

Diese Abbildung ist wieder stetig (weil $X_{m-1} \times 0$ abgeschlossen in $X_m \times 0$ ist), und sie ist auch eine Retraktion.

Nach dem vorigen Satz gibt es eine Retraktion

$$r_m : \ X_m \times [0,1] \ \longrightarrow \ X_m \times 0 \ \cup \ X_{m-1} \times [0,1] \ .$$

Die Zusammensetzung $(\, \mathrm{Id} \cup f_{m-1}\,) \circ r_m$ ist dann das gesuchte f_m . □

Bemerkung. Für Raumpaare (X,A) im allgemeinen (also solche, die keine CW-Komplexe sind) braucht die HEE nicht zu gelten. *Beispiel*: Sei X folgender Unterraum von $\mathbb{R}$,

$$X \ = \ [-1,0] \ \cup \ \{ \, \tfrac{1}{n} \mid n = 1,\, 2,\, \ldots \ \} \ .$$

Jede Homotopie der identischen Abbildung läßt jeden der isolierten Punkte $\frac{1}{n}$ fest, aus Stetigkeitsgründen also auch den Punkt 0 . Sei A der Unterraum $[-1,0]$. Wegen des eben gesagten kann eine Homotopie der Inklusionsabbildung $A \longrightarrow X$ nur dann erweitert werden zu einer Homotopie von Id_X , wenn sie den Punkt 0 festhält. Es gibt aber Homotopien, die nicht diese Eigenschaft haben; z.B. die Homotopie, die $[-1,0]$ auf $\{-1\}$ zusammenzieht.

Ein amüsanteres, wenn auch etwas komplizierteres Beispiel für dieses Phänomen liefern die *Hawaiischen Ohrringe*, wobei A der ausgezeichnete Punkt ist (der gemeinsame Punkt aller der Kreise). Keine (!) nicht-triviale Homotopie der Inklusion $A \to X$ läßt sich erweitern zu einer Homotopie von Id_X. Denn angenommen, Id_X sei homotop zu einer Abbildung $f : X \to X$ mit $f(A) \neq A$. Aus Stetigkeitsgründen muß f unendlich viele der Kreise in eine (Intervall-) Umgebung von $f(A)$ abbilden. Diese Intervallumgebung ist zusammenziehbar; also folgt, daß für diese unendlich vielen Kreise die jeweilige Inklusionsabbildung $S^1 \to X$ nullhomotop ist (d.h., homotop zu einer trivialen Abbildung). Das kann aber nicht sein: Jeder der Kreise ist Retrakt von X, und es würde folgen, daß die identische Abbildung $S^1 \to S^1$ homotop ist zu einer trivialen Abbildung — was aber, wie wir wissen, nicht der Fall ist. $\square$

Mit dem obigen Beweis des Homotopie-Erweiterungssatzes ist schließlich auch der Beweis des zellulären Approximationssatzes fertig.

Wir wollen jetzt eine weitere Anwendung zur Kenntnis nehmen: *Bis auf Homotopie läßt sich jede Abbildung zwischen CW-Komplexen schreiben als eine zelluläre Inklusion, gefolgt von einer Homotopieäquivalenz!*

Als Vorbereitung hierzu brauchen wir eine Konstruktion mit zellulären Abbildungen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall *absoluter* CW-Komplexe

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X \ .$$

Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine zelluläre Abbildung. Und sei X Unterkomplex von X'. Dann ist der zusammengeklebte Raum*

$$Z \ = \ Y \cup_X X' \qquad (\ = Y \ \dot{\cup} \ X' \ / \ _{x \sim f(x)\,,\ \text{für}\ x \in X} \ )$$

wieder ein CW-Komplex, mit Skeletten

$$Z_n \ = \ Y_n \cup_{X_n} X'_n \ .$$

Beweis. (i) Die Räume Z_n existieren, weil f zelluläre Abbildung ist, also, per Einschränkung, auch Abbildungen $X_n \to Y_n$ liefert.

(ii) Z_n entsteht aus Z_{n-1} durch Anheften von n-Zellen. Denn Z_n enthält den Unterraum

$$Y_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \ ,$$

der aus $Z_{n-1} = Y_{n-1} \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1}$ durch Anheften von n-Zellen entsteht (nämlich den n-Zellen von Y) :

$$\begin{aligned} Y_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \ &= \ (\, J \times D^n \cup_{J \times \partial D^n} Y_{n-1} \,) \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \\ &\approx \ J \times D^n \cup_{J \times \partial D^n} (\, Y_{n-1} \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \,) \ . \end{aligned}$$

Aus diesem Unterraum entsteht Z_n durch Anheften weiterer n-Zellen, denn man kann schreiben:

$$Y_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \ \approx \ (\, Y_n \cup_{X_n} X_n \,) \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \ \approx \ Y_n \cup_{X_n} (\, X_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \,) \ ,$$

sowie

$$Y_n \cup_{X_n} X'_n \;\approx\; \big(\, Y_n \cup_{X_n} (\, X_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1} \,)\,\big) \cup_{(\,X_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1}\,)} X'_n \;,$$

und X'_n entsteht ja aus $X_n \cup_{X_{n-1}} X'_{n-1}$ durch Anheften von n-Zellen, nämlich derjenigen Zellen, die nicht zu dem Unterkomplex X_n gehören.

(iii) Zu zeigen ist noch, daß die Abbildung $\dot{\bigcup} Z_n \longrightarrow Z$ Quotientenabbildung ist. Das folgt aber, weil (nach Definition) die anderen Abbildungen in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\dot{\bigcup}_n \left(Y_n \;\dot{\cup}\; X'_n \right) & \longrightarrow & Y \;\dot{\cup}\; X' \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\dot{\bigcup}_n Z_n & \longrightarrow & Z
\end{array}$$

Quotientenabbildungen sind. $\square$

Nach dieser Vorbereitung kommen wir nun zu dem schon angekündigten 'Abbildungs-Zylinder'. Zunächst sagt man ganz allgemein für eine Abbildung von topologischen Räumen, $f\colon X \to Y$, daß der *Abbildungszylinder* $Z(f)$ folgendermaßen definiert sein soll.

Nämlich, der Raum X wird zunächst 'aufgedickt' zu $X \times [0.1]$, und das 'hintere Ende' dieser Aufdickung, also $X \times 1$, wird dann an den Raum Y angeheftet vermöge der Abbildung f.

Oder, in technischer Sprache,

$$Z(f) \;=\; X \times [0,1] \cup_{X \times 1} Y \;;$$

der Quotientenraum der disjunkten Vereinigung $X \times [0,1] \;\dot{\cup}\; Y$ bezüglich der Äquivalenzrelation, die erzeugt ist von $(x,1) \sim f(x)$, für $x \in X$.

Die Konstruktion hat die folgenden (offensichtlichen) Eigenschaften:

Es gibt eine Projektion $p\colon Z(f) \to Y$. Sie ist induziert von der Abbildung "Projektion auf den ersten Faktor" $X \times [0,1] \to X$; nämlich als die Abbildung

$$X \times [0,1] \cup_{X \times 1} Y \;\longrightarrow\; X \cup_X Y \;\approx\; Y \;.$$

Es gibt eine Inklusion $j_0\colon X \to Z(f)$. Sie ist induziert von $x \mapsto (x,0)$; nämlich als die Zusammensetzung

$$X \;\longrightarrow\; X \times [0,1] \;\dot{\cup}\; Y \;\longrightarrow\; X \times [0,1] \cup_{X \times 1} Y$$

Es gilt, daß die Komposition von der Inklusion j_0 mit der Projektion p gleich der ursprünglichen Abbildung f ist.

Es gibt auch eine Inklusion $j_1\colon Y \to Z(f)$. Die Komposition der Inklusion j_1 mit der Projektion p ist die identische Abbildung auf Y.

Schließlich gilt auch noch, daß Y tatsächlich Deformationsretrakt von $Z(f)$ ist: Die Kontraktion von $[0,1]$ auf den Endpunkt 1 induziert eine Deformation von $X \times [0,1]$

auf $X \times 1$, und damit auch eine Homotopie, relativ zu dem Unterraum $j_1(Y)$, von der identischen Abbildung auf $Z(f)$ zu der Abbildung $j_1 \circ p$.

Wenn nun X und Y CW-Komplexe sind, so hätte man gern, daß auch der Abbildungszylinder ein CW-Komplex ist. Beim zweiten Hinschauen stellt man aber fest, daß es in dieser Allgemeinheit in Wirklichkeit keine Chance gibt. Es ist nämlich nötig, zu verlangen, daß die fragliche Abbildung sich *in Bezug auf die Zellenstruktur vernünftig verhält*; mit anderen Worten, daß es sich um eine *zelluläre* Abbildung handelt. Damit kommt man andererseits aber auch hin.

Seien X und Y (absolute) CW-Komplexe, und sei $f : X \to Y$ eine *zelluläre* Abbildung. Der Abbildungszylinder $Z(f)$ ist dann auf natürliche Weise wieder ein CW-Komplex, nämlich:

(i) Das Intervall $[0,1]$ ist CW-Komplex in naheliegender Weise (mit zwei 0-Zellen und einer 1-Zelle).

(ii) Der Produktraum $X \times [0,1]$ ist dann auch CW-Komplex (früherer Satz) und enthält die Unterräume $X \times 0$ und $X \times 1$ als Unterkomplexe.

(iii) Da die Abbildung f als zellulär vorausgesetzt war, ist dann auch der zusammengeklebte Raum $Z(f) = X \times [0,1] \cup_{X \times 1} Y$ wieder ein CW-Komplex (nach dem vorigen Satz).

Die Inklusionen $j_0 : X \to Z(f)$ und $j_1 : Y \to Z(f)$ sind jetzt zelluläre Inklusionen (d.h., sie gestatten uns, X und Y als Unterkomplexe von $Z(f)$ aufzufassen). Die Abbildung $p : Z(f) \longrightarrow Y$ ist ebenfalls zellulär.

Außer den Zellen von $Z(f)$, die in den Unterkomplexen X und Y enthalten sind, gibt es noch einen weiteren Typ von Zellen: Jede n-Zelle von X ergibt, mit der 1-Zelle von $[0,1]$ kombiniert, eine $(n+1)$-Zelle von $Z(f)$.

Satz. *Sei $g : X \to Y$ eine Abbildung von CW-Komplexen. Dann gibt es eine zu g homotope Abbildung f, die geschrieben werden kann als eine zelluläre Inklusion gefolgt von einer zellulären Abbildung, wobei letztere Abbildung eine Homotopieäquivalenz ist.*

Beweis. Anwendung des zellulären Approximationssatzes liefert eine zu g homotope Abbildung f, die zellulär ist. f ist dann gleich der zusammengesetzten Abbildung

$$X \xrightarrow{j_0} Z(f) \xrightarrow{p} Y . \qquad \square$$

Whitehead-Satz

Wir wollen uns jetzt dem Beweis des Satzes von Whitehead zuwenden, daß eine Abbildung zwischen 'vernünftigen' Räumen (d.h., CW-Komplexen — oder CW-Komplexen bis auf Homotopieäquivalenz), daß also eine solche Abbildung schon dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn sie Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert. Der Beweis geht in drei Schritten.

1. *Reduktion auf den Fall einer Inklusionsabbildung*

2. *Formulierung (und Beweis) eines solchen Satzes, in dem Homotopiegruppen gar nicht vorkommen*

3. *Übersetzung des letzten Schrittes in eine Formulierung mit Homotopiegruppen.*

Der erste Schritt ist durch die Konstruktion des Abbildungszylinders im wesentlichen schon geleistet, wir werden bei der endgültigen Formulierung noch einmal darauf eingehen. Wir kommen jetzt zum zweiten Schritt.

Definition. Sei Y topologischer Raum und $B \subset Y$ Unterraum. Die Inklusion $B \to Y$ heißt *n-zusammenhängend*, wenn für jedes $m \leq n$ und für jede Abbildung

$$g: \ (D^m, \partial D^m) \ \longrightarrow \ (Y, B)$$

gilt: Es gibt eine Homotopie, relativ ∂D^m, von g zu einer Abbildung, deren Bild ganz in B enthalten ist.

Beispiele. 1) Ist B Deformationsretrakt von Y, so ist $B \to Y$ n-zusammenhängend für alle n.

2) Der Fall $n = 0$ besagt: Jeder Punkt von Y ist deformierbar in einen solchen von B (m.a.W., die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_0(B) \to \pi_0(Y)$ ist surjektiv).

Wie bereits angedeutet, werden wir diese Begriffsbildung später (3. Schritt) "noch algebraischer" (nämlich mit Hilfe von Homotopiegruppen) formulieren.

Satz. *Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex. Sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung, wobei (Y, B) n-zusammenhängend ist. Dann ist f homotop zu einer Abbildung mit*

$$\text{Bild}\,(X_n) \subset B\ .$$

Beweis. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Abbildungen $f_m\colon (X, A) \to (Y, B)$, $m = -1, 0, 1, \ldots, n$, $f_{-1} = f$, mit $f_m(X_m) \subset B$, wobei jeweils f_m homotop zu f_{m-1} ist, bezüglich einer Homotopie, die auf X_{m-1} konstant ist.

Sei $m \geq 0$ und sei f_{m-1} bereits konstruiert; wir wollen jetzt f_m konstruieren. Per Einschränkung liefert f_{m-1} eine Abbildung

$$(X_m, X_{m-1}) \longrightarrow (Y, B) \ .$$

Sei $(D^m, \partial D^m) \to (X_m, X_{m-1})$ repräsentierende Abbildung für eine der m-Zellen. Nach Definition von "*n-zusammenhängend*" (und weil $m \leq n$) gibt es nun eine Homotopie, relativ ∂D^m, von der zusammengesetzten Abbildung

$$(D^m, \partial D^m) \longrightarrow (X_m, X_{m-1}) \longrightarrow (Y, B)$$

zu einer Abbildung mit Bild in B.

Allgemeiner, wenn J die Indexmenge für die m-Zellen von (X, A) ist, dann gibt es eine Homotopie, relativ $J \times \partial D^m$, von der zusammengesetzten Abbildung

$$(J \times D^m, J \times \partial D^m) \longrightarrow (X_m, X_{m-1}) \longrightarrow (Y, B)$$

zu einer Abbildung mit Bild in B. Zusammen mit der konstanten Homotopie auf X_{m-1} liefert dies, per Verkleben, eine Homotopie auf X_m, relativ X_{m-1}, von der Einschränkung von f_{m-1} auf X_m zu einer Abbildung auf X_m mit Bild (X_m) ganz enthalten in B. Mit Hilfe der HEE für das Paar (X, X_m) erhalten wir dann eine Homotopie relativ X_{m-1}, von f_{m-1} zu unserem gesuchten f_m. □

Definition. Eine Inklusion $B \to Y$ heißt eine *schwache Homotopieäquivalenz*, wenn sie n-zusammenhängend ist für alle n.

Bemerkung. Allgemeiner gibt es diese Vokabel für Abbildungen, die nicht notwendig Inklusionen sind (die Definition lautet dann, etwa, "eine Abbildung, die Isomorphismen sämtlicher Homotopiegruppen induziert"). Die Wortwahl bei der Begriffsbildung ist vielleicht ein wenig unglücklich. Sie dürfte herkommen von "wird impliziert von Homotopie-Äquivalenz, ist aber möglicherweise ein wenig schwächer". *Schwache* Homotopie-Äquivalenz ist jedenfalls im allgemeinen *keine* Äquivalenzrelation. Es folgt allerdings aus dem Whitehead-Satz, daß schwache Homotopie-Äquivalenz zumindest für CW-Komplexe doch eine Äquivalenzrelation ist. □

Satz. *Die Inklusion $B \to Y$ sei eine schwache Homotopieäquivalenz. Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex und*

$$f : \ (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

eine Abbildung. Dann ist f homotop, relativ A, zu einer Abbildung mit Bild in B.

Beweis. Wir geben eine Folge von Abbildungen $(X, A) \to (Y, B)$ an,

$$f = f_{-1} \, , \ f_0 \, , \ f_1 \, , \ \ldots$$

und von Homotopien

$$F_0 \, , \ F_1 \, , \ \ldots \ ,$$

wobei F_n eine Homotopie, relativ X_{n-1}, von f_{n-1} zu f_n ist, und $f_n(X_n) \subset B$.

Die induktive Konstruktion von f_n und F_n , ausgehend von f_{n-1} , wurde im Beweis des vorigen Satzes bereits angegeben. Wie im Beweis des Zelluläre-Approximations-Satzes kann man diese unendlich vielen Homotopien nun zusammenbauen zu *einer einzigen* Homotopie (derselbe Trick, dieselbe Formel; vgl. S. 29). Letztere Homotopie liefert als ihren 'Endzustand' insbesondere die gesuchte Abbildung. $\square$

KOROLLAR. *Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex. Die Inklusion $A \to X$ sei schwache Homotopieäquivalenz. Dann ist A Deformationsretrakt von X .*

BEWEIS. Wir wenden den vorigen Satz an auf die identische Abbildung $(X, A) \to (X, A)$. Dies zeigt, es gibt eine Homotopie, relativ A , von Id_X zu einer Abbildung mit Bild in A . $\square$

Homotopiegruppen

Als nächstes wollen wir uns jetzt mit *Homotopiegruppen* beschäftigen. Wie schon bei der Fundamentalgruppe, so braucht man aus technischen Gründen immer einen *Basispunkt* (man benötigt ihn, um die Gruppenstruktur zu definieren).

Bezeichne also $s_0 \in S^n$ einen ein für allemal fest gewählten Punkt (z.B. den Südpol —welchen Punkt man nimmt, ist letztlich irrelevant; es gibt ja zu z.B. auch zu je zwei Punkten immer eine topologische Äquivalenz von S^n auf sich, die diese beiden Punkte ineinander überführt).

DEFINITION. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt, der Basispunkt. Dann ist $\pi_n(X, x_0)$ definiert als die *Menge der Homotopieklassen von Abbildungen*

$$(S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

(d.h., stetigen Abbildungen $S^n \to X$ mit $s_0 \mapsto x_0$; und 'Homotopien' solcher Abbildungen sind relativ zu s_0) .

DER FALL $n = 0$. Die 0-Sphäre S^0 ist die disjunkte Vereinigung zweier Punkte, und auf einem davon (nämlich auf s_0) ist über die Abbildung schon verfügt. Die Menge $\pi_0(X, x_0)$ ist daher in 1:1 Beziehung zu der Menge der Wegzusammenhangsklassen von Punkten in X (die wir früher mit $\pi_0(X)$ bezeichnet hatten). Die jetzt vorgenommene Auswahl des Basispunktes bewirkt nur, daß unter den Wegzusammenhangskomponenten von X nunmehr eine als ausgezeichnet betrachtet wird, nämlich diejenige, die den Punkt x_0 enthält. Die punktierte Menge $\pi_0(X, x_0)$ läßt sich *i.a. nicht* auf vernünftige Weise mit einer Gruppenstruktur versehen.

DER FALL $n > 0$. Da S^n wegzusammenhängend ist für $n > 0$, hat jeder Repräsentant von $\pi_n(X, x_0)$ sein Bild ganz in der Wegzusammenhangskomponente des Basispunktes x_0 . Das heißt, $\pi_n(X, x_0)$ 'sieht' nur diese eine Wegzusammenhangskomponente. Oder anders gesagt, es ist $\pi_n(X', x_0) \xrightarrow{\approx} \pi_n(X, x_0)$, wenn X' die x_0 enthaltende Wegzusammenhangskomponente bezeichnet. Die Menge $\pi_n(X, x_0)$ enthält ein ausgezeichnetes Element, nämlich die Klasse der trivialen Abbildung $S^n \to x_0$.

Im Falle $n = 1$ läßt sich $\pi_n(X, x_0)$ in einer schon bekannten Weise mit einer Gruppenstruktur versehen; das Resultat ist die Fundamentalgruppe. Dasselbe Verfahren (im wesentlichen) liefert auch eine Gruppenstruktur für $n \geq 2$; wir gehen später im Detail darauf ein. Dabei werden wir die etwas überraschende Tatsache zur Kenntnis nehmen, daß diese Gruppen (für $n \geq 2$) immer abelsch sind.

MERKREGEL. Je höher der Index, desto “besser” die Struktur

$n = 0$: *punktierte Menge*

$n = 1$: *Gruppe*

$n \geq 2$: *abelsche Gruppe.*

In allen Fällen ist das ausgezeichnete Element $S^n \to x_0$ von $\pi_n(X, x_0)$ auch das neutrale Element für die Gruppenstruktur.

Die Konstruktion von $\pi_n(X, x_0)$ ist ‘natürlich’ im technischen Sinn. Das heißt, die Konstruktion ist mit Abbildungen verträglich (was eine *sehr* wichtige Eigenschaft ist). Sei nämlich $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine *Abbildung von punktierten Räumen* (d.h., eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$). f induziert dann eine Abbildung

$$f_* : \ \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

in naheliegender Weise. Wenn nämlich $[\alpha]$ die Klasse von $\alpha\colon (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ bezeichnet, dann wird $f_*([\alpha])$ definiert als $[f \circ \alpha]$, die Klasse der zusammengesetzten Abbildung

$$f \circ \alpha : \ (S^n, s_0) \longrightarrow (Y, y_0) \ , \quad (S^n, s_0) \xrightarrow{\ \alpha\ } (X, x_0) \xrightarrow{\ f\ } (Y, y_0) \ .$$

Es ist klar (oder?), daß dies wohldefiniert ist, d.h., daß die Klasse $[f \circ \alpha]$ nur abhängt von der Klasse $[\alpha]$, nicht von dem Repräsentanten α selbst.

Ist speziell A ein Unterraum von X und $x_0 \in A$, dann induziert die Inklusionsabbildung $A \to X$ auch Abbildungen $\pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$. Wenn diese Abbildungen keine Isomorphismen sind, was ja vermutlich im allgemeinen der Fall sein wird, so hätte man gern eine Art von ‘Maß’ dafür, wieweit die Abbildungen davon abweichen, Isomorphismen zu sein. Interessanterweise nun ist es möglich, genau so eine Art Maß wirklich zu bauen.

Dazu definiert man die *relativen Homotopiegruppen* $\pi_n(X, A, x_0)$. Diese sind gerade so gemacht, wie sich in Kürze herausstellen wird, daß sie (bei wegzusammenhängendem X) *genau dann* sämtlich trivial sind, *wenn* die Abbildungen $\pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ sämtlich Isomorphismen sind.

DEFINITION. $\pi_n(X, A, x_0)$ ist die *Menge der Homotopieklassen von Abbildungen*

$$\alpha : \ \bigl(D^n, S^{n-1}, s_0\bigr) \longrightarrow (X, A, x_0) \ .$$

Im Detail: D^n ist der n-dimensionale Ball, S^{n-1} ist die Randsphäre von D^n, $s_0 \in S^{n-1}$ ist der Basispunkt (die vorausgesetzte Existenz des Basispunktes erzwingt, daß $S^{n-1} \neq \emptyset$, also $n \geq 1$). α ist eine Abbildung $D^n \to X$, die zwei Bedingungen erfüllt, nämlich $\alpha\bigl(S^{n-1}\bigr) \subset A$ und $\alpha(s_0) = x_0$. Der Begriff *Homotopieklassen* bezieht sich auf Abbildungen eben dieses Typs: d.h., als *Homotopie* bezeichnen wir hier eine stetige Familie von Abbildungen α_t, $t \in [0,1]$, mit $\alpha_t\bigl(S^{n-1}\bigr) \subset A$ und $\alpha_t(s_0) = x_0$ für alle t.

Die Menge $\pi_n(X,A,x_0)$ hat ein ausgezeichnetes Element (nämlich die Klasse der trivialen Abbildung $D^n \to x_0$), und es gilt wiederum die Merkregel, daß mit wachsendem Index n die Struktur immer besser wird: $\pi_n(X,A,x_0)$ ist definiert für $n \geq 1$, es hat eine Gruppenstruktur für $n \geq 2$ (wie wir uns später im Detail überlegen werden), und für $n \geq 3$ ist diese Gruppenstruktur sogar abelsch.

Die Definition von $\pi_n(X,A,x_0)$ ist 'natürlich' im technischen Sinn, d.h., eine Abbildung $(X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$ (eine Abbildung $X \to Y$ mit $A \to B$ und $x_0 \to y_0$) induziert Abbildungen

$$\pi_n(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_n(Y,B,y_0)$$

wie es sich gehört.

Speziell hat man Abbildungen $\pi_n(X,\{x_0\},x_0) \to \pi_n(X,A,x_0)$. Diese sind interessant wegen

Satz. *Es gilt* $\pi_n\,(X,\{x_0\},x_0) \;\approx\; \pi_n(X,x_0)$ *für jedes* $n \geq 1$.

Beweis. Klar, denn die Abbildungen $\big(D^n,S^{n-1},s_0\big) \to (X,\{x_0\},x_0)$ sind in 1:1 Beziehung zu den Abbildungen des Quotientenraumes $\big(D^n/S^{n-1},s_0\big) \to (X,x_0)$; diese 1:1 Beziehung respektiert *Homotopie*, und $D^n/S^{n-1} \approx S^n$. □

Man hat also insgesamt eine natürliche Abbildung

$$\pi_n(X,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,A,x_0)\ .$$

Man hat auch eine natürliche Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X,A,x_0) & \xrightarrow{\qquad\qquad} & \pi_{n-1}(A,x_0) \\ \big(\ \alpha\colon\ (D^n,S^{n-1},s_0) \to (X,A,x_0)\ \big) & \longmapsto & \big(\ \alpha\,|\,S^{n-1}\colon\ (S^{n-1},s_0) \to (A,x_0)\ \big)\ . \end{array}$$

Zusammen mit den Abbildungen $\pi_n(A,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)$ bekommt man so die *lange Folge der Homotopiegruppen* von (X,A,x_0),

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_n(A,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,A,x_0) \longrightarrow \cdots$$

Die Folge endet mit

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(X,A,x_0) \longrightarrow \pi_0(A,x_0) \longrightarrow \pi_0(X,x_0)\ .$$

Die letzten drei Terme hier sind keine Gruppen, sondern nur punktierte Mengen. Das soll uns aber nicht weiter stören.

Wie früher schon angekündigt wurde, so messen die relativen Homotopiegruppen, wie weit die Abbildungen $\pi_n(A,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)$ von Isomorphismen abweichen. Dies können wir jetzt präzisieren in einer nunmehr einzuführenden Sprechweise: Die lange Folge der Homotopiegruppen ist eine *exakte Folge* im Sinne der folgenden Definition.

Definition. Sei $g : L \to M$ eine Abbildung von punktierten Mengen, wo M den Basispunkt m_0 hat. Das Urbild $g^{-1}(m_0)$ wird als der *Kern* der Abbildung g bezeichnet. Sei

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$$

eine drei-Term-Folge von Abbildungen von punktierten Mengen. Die Folge heißt *exakt* (oder genauer auch: *exakt an der Stelle* L), wenn gilt

$$\mathrm{Bild}(f) \;=\; \mathrm{Kern}(g)\;.$$

Eine lange Folge von punktierten Mengen

$$\cdots \longrightarrow L_{m+2} \longrightarrow L_{m+1} \longrightarrow L_m \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow \cdots$$

heißt *exakt* oder heißt eine *exakte Folge* wenn gilt, daß jede der drei-Term-Folgen $L_{n+1} \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1}$ exakt ist.

Der Begriff der exakten Folge ist absolut fundamental. Man muß sich damit vertraut machen.

Beispiele. (a) Sei $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} \{*\}$ exakt, wo $\{*\}$ eine einpunktige Menge bezeichnet. In diesem Fall ist $\mathrm{Kern}(g) = L$. Die Beziehung $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$ besagt also in dem Fall, daß die Abbildung f *surjektiv* ist.

(b) Sei $\{*\} \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ eine exakte Folge von Gruppen. (Die Abbildungen seien Gruppenhomomorphismen, und die Einselemente seien als die ausgezeichnete Elemente angesehen). Die Beziehung $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$ besagt in dem Fall, daß g trivialen (= einelementigen) Kern hat. Da g ein Gruppenhomomorphismus ist, ist dies äquivalent dazu, daß g *injektiv* ist.

Zur weiteren Illustration des Begriffs dient der folgende Satz.

Satz. *Sei X wegzusammenhängender Raum. Sei A Unterraum von X. Sei $x_0 \in A$. Es sind folgende beiden Aussagen zueinander äquivalent:*
(i) $\pi_n(X, A, x_0) \;=\; \{*\}$, *für* $n = 1, 2, \ldots$
(ii) *Die Abbildung* $i_*\colon \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ *ist ein Isomorphismus für alle* n.

Beweis. Im Vorgriff auf noch zu behandelnde Dinge benutzen wir:

(1) *Die Exaktheit der langen Folge*

(2) *Die algebraische Struktur von* $\pi_n(\ldots)$

“(i) $\Rightarrow$ (ii)” Beispiel (a) angewandt auf die Teilfolge

$$\pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) \;=\; \{*\}$$

ergibt die Surjektivität von i_* (für $n \geq 1$). Beispiel (b) angewandt auf die Folge von Gruppen (für $n \geq 1$)

$$\{*\} \;=\; \pi_{n+1}(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0)$$

ergibt die Injektivität von i_* (für $n \geq 1$).

Der Fall $n = 0$ ist eine (triviale) Ausnahme. Nämlich nach Voraussetzung ist $\pi_0(X, x_0) = \{*\}$, deshalb

$$\begin{aligned}\pi_0(A, x_0) &= \text{Kern}\,(\ \pi_0(A, x_0) \to \pi_0(X, x_0)\ ) \\ &= \text{Bild}\,(\ \pi_1(X, A, x_0) \to \pi_0(A, x_0)\ )\ =\ \{*\}\ ,\end{aligned}$$

also ist $\pi_0(A, x_0) \to \pi_0(X, x_0)$ auch in diesem Fall ein Isomorphismus.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Wegen der Injektivität von i_* ist

$$\text{Bild}\,(\ \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)\ )\ =\ \text{Kern}\,(\ \pi_{n-1}(A, x_0) \to \pi_{n-1}(X, x_0)\ )\ =\ \{*\}\ .$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\pi_n(X, A, x_0) &= \text{Kern}\,(\ \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)\ ) \\ &= \text{Bild}\,(\ \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)\ )\end{aligned}$$

d.h., $\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$ ist surjektiv.

Wegen der Surjektivität von i_* gilt andererseits

$$\begin{aligned}\pi_n(X, x_0) &= \text{Bild}\,(\ \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)\ ) \\ &= \text{Kern}\,(\ \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)\ )\end{aligned}$$

Folglich ist $\text{Bild}\,(\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0))$ trivial und damit (wegen der vorher nachgewiesenen Surjektivität) auch $\pi_n(X, A, x_0)$ selbst trivial. □

Bemerkung. Tatsächlich liefert der vorstehende Beweis auch einen etwas allgemeineren Sachverhalt: *In der Situation des Satzes* (X wegzusammenhängend, A Unterraum von X, $x_0 \in A$) *sind zueinander äquivalent*:

(i) $\pi_n(X, A, x_0) = \{*\}$, *für* $n = 1, 2, \ldots, m$.

(ii) $i_* \colon \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ *ist isomorph für* $n < m$ *und ist surjektiv für* $n = m$.

Dies ist insbesondere deshalb interessant, als die Aussage (i) äquivalent ist dazu, daß (X, A) m-zusammenhängend ist:

Satz. *Sei X wegzusammenhängender Raum. Sei A Unterraum von X. Sei $x_0 \in A$. Es sind äquivalent*:

(i) $\pi_n(X, A, x_0) = \{*\}$, *für alle* $n = 1, 2, \ldots, m$

(ii) (X, A) *ist* m*-zusammenhängend.*

Beweis. Für das folgende Argument dürfen wir zusätzlich annehmen, daß der Raum A wegzusammenhängend ist. Denn zu vorgegebenem $a \in A$ gibt es eine Abbildung

$$\big(D^1, \partial D^1\big) \longrightarrow (X, A) \quad \text{mit} \quad \text{Bild}\,\big(\partial D^1\big)\ =\ \{x_0, a\}\ ,$$

weil X wegzusammenhängend ist. Wenn wir die Aussage (i) als gegeben annehmen, so folgt, daß diese Abbildung deformierbar ist (in spezieller Weise!) in eine triviale Abbildung; wenn wir die Aussage (ii) als gegeben annehmen, so folgt, daß die Abbildung deformierbar ist (relativ Rand) in eine Abbildung mit Bild in A. In jedem Falle folgt also, daß a mit x_0 durch einen Weg in A verbindbar ist. Ein Weg von x_0 zu x_1 in A nun induziert einen Isomorphismus

$$\pi_n(X,A,x_0) \xrightarrow{\approx} \pi_n(X,A,x_1)$$

nach einem einfachen Argument, das wir später (in Zusammenhang mit dem Kompositionsgesetz) zur Kenntnis nehmen werden. Die Aussage " $\pi_n(X,A,x_0) = \{*\}$ " hängt also nicht von dem gewählten Basispunkt x_0 ab. Der Satz folgt damit aus dem folgenden Hilfssatz (den wir später auch noch benötigen werden, um die *Exaktheit* der langen Folge nachzuweisen).

HILFSSATZ. *Gegeben sei* $\alpha\colon (D^n,\partial D^n) \to (X,A)$, *mit* $\alpha(s_0)=x_0$. *Es sind äquivalent*:

(i) $[\alpha] =$ *Klasse der trivialen Abbildung*

(ii) *Es gibt eine Homotopie, relativ* ∂D^n , *von* α *zu einer Abbildung mit Bild in* A .

BEWEIS. " (i) $\Rightarrow$ (ii) ". Eine Homotopie von der trivialen Abbildung zu der Abbildung α ist eine Abbildung

$$F : D^n \times [0,1] \longrightarrow X$$

mit den Eigenschaften $F(D^n \times 0) = x_0$, $F \,|\, D^n \times 1 = \alpha$, und

$$F(s_0,t) = x_0 \text{ für alle } t \in [0,1] \ , \quad \text{und } F(\,\partial D^n \times [0,1]\,) \subset A \ .$$

Es wird nun genügen, zu zeigen, daß α homotop ist, relativ zu ∂D^n, zu einer zusammengesetzten Abbildung α' , der Art

$$D^n \xrightarrow{\approx} D^n \times 0 \cup_{\partial D^n \times 0} \partial D^n \times [0,1] \xrightarrow{F\,|\,—} A$$

(wo die Abbildung " $F\,|$ — " eine Einschränkung von F bezeichnet). Dazu konstruieren wir explizit eine solche Homotopie H von α zu α' . Die Homotopie H wird definiert als die Komposition der Abbildung F (die ursprüngliche Homotopie) mit einer Abbildung $G\colon D^n \times [0,1] \to D^n \times [0,1]$, die jetzt angegeben werden soll.

Die Konstruktion hat zu tun mit derjenigen, die im Nachweis der HEE für das Paar $(D^n,\partial D^n)$ verwendet wurde. Wie dort betrachten wir $D^n \times [0,1]$ als Unterraum von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$. Die gewünschte Selbst-Abbildung G des Unterraumes $D^n \times [0,1]$ wird definiert mit Hilfe der Schar von Geraden durch den Punkt $(0,2)$, $0 \in \mathbb{R}^n$, $2 \in \mathbb{R}^1$.

Kurz gesagt, eine "vertikale Strecke" in $D^n \times [0,1]$ soll durch G abgebildet werden auf den Durchschnitt von $D^n \times [0,1]$ mit einer Geraden aus der Schar.

Im Detail: Ist $x \in D^n$, so gibt es genau eine Gerade der Schar, die durch den Punkt $(x,1)$ geht. Nach Definition bildet G nun die Strecke $\{x\} \times [0,1]$ linear (oder besser vielleicht, 'affin') ab auf den Durchschnitt der fraglichen Geraden mit $D^n \times [0,1]$. Dieser Durchschnitt ist entweder selbst eine Strecke (wenn $x \in \mathring{D}^n$) oder er ist ein einziger Punkt (wenn $x \in \partial D^n$). Es ist klar (oder?), daß G eine stetige Abbildung ist; und daß sie auch die folgenden Eigenschaften hat.

(1) Die Einschränkung auf $\partial D^n \times [0,1]$ bildet alle "vertikalen Strecken" auf Punkte ab. Es folgt, daß die Homotopie $H = F \circ G$ auf dem Rand ∂D^n konstant ist.

(2) Die Einschränkung auf $D^n \times 1$ ist die identische Abbildung. Es folgt, daß H eine Homotopie ist, die mit α 'aufhört'.

(3) Die Einschränkung auf $D^n \times 0$ ist eine topologische Äquivalenz

$$D^n \times 0 \longrightarrow D^n \times 0 \cup_{\partial D^n \times 0} \partial D^n \times [0,1]$$

Es folgt, daß H eine Homotopie ist, die mit dem obigen α' 'anfängt'.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Es genügt zu zeigen, eine Abbildung $(D^n, s_0) \to (A, x_0)$ repräsentiert das triviale Element von $\pi_n(X, A, x_0)$. Klar, denn die verlangte Deformation ist induziert von einer Deformationsretraktion von D^n zu s_0. □

Satz. *Die Folge der Homotopiegruppen*

$$\longrightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{p} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow$$

ist eine lange exakte Folge.

Beweis. Wir haben drei Fälle nachzuweisen, von denen jeder aus zwei Teilaussagen besteht, nämlich

$$\text{Bild}(?) \subset \text{Kern}(??) \quad \text{und} \quad \text{Bild}(?) \supset \text{Kern}(??) .$$

Exaktheit von $\pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_n(X, A, x_0) \quad (n \geq 1)$

Sei $\alpha : (D^n, \partial D^n) \to (X, x_0)$ Repräsentant eines Elements $[\alpha]$ von $\pi_n(X, x_0)$. Wir müssen zeigen:

$$[\alpha] \in \text{Bild}(i) \quad \Rightarrow \quad (\text{bzw. '} \Leftarrow \text{'}) \quad [\alpha] \in \text{Kern}(j)$$

"$\Rightarrow$" $[\alpha] \in \text{Bild}(i)$ heißt, α ist homotop (rel. ∂D^n) zu einer Abbildung

$$\alpha' : (D^n, \partial D^n) \longrightarrow (A, x_0) .$$

Aber als Abbildung $(D^n, \partial D^n, s_0) \to (X, A, x_0)$ aufgefaßt, repräsentiert α' das triviale Element von $\pi_n(X, A, x_0)$ (siehe obigen Hilfssatz).

"$\Leftarrow$" Wenn $\alpha : (D^n, \partial D^n) \to (X, x_0)$, aufgefaßt als Repräsentant eines Elements von $\pi_n(X, A, x_0)$, das triviale Element repräsentiert, dann gibt es nach dem Hilfssatz eine Homotopie, relativ ∂D^n, von α zu einer Abbildung mit Bild in A.

Exaktheit von $\pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{p} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_n(X, x_0)$

Sei $\alpha\colon (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(a) α ist nullhomotop relativ s_0

(b) α läßt sich erweitern zu einer Abbildung von D^{n+1}.

Wir haben dies früher zur Kenntnis genommen in einer Formulierung ohne Basispunkte. Mit Basispunkten ist es auch nicht schwieriger:

(a) $\Rightarrow$ (b) weil $S^n \times [0,1] / S^n \times 1 \approx D^{n+1}$

(b) $\Rightarrow$ (a) weil s_0 Deformationsretrakt von D^{n+1} ist.

Speziell für Abbildungen $\alpha\colon (S^n, s_0) \to (A, x_0)$ ist Aussage (a) gleichbedeutend mit $[\alpha] \in \operatorname{Kern}(i)$, und Aussage (b) ist gleichbedeutend mit $[\alpha] \in \operatorname{Bild}(p)$. Es folgt, daß $\operatorname{Kern}(i) = \operatorname{Bild}(p)$.

Exaktheit von $\pi_{n+1}(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{p} \pi_n(A, x_0)$

Sei $[\alpha] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$, sei $\alpha\colon (D^{n+1}, \partial D^{n+1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ ein Repräsentant von $[\alpha]$. Die Aussage "$[\alpha] \in \operatorname{Bild}(j)$" ist gleichbedeutend damit, daß die Abbildung α homotop ist zu einer Abbildung α' mit $\alpha'(\partial D^{n+1}) = x_0$. Daraus folgt $p[\alpha] = p[\alpha'] = [\alpha' \,|\, \partial D^{n+1}]$ ist trivial.

Umgekehrt, $p[\alpha]$ trivial heißt, es gibt eine Homotopie, relativ s_0, von $\alpha \,|\, \partial D^{n+1}$ zur trivialen Abbildung. Nach der HEE von $(D^{n+1}, \partial D^{n+1})$ folgt, es gibt eine Homotopie von α zu α'', die diese Homotopie erweitert. α'' hat dann die Eigenschaft $\alpha''(\partial D^{n+1}) = x_0$, also $[\alpha] = [\alpha''] \in \operatorname{Bild}(j)$. $\square$

Wir wollen nun die *Gruppenstruktur* auf der Menge $\pi_n(X, A, x_0)$ beschreiben (dazu müssen wir annehmen $n \geq 1$ und, wenn der Unterraum A nicht nur aus dem Basispunkt x_0 besteht, sogar $n \geq 2$).

Wir geben zunächst eine Beschreibung im Rahmen unserer bisher benutzten Definition von $\pi_n(X, A, x_0)$; dabei beschränken wir uns auf den absoluten Fall (der Fall, wo der Unterraum A eigentlich gar nicht da ist; also nur aus dem Basispunkt besteht).

Bezeichne $S^n \vee S^n$ den Raum, der durch das "Verkleben zweier n-Sphären an ihren Basispunkten" entsteht (d.h., der Quotientenraum der disjunkten Vereinigung der beiden Sphären, der dadurch entsteht, daß die beiden Punkte identifiziert werden). Die Abbildungen

$$\alpha\colon\ (S^n \vee S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

sind dann in 1:1 Beziehung zu den Paaren von Abbildungen

$$\alpha_1\colon (S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)\ , \qquad \alpha_2\colon (S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)\ ;$$

dabei ist z.B. α_1 durch α gegeben als die Komposition

$$(S^n, s_0) \xrightarrow{\text{erste Inklusion}} (S^n \vee S^n, s_0) \xrightarrow{\ \ \alpha\ \ } (X, x_0)\ .$$

Aus α (oder was dasselbe ist, aus dem Paar (α_1, α_2)) gewinnt man eine neue Abbildung, die mit $\alpha_1 + \alpha_2$ bezeichnet werden soll, dadurch, daß man mit einer ganz bestimmten Abbildung $p\colon S^n \to S^n \vee S^n$ zusammensetzt. Nämlich $S^n \vee S^n$ kann identifiziert werden mit dem Quotientenraum $S^n/\,$Äquator (vorausgesetzt, $n \geq 1$); für p nimmt man die Quotientenabbildung

$$S^n \longrightarrow S^n/\,\text{Äquator} \ \approx\ S^n \vee S^n\ ;$$

und man definiert dann

$$\alpha_1 + \alpha_2 := \alpha \circ p\ .$$

Diese Komposition ist mit dem Übergang zu Homotopieklassen verträglich (was wir hier nicht weiter nachprüfen), deshalb kann man schließlich auch definieren

$$[\alpha_1] + [\alpha_2] \ := \ [\,\alpha_1 + \alpha_2\,]\ .$$

Es ist eine nützliche Übung, sich im Rahmen dieser Beschreibung zumindest folgendes klarzumachen: (1) das triviale Element ist neutrales Element für das Kompositionsgesetz, (2) inverse Elemente existieren, (3) es gilt das Assoziativgesetz für die Komposition; denn folgendes Diagramm kommutiert bis auf Homotopie (d.h., die beiden zusammengesetzten Abbildungen in dem Diagramm, von oben links nach unten rechts, sind zueinander homotop)

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & S^n \vee S^n \arrow[d, "\mathrm{Id} \vee p"] \\ S^n \vee S^n \arrow[r, "p \vee \mathrm{Id}"'] & S^n \vee S^n \vee S^n \end{tikzcd}$$

Wir kommen nun zu der zweiten Beschreibung für das Kompositionsgesetz. Dazu ersetzen wir in der Definition von $\pi_n(X, A, x_0)$ den n-dimensionalen Ball durch den n-dimensionalen Würfel. Der Grund dafür ist der, daß uns die Produktstruktur des Würfels ein explizites Hantieren mit Koordinaten gestattet. So werden wir z.B. in der Lage sein, eine Formel hinzuschreiben, bei der eine einzige der Koordinaten manipuliert wird, während die anderen Koordinaten alle in Ruhe gelassen werden.

Es bezeichne I^n den n-dimensionalen Würfel

$$I^n \ = \ \{\ (t_1, \dots, t_n) \ \mid \ t_i \in [0,1]\ \}\ .$$

Etwas mißbräuchlich werden wir die durch $t_n = 0$ gegebenen Seite von I^n mit I^{n-1} bezeichnen; mit J^{n-1} bezeichnen wir die Vereinigung der restlichen Seiten. Es ist

$$I^{n-1} \cup J^{n-1} \ = \ \partial I^n \quad \text{und} \quad I^{n-1} \cap J^{n-1} \ = \ \partial I^{n-1}\ .$$

Die Situation in Bezug auf diese beiden Unterräume ist, was den topologischen Typ angeht, nicht so unsymmetrisch wie das auf den ersten Blick aussieht; so gibt es z.B. eine topologische Äquivalenz von I^n auf den n-Ball D^n, bei der J^{n-1} auf die nördliche Halbkugel in S^{n-1} abgebildet wird, und I^{n-1} auf die südliche.

Unsere neue Definition nun sagt, daß $\pi_n(X, A, x_0)$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen

$$\big(I^n, \partial I^n, J^{n-1}\big) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

ist; oder, was auf dasselbe hinausläuft (da J^{n-1} notwendigerweise trivial abgebildet wird), die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen

$$\big(I^n/J^{n-1},\ \partial I^n/J^{n-1},\ J^{n-1}/J^{n-1}\big) \ \longrightarrow \ (X, A, x_0)\ .$$

Die neue Definition ist äquivalent zu der früheren; denn von dem Quotientenraum I^n/J^{n-1} gibt es eine topologische Äquivalenz zu D^n; und dabei geht $\partial I^n/J^{n-1}$ in ∂D^n über (und J^{n-1}/J^{n-1} in den Basispunkt s_0).

Seien $[f]$, $[g] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Wir *definieren* $[f] + [g] := [\,f{+}g\,]$, wo

$$(f{+}g)\,(t_1, \ldots, t_n) \;=\; \begin{cases} f(\,2t_1\,,\, t_2, \ldots, t_n) & ; \quad 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ g(\,2t_1{-}1,\, t_2, \ldots, t_n) & ; \quad \frac{1}{2} \le t_1 \le 1\,. \end{cases}$$

Die Formel für die Abbildung $f{+}g$ ist sinnvoll (d.h., auch wohldefiniert für $t_1 = \frac{1}{2}$), wenn entweder $n \ge 2$ oder wenn $n \ge 1$ und $A = \{x_0\}$; diese Komposition von Abbildungen ist verträglich mit ‘Homotopie’ (wir verzichten hier auf den Nachweis), deshalb induziert sie auch eine Komposition auf der Menge der Homotopieklassen (wie oben in der Notation schon behauptet).

Sobald es überhaupt definiert ist, ist das Kompositionsgesetz assoziativ *bis auf Homotopie*; d.h., sind f, g und h repräsentierende Abbildungen, dann ist

$$(f+g)+h \;\simeq\; f+(g+h)\;.$$

Um dies einzusehen, schreibt man eine ganz bestimmte Homotopie hin; diese besteht aus einer Manipulation der t_1-Koordinate, die Formel für die Manipulation ist schon bekannt von der Behandlung der Fundamentalgruppe. Ähnlich sieht man ein, daß die triviale Abbildung das neutrale Element repräsentiert, und daß Inverse existieren.

Mit der Verwendung des ‘ + ’ Zeichens soll im übrigen hier natürlich nicht behauptet werden, daß das Kompositionsgesetz immer kommutativ ist. Tatsächlich ist aber das Kompositionsgesetz kommutativ, wenn entweder $n \ge 3$ oder $n \ge 2$ und $A = \{x_0\}$.

Das hängt damit zusammen, daß in diesem Fall *zwei* Koordinaten zur Verfügung stehen, um das Kompositionsgesetz zu definieren, nämlich die t_1-Koordinate (wie oben) und zusätzlich auch die t_2-Koordinate (analog). Wir überlegen uns zunächst, daß diese beiden Kompositionsgesetze, nämlich

$$(f +_1 g)\,(t_1, \ldots, t_n) \;=\; \begin{cases} f(\,2t_1\,,\, t_2, \ldots, t_n) & ; \quad 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ g(\,2t_1{-}1,\, t_2, \ldots, t_n) & ; \quad \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

und

$$(f +_2 g)\,(t_1, \ldots, t_n) \;=\; \begin{cases} f(t_1,\, 2t_2\,,\, t_3, \ldots, t_n) & ; \quad 0 \le t_2 \le 1 \\ g(t_1,\, 2t_2{-}1,\, t_3, \ldots, t_n) & ; \quad \frac{1}{2} \le t_2 \le 1 \end{cases}$$

bis auf Homotopie übereinstimmen. Der Vergleich geht am bequemsten, wenn wir noch ein weiteres Kompositionsgesetz betrachten,

$$(f \widehat{+} g)\,(t_1, \ldots, t_n) \;=\; \begin{cases} f(\,2t_1\,,\, 2t_2\,,\, t_3 \ldots, t_n) & ; \quad 0 \le t_1 \le \frac{1}{2}\,, \;\; 0 \le t_2 \le \frac{1}{2} \\ g(\,2t_1{-}1,\, 2t_2{-}1,\, t_3 \ldots, t_n) & ; \quad \frac{1}{2} \le t_1 \le 1\,, \;\; \frac{1}{2} \le t_2 \le 1 \\ x_0 & ; \quad 0 \le t_1 \le \frac{1}{2}\,, \;\; \frac{1}{2} \le t_2 \le 1 \\ x_0 & ; \quad \frac{1}{2} \le t_1 \le 1\,, \;\; 0 \le t_2 \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

Eine Homotopie von $f +_1 g$ zu $f \widehat{+} g$ ist z.B. gegeben durch

$$F(t_1, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} f(\ 2t_1\ ,\ \min(t_2 + t\,t_2, 1)\ ,\ t_3, \ldots, t_n) & ;\ \ 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ g(2t_1{-}1, \max(t_2 + t\,(t_2{-}1), 0), t_3, \ldots, t_n) & ;\ \ \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

und eine Homotopie zwischen $f +_2 g$ und $f \widehat{+} g$ könnte man ähnlich angeben.

Satz. *Wenn zwei Koordinaten für das Kompositionsgesetz zur Verfügung stehen* (wenn also entweder $n \ge 3$ oder $n \ge 2$ und $A = \{x_0\}$), *dann ist* $\pi_n(X, A, x_0)$ *eine abelsche Gruppe.*

Beweis. Die verlangte Homotopie von $f + g$ zu $g + f$ kann man zusammensetzen aus Homotopien des gerade beschriebenen Typs. Wie das im einzelnen geht, werden wir am besten verstehen, wenn wir unser Augenmerk auf die beiden relevanten Koordinaten richten, die t_1-Koordinate und die t_2-Koordinate.

Das Quadrat, das für diese beiden Koordinaten zur Verfügung steht, ist jeweils in bestimmter Weise eingeteilt (in zwei Hälften, bzw. in vier Teilquadrate):

Für die Definition von $f +_1 g$: f lebt in der linken Hälfte, g in der rechten.

Für die Definition von $f +_2 g$: f lebt in der unteren Hälfte, g in der oberen.

Für die Definition von $f \widehat{+} g$: f lebt in der linken unteren Ecke, g in der rechten oberen.

Zusätzlich betrachtet man nun ein weiteres Kompositionsgesetz $f \widetilde{+} g$, das ganz ähnlich wie $f \widehat{+} g$ definiert ist, nur daß, schematisch gesprochen, jetzt f in der rechten unteren Ecke lebt, und g in der linken oberen.

Man kann dann vier Homotopien des oben beschriebenen Typs zusammensetzen, schematisch:

$$f +_1 g \quad \sim \quad f \widehat{+} g \quad \sim \quad f +_2 g \quad \sim \quad f \widetilde{+} g \quad \sim \quad g +_1 f \qquad \square$$

Es gibt auch eine 'rein algebraische' Version des gerade gegebenen Beweises. Das ist das folgende Lemma (aus dem der Satz folgt).

Lemma. *Die Menge* M *sei mit zwei Gruppenstrukturen* '$+$' *und* '$*$' *versehen. Diese beiden Gruppenstrukturen sollen dasselbe Eins-Element haben, und sie sollen kompatibel sein in dem Sinne, daß für je vier Elemente* a, b, c, d *von* M *immer gilt*

$$(a + b) * (c + d) \quad = \quad (a * c) + (b * d) \ .$$

Dann sind die beiden Gruppenstrukturen zueinander gleich, und abelsch.

Beweis. $\quad a * b \ = \ (a + 1) * (1 + b) \ = \ (a * 1) + (1 * b) \ = \ a + b$

und $\quad a * b \ = \ (1 + a) * (b + 1) \ = \ (1 * b) + (a * 1) \ = \ b + a \ .$ $\square$

Welche Rolle spielt der Basispunkt für die Homotopiegruppen? Bei nicht-zusammenhängenden Räumen (Beispiel: $S^1 \dot{\cup} S^2$) offenbar eine sehr große. Im Falle von weg-zusammenhängenden Räumen sind zwar, wie sich herausstellt, die Homotopiegruppen zu verschiedenen Basispunkten zueinander isomorph. Aber auch da muß man aufpassen. Wenn man etwa darauf Wert legt, einen *bestimmten* Isomorphismus zu bekommen, ist es nötig, weitere Daten zu fixieren; nämlich einen Weg, der die beiden fraglichen Punkte verbindet. Der Isomorphismus wird im allgemeinen von der Wahl des Weges wirklich abhängen (jedenfalls von seiner Homotopieklasse, relativ zu Anfangs- und Endpunkt). Genauer sagt all dieses der folgende Satz.

Satz. *Sei X ein Raum und $A \subset X$ ein Unterraum. Seien $x_1, x_2 \in A$ zwei Basispunkte. Sei w ein Weg in A, der diese beiden Punkte verbindet, $w: [1,2] \to A$, $w(1) = x_1$, $w(2) = x_2$. Dann gilt: w induziert einen Isomorphismus*

$$w_*: \ \pi_n(A, x_2) \longrightarrow \pi_n(A, x_1) \ ;$$

und ähnlich auch $w_*: \pi_n(X, x_2) \to \pi_n(X, x_1)$ und $w_*: \pi_n(X, A, x_2) \to \pi_n(X, A, x_1)$. w_* hängt nur ab von der Homotopieklasse (Homotopie relativ Endpunkten) *von w.*

w_* ist verträglich mit den Abbildungen der langen exakten Folge: das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & \pi_{n+1}(X,A,x_2) & \xrightarrow{p} & \pi_n(A,x_2) & \xrightarrow{i} & \pi_n(X,x_2) & \xrightarrow{j} & \pi_n(X,A,x_2) & \longrightarrow \\
 & \downarrow{\scriptstyle w_*} & & \downarrow{\scriptstyle w_*} & & \downarrow{\scriptstyle w_*} & & \downarrow{\scriptstyle w_*} & \\
\longrightarrow & \pi_{n+1}(X,A,x_1) & \xrightarrow{p} & \pi_n(A,x_1) & \xrightarrow{i} & \pi_n(X,x_1) & \xrightarrow{j} & \pi_n(X,A,x_1) & \longrightarrow
\end{array}$$

ist kommutativ.

Ist w ein trivialer Weg, so ist w_* eine identische Abbildung. Ist w wie oben, und ist v ein Weg, der mit w zusammensetzbar ist, $v: [0,1] \to A$, $v(0) = x_0$, $v(1) = x_1$, so gilt für den zusammengesetzten Weg vw von x_0 zu x_2, daß $(vw)_* = v_* w_*$.

Beweis. Sei $\alpha: (I^n, \partial I^n) \to (A, x_2)$ Repräsentant eines Elementes $[\alpha] \in \pi_n(A, x_2)$. Dann ist, per Definition, $w_*[\alpha] \in \pi_n(A, x_1)$ das Element, das repräsentiert wird von der Abbildung α',

$$I^n \ \approx \ \partial I^n \times [1,2] \cup_{\partial I^n \times 2} I^n \ \xrightarrow{\ w \circ \mathrm{pr} \ \cup \ \alpha\ } \ A$$

(wo 'pr' die Projektion $\partial I^n \times [1,2] \to [1,2]$ bezeichnet). Die Homotopieklasse der Abbildung α' hängt nur ab von der Homotopieklasse von α und von der Homotopieklasse (relativ Endpunkten) des Weges w. Denn eine Deformation von α, bzw. von w, induziert eine Deformation von α', deren Träger der 'rechte' bzw. der 'linke' Teil des Definitionsbereiches $\partial I^n \times [1,2] \cup_{\partial I^n \times 2} I^n$ ist.

Im relativen Fall ist die Definition ähnlich. Wenn $\beta: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_2)$ Repräsentant eines Elementes $[\beta] \in \pi_n(X, A, x_2)$ ist, dann wird $w_*[\beta]$ definiert als das Element von $\pi_n(X, A, x_1)$, das repräsentiert ist von der Abbildung

$$I^n \ \approx \ J^{n-1} \times [1,2] \cup_{J^{n-1} \times 2} I^n \ \xrightarrow{\ w \circ \mathrm{pr} \ \cup \ \beta\ } X \ .$$

Was die Eigenschaften von w_* angeht (bis auf die Bijektivität), so läuft jede von diesen darauf hinaus, daß man eine geeignete Homotopie angeben muß. Diese Homotopien sind von ähnlicher Art, wie wir sie schon bei Einführung der Homotopiegruppen kennengelernt haben (z.B. für die Assoziativität der Komposition). Natürlich sind die Einzelheiten hier anders. Trotzdem wollen wir diese Einzelheiten jetzt weglassen.

Die Bijektivität ist eine formale Folgerung aus den anderen Eigenschaften. Ist nämlich $\overline{w}$ der zu w inverse Weg, so folgt

$$w_*\overline{w}_* \;=\; (w\,\overline{w})_* \;=\; (\text{trivialer Weg } x_1)_* \;=\; \mathrm{Id}_{\pi_n(\ldots x_1)}$$

und, ebenso, $\overline{w}_* w_* \;=\; \mathrm{Id}_{\pi_n(\ldots x_2)}$. □

Ein Raum X heißt *einfach-zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist und triviale Fundamentalgruppe hat. Es läuft auf dasselbe hinaus, zu sagen, daß je zwei Punkte x_1 und x_2 in X durch einen Weg verbindbar sind und daß dieser Weg eindeutig ist bis auf Homotopie.

KOROLLAR. *Seien x_1 und x_2 Basispunkte in X . Wenn X einfach-zusammenhängend ist, dann sind $\pi_n(X, x_1)$ und $\pi_n(X, x_2)$ zueinander kanonisch isomorph* (d.h., isomorph in ganz bestimmter 'ausgezeichneter' Weise).

Denn nach dem Satz bekommt man einen Isomorphismus durch die Wahl eines Weges von x_1 zu x_2 . Andererseits ist dieser Weg eindeutig bis auf Homotopie, nach Voraussetzung über X , und damit ist auch der erhaltene Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Im einfach-zusammenhängenden Fall darf man also den Basispunkt schlicht vergessen und, abkürzend, $\pi_n(X)$ für die n-te Homotopiegruppe schreiben. Ähnlich darf man auch im relativen Fall die Notation für $\pi_n(X, A, x_1)$ vereinfachen, wenn der Unterraum A einfach-zusammenhängend ist.

BEMERKUNG. Im allgemeinen Fall, wenn X wegzusammenhängend aber nicht einfach-zusammenhängend ist, kann der Isomorphismus $w_* \colon \pi_n(X, x_2) \to \pi_n(X, x_1)$ durchaus von (der Homotopieklasse von) w abhängen. Speziell, wenn man $x_2 = x_1$ nimmt, so erhält man auf diese Weise eine *Operation* der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_1)$ auf der Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_1)$. Diese Operation kann hochgradig nicht-trivial sein.

Es gibt eine andere Möglichkeit, sich die Operation vorzustellen. Dazu nehmen wir an, daß der Raum X eine *universelle Überlagerung* $\widetilde{X}$ besitzt. In dem Fall kann man die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ mit der Decktransformationengruppe von $\widetilde{X}$ über X identifizieren. Für $n \geq 2$ nun ist $\pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \xrightarrow{\approx} \pi_n(X, x_0)$ (für $\widetilde{x}_0$ über x_0), andererseits hängt $\pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ gar nicht von $\widetilde{x}_0$ ab, wie wir oben gesehen haben, da ja $\widetilde{X}$ einfach-zusammenhängend ist. Also operiert die Decktransformationengruppe auf $\pi_n(\widetilde{X})$ und damit auch auf $\pi_n(X, x_0)$. Durch Hinschreiben aller relevanten Daten kann man sich überlegen, daß diese Operation tatsächlich dieselbe ist wie die vorher diskutierte.

Für Abbildungen weg-zusammenhängender Räume wollen wir den Begriff "schwache Homotopie-Äquivalenz" definieren als "eine Abbildung, die Isomorphismen sämtlicher Homotopiegruppen induziert". Dafür brauchen wir, daß diese Eigenschaft nicht von der Wahl eines Basispunktes abhängt. Das sagt das folgende Lemma.

LEMMA. *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine Abbildung, wo der Raum* X *als weg-zusammenhängend vorausgesetzt ist. Seien* $x_1, x_2 \in X$. *Wenn* $f_* : \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(Y, f(x_1))$ *ein Isomorphismus ist, dann auch* $f_*\colon \pi_n(X, x_2) \to \pi_n(Y, f(x_2))$.

BEWEIS. Sei w ein Weg von x_1 zu x_2 . Dann ist $f \circ w$ ein Weg von $f(x_1)$ zu $f(x_2)$. Es ergibt sich aus der Definition der Abbildungen w_* und $(f \circ w)_*$, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X, x_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "w_*"'] & \pi_n(Y, f(x_1)) \arrow[d, "(f\circ w)_*"] \\ \pi_n(X, x_2) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_n(Y, f(x_2)) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Die vertikalen Pfeile in dem Diagramm sind Isomorphismen. Wenn also der obere horizontale Pfeil ein Isomorphismus ist, dann auch der untere. $\square$

DEFINITION. Eine Abbildung weg-zusammenhängender Räume, $f : X \to Y$, heißt eine *schwache Homotopie-Äquivalenz*, wenn für einen Basispunkt $x_1 \in X$ (und damit auch für jeden anderen) gilt: die Abbildung $f_* : \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(Y, f(x_1))$ ist ein Isomorphismus, für alle n .

SATZ (Whitehead-Satz). *Seien* X *und* Y *weg-zusammenhängende CW-Komplexe, sei* $f\colon X \to Y$ *eine Abbildung. Wenn* f *schwache Homotopie-Äquivalenz ist, dann ist* f *schon eine Homotopie-Äquivalenz.*

BEWEIS. Dies ist jetzt nur eine formale Zusammenfassung früher gemachter Dinge. O.B.d.A. (zellulärer Approximations-Satz) ist f eine *zelluläre* Abbildung. In dem Fall ist der Abbildungs-Zylinder $Z(f)$ wieder ein CW-Komplex, und die Abbildung f läßt sich schreiben als Komposition

$$X \xrightarrow{\ j\ } Z(f) \xrightarrow{\ p\ } Y$$

wo j eine zelluläre Inklusion ist und p eine Homotopie-Äquivalenz. Aus der Voraussetzung, daß f schwache Homotopie-Äquivalenz ist, folgt jetzt, daß dasselbe auch für die Inklusion j gilt. Nun haben wir aber früher schon geklärt, daß j genau dann Isomorphismen aller Homotopiegruppen induziert, wenn die relativen Homotopiegruppen der Inklusion $X \subset Z(f)$ alle trivial sind; was wiederum dazu äquivalent ist , daß diese Inklusion n-zusammenhängend für alle n ist. Letzteres war die hinreichende Bedingung für den früher formulierten "Whitehead-Satz ohne Homotopiegruppen". $\square$

Vorgeschichte

Zwei wichtige Vokabeln in der algebraischen Topologie sind 'homotop' und 'homolog'. Beides sind griechische Mischworte. Das Wort 'homotop' bedeutet in etwa "ähnlich gelegen". Den Begriff zu diesem Wort haben wir kennengelernt, auch auf diesem Begriff fußende Konstruktionen wie Homotopiegruppen. (Es ist ziemlich sicher, daß das Wort 'homotop' gewählt wurde wegen seiner Ähnlichkeit mit dem Wort 'homolog', das ja um einiges älter ist.)

Das Wort 'homolog' bedeutet so etwas wie "von ähnlicher Gestalt". Sie erwarten jetzt sicher von mir, daß ich Ihnen den Begriff erkläre, den diese Vokabel bezeichnet. Ich muß Sie leider enttäuschen, denn eigentlich gibt es diesen Begriff gar nicht. Die einzige Stelle, wo das Wort 'homolog' wirklich in Gebrauch ist, ist ein technischer Punkt im Rahmen einer verhältnismäßig komplizierten Konstruktion, wo es eine gewisse Äquivalenzrelation bezeichnet, die sogenannte "Homologie von Ketten". Wie zu erwarten, handelt es sich bei dieser Konstruktion um die der 'Homologiegruppen'. Die Homologiegruppen sind historisch älter als die Homotopiegruppen. Das ist eigentlich ganz erstaunlich insofern, als ihre Konstruktion komplizierter ist — zumindest ist das so für meinen Geschmack, und auch wohl für den Ihrigen, sobald Sie die Konstruktion kennengelernt haben.

Ein Mathematiker vor 100 Jahren hätte aber möglicherweise anders darüber gedacht. Denn der Begriff 'homotop' ist zwar begrifflich nicht aufwendig, psychologisch aber sehr. Er setzt voraus, daß man mit dem Begriff der "stetigen Abbildung" schlechthin soweit vertraut ist, daß man sich zutraut, von der Gesamtheit aller stetigen Abbildungen zwischen zwei Räumen zu reden. Das ist historisch ziemlich neu. (So wurde etwa eine ähnliche Idee, die Einführung des Hilbert-Raumes durch Hilbert, von einigen Mathematikern als Skandal empfunden — einer der damaligen Kritiker meinte, dies sei "nicht Mathematik, sondern Theologie".)

Die Homologiegruppen wurden endgültig eingeführt von Poincaré vor 100 Jahren. Die Wurzeln des Begriffs sind aber noch um etliches älter. Zu der Zeit gab es noch gar nicht den Begriff des *topologischen Raumes*, wie wir ihn heute kennen. Die 'Räume', die damals betrachtet wurden, waren vom Standpunkt der Topologie von sehr speziellem Typ, nämlich *differenzierbare Mannigfaltigkeiten* einerseits, und *Polyeder* andererseits.

Unter den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gab es speziell die *Riemann'schen Flächen*, die in der Funktionentheorie auftreten. Die Betrachtung dieser Objekte war ungeheuer fruchtbar für die Mathematik schlechthin. Sie sind eine der Hauptquellen für unseren heutigen Raumbegriff. Sie sind auch eine wichtige Quelle für die Betrachtung von Homologie. Das liegt an dem Cauchy'schen Satz über Kurvenintegrale holomorpher Funktionen (genauer: Differentialformen), ω , bezüglich 'glatter' Wege.

Der Cauchy'sche Satz sagt nämlich: Hinreichend dafür, daß das Kurvenintegral über einem geschlossenen Weg null ist, ist daß dieser geschlossene Weg "null-homolog" ist in dem Sinne, daß er den vollständigen Rand eines kompakten Gebietes im Definitionsbereich bildet.

Es sind solche geschlossenen Kurven besonders interessant, für die das Kurvenintegral *nicht* null ist, denn sie sind ja, nach dem Satz, gewissermaßen für die Struktur der Fläche charakteristisch. Man will sich deshalb einen Überblick über solche Kurven verschaffen.

Auf dem Hintergrund hiervon läßt sich einiges aus der Terminologie in Zusammenhang mit Homologie illustrieren.

Zunächst ist ja das Integral ein Funktional (mit Werten in $\mathbb{C}$) . Deshalb ist das Kurvenintegral nicht nur für Wege erklärbar, $\int_v \omega$, sondern auch für *formale Linearkombinationen* von Wegen,

$$\int_{\sum a_i v_i} \omega \quad := \quad \sum a_i \int_{v_i} \omega \ .$$

Eine solche formale Linearkombination $\sum a_i v_i$ wird auch als eine *Kette* bezeichnet (genauser: eine 1-*Kette* — Wege sind 1-dimensionale Gebilde); das Integral ist nun ein lineares Funktional auf den 1-Ketten.

Eine *geschlossene Kette* (oder ein 'Zykel') ist eine Kette ohne Rand. Beispiele davon sind formale Linearkombinationen geschlossener Wege. Es gibt aber noch eine andere Art. Wir geben dafür ein besonders einfaches (wenn auch vielleicht in seiner Einfachheit untypisches) Beispiel. Seien v und w zwei Wege mit der Eigenschaft, daß der Anfangspunkt von v gleich dem Endpunkt von w ist und daß, umgekehrt, auch der Anfangspunkt von w gleich dem Endpunkt von v ist. In dem Fall wird die formale Summe der beiden Wege als eine *geschlossene* Kette betrachtet (da "die Ränder sich gegenseitig kürzen"). Das ist insofern sinnvoll, als ja gilt

$$\int_{v+w} \omega \ = \ \int_v \omega + \int_w \omega \ = \ \int_{v\,w} \omega$$

d.h. bezüglich der Integration verhält sich die formale Summe " $v+w$ " genauso wie der geschlossene Weg $v\,w$, da sich die Beiträge von den Randpunkten gerade wegkürzen.

Damit das Integral $\int_w \omega$ erklärt ist, ist es selbstverständlich unerheblich, ob der Weg "nicht-singulär" ist (z.B. ob man davon ein Bild malen kann). Hieraus erklärt sich die etwas unglückliche Terminologie der *singulären* 1-*Kette*: eine formale Linearkombination von Wegen, die eben nicht notwendig nicht-singulär sind.

Eine Kette heißt *null-homolog*, wenn sie der Rand einer anderen Kette ist (von einer Dimension höher; z.B. eine 1-Kette ist (möglicherweise) Rand einer 2-Kette — der oben zitierte Cauchy'sche Satz ist dann i.w. die Aussage, daß bei dem Kurvenintegral über eine geschlossene 1-Kette sicherlich dann der Wert 0 herauskommt, wenn die Kette null-homolog ist). Zwei Ketten heißen *homolog*, wenn ihre Differenz null-homolog ist.

Die andere Quelle, die zur Entwicklung der Homologiegruppen führte (und die letztlich für uns wichtigere) ist das Studium von *Polyedern.* Ein berühmter Satz hier ist der sogenannte *Euler'sche Polyeder-Satz*.

In moderner Sprache formuliert lautet er so: Ein Polyeder P, dessen unterliegender topologischer Raum homöomorph zur 2-Sphäre ist, hat die *Eulersche Charakteristik* $\chi(P) = 2$, wobei

$$\chi(P) \ := \ \ \#(\text{Ecken}) \ - \ \#(\text{Kanten}) \ + \ \#(\text{Flächen}) \ ,$$

wenn $\#(\text{Dinge})$ die Anzahl der 'Dinge' bezeichnet. Dieser Satz wurde von Euler als experimentell gefundenes Faktum publiziert (ca. 1750) aber nicht von ihm bewiesen (er publizierte zwar einen Beweisversuch, von dem er aber später wieder abrückte). Der Satz war möglicherweise auch schon Descartes bekannt (gut 100 Jahre früher). Überzeugende Argumente für die Richtigkeit des Satzes wurden erst im vorigen Jahrhundert publiziert (beginnend mit Cauchy). Diese Argumente waren aber noch lange Gegenstand der Kontroverse. Dafür gab es zwei Gründe: erstens eine Unbekümmertheit um Details; und zweitens, was noch schwerer wiegt, eine Vagheit der verwendeten Begriffe. So ließen diese Begriffe etwa Interpretationen zu, für die der Satz einfach falsch wurde.

Daß diese Vagheit der Begriffe in der Natur der Sache liegt, ist klar, wenn man sich die Formulierung des Satzes genauer anschaut. Denn wie soll man die wichtige vorausgesetzte Eigenschaft des Polyeders P ("homöomorph zur 2-Sphäre") überhaupt formulieren, wenn man nicht über den Begriff des topologischen Raumes verfügt?

Im übrigen ist auch die oben gegebene Formulierung des Satzes noch nicht präzise: In der Definition von $\chi(P)$ ist etwa nicht klar, was mit $\#(\text{Flächen})$, also letztlich mit *Flächen* gemeint ist (dürfen z.B. Flächen sich schneiden? — wohl kaum!). Eine Möglichkeit, derartige Unklarheit ein für allemal auszuräumen (nicht die allerbeste, da etwas speziell) ist die, daß wir in einer gleich zu entwickelnden Sprache *definieren*: Ein Polyeder ist ein Unterraum eines euklidischen Raumes, der eine Struktur als endlicher *Simplizialkomplex* besitzt; und wo wir zudem diesen Simplizialkomplex auch noch als Teil der Daten ansehen wollen. Wir können in dem Fall die Euler'sche Charakteristik dann definieren als die Wechselsumme

$$\sum_i \ (-1)^i \ (\textit{Anzahl der Simplizes der Dimension } i) \ .$$

Simplizialkomplexe

Um zu definieren, was ein Simplizialkomplex sein soll, müssen wir zunächst sagen, was ein *Simplex* ist.

Seien $v_0, \ldots, v_n$ Punkte in einem Euklidischen Raum $\mathbb{R}^N$. Die konvexe Hülle dieser Punkte ist dann gegeben durch

$$\mathrm{K}(v_0, \ldots, v_n) \;=\; \{\, a_0 v_0 + \ldots + a_n v_n \;\mid\; a_i \geq 0\,,\ \sum a_i = 1 \,\} \;.$$

Die $v_0, \ldots, v_n$ hier könnten *affin abhängig* sein (s.u.); den Fall wollen wir aber nicht. Wenn die $v_0, \ldots, v_n$ *affin unabhängig* sind, dann wird die konvexe Hülle $\mathrm{K}(v_0, \ldots, v_n)$ als das *affine Simplex*, *mit der Eckenmenge* $\{v_0, \ldots, v_n\}$, bezeichnet; wir reservieren dafür die Notation

$$\mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n) \;.$$

Das System $v_0, \ldots, v_n$ ist, nach Definition, *affin* unabhängig genau dann, wenn das System der Vektoren

$$v_1 - v_0 \;,\quad v_2 - v_0 \;,\quad \ldots \;,\quad v_n - v_0$$

linear unabhängig ist (wobei die Rolle von v_0 keineswegs so ausgezeichnet ist, wie das auf den ersten Blick vielleicht scheinen mag). Die affine Unabhängigkeit der v_i impliziert (und ist sogar äquivalent dazu), daß die Darstellung als $\sum a_i v_i$ für die Punkte aus $\mathrm{K}(v_0, \ldots, v_n)$ *eindeutig* ist. Die Zahl n heißt die *Dimension* von dem Simplex. Sie ist um 1 weniger als die Anzahl der Ecken (wegen deren affiner Unabhängigkeit), und sie ist gleich der Dimension des von den Ecken aufgespannten affinen Unterraumes. Das Simplex $\mathrm{Simp}(v_0, \ldots, v_n)$ wird auch als ein *n-Simplex* bezeichnet.

Beispiele.

0-*Simplex*	—	*Punkt*
1-*Simplex*	—	*Strecke*
2-*Simplex*	—	*Dreieck*
3-*Simplex*	—	*Tetraeder*

Sind die Punkte $v_0, \ldots, v_n$ affin unabhängig, dann ist auch jede Teilmenge dieser Punkte affin unabhängig. Ein Simplex, das von einer solchen Teilmenge aufgespannt wird, heißt eine *Seite* von $\mathrm{Simp}(v_0,\dots,v_n)$. Das affine n-Simplex $\mathrm{Simp}(v_0,\dots,v_n)$ hat $\binom{n+1}{k+1}$ k-dimensionale Seiten, also

$n{+}1$	0-Seiten	(Ecken)
$\dfrac{n(n{+}1)}{2}$	1-Seiten	(Kanten)
	$\vdots$	
$n{+}1$	$(n{-}1)$-Seiten	$\mathrm{Simp}(v_0,\dots,\widehat{v}_j,\dots,v_n)$ (weglassen von v_j)
1	n-Seite	(das Simplex selbst)

DEFINITION. Ein *endlicher Simplizialkomplex* in $\mathbb{R}^N$ ist ein Unterraum, der gegeben ist als Vereinigung einer endlichen Menge von affinen Simplizes; wobei diese endliche Menge von affinen Simplices den folgenden beiden Bedingungen genügt:

(i) Die Seiten eines jeden Simplexes der Menge sind ebenfalls in der Menge.

(ii) Der Durchschnitt von je zweien der Simplizes (sofern er nicht leer ist) ist wieder ein Simplex; *und* er ist Seite von jedem der beiden.

Offensichtlich kann ein Simplizialkomplex aufgefaßt werden als ein CW-Komplex speziellen Typs: Die Zellen entsprechen den Simplizes; das n-Skelett ist gegeben durch die Vereinigung aller Simplizes der Dimension $\leq n$, und für jedes $(n{+}1)$-Simplex ist die Anhefte-Abbildung gegeben durch einen Isomorphismus vom Rand dieses $(n{+}1)$-Simplexes auf einen Unterkomplex vom n-Skelett.

Andererseits kann ein Simplizialkomplex auch aufgefaßt werden als ein gewisses kombinatorisches Schema:
— die Menge der Simplizes der Dimension 0,
— die Menge der Simplizes der Dimension 1,
— .... ;
und die Weise, wie all diese Dinge zusammenpassen.

Bevor wir uns aber weiter damit beschäftigen und die Homologiegruppen definieren, müssen wir noch eine kleine Verfeinerung anbringen. Der Grund ist der, daß in den gleich hinzuschreibenden Formeln Vorzeichen vorkommen, die $+1$ oder -1 sein können und die richtig festgelegt werden müssen. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies technisch durchzuführen. Eine dieser Möglichkeiten ist, die Kombinatorik bei den Simplizialkomplexen noch ein bißchen mehr zu betonen und mit *geordneten Simplizialkomplexen* zu arbeiten.

Definition. Ein *geordneter Simplizialkomplex* ist ein Simplizialkomplex (wie oben), zusammen mit den folgenden zusätzlichen Daten: Für jedes einzelne Simplex ist eine (totale) Anordnung seiner Eckenmenge gewählt; dabei ist verlangt: Die Ecken einer Seite sind immer mit der induzierten Anordnung versehen.

In einem geordneten Simplizialkomplex gibt es zu jedem Simplex der Dimension n eine (und auch nur eine) Möglichkeit, die Ecken von 0 bis n durchzunumerieren. Mit anderen Worten, jedes n-Simplex ist *kanonisch* beschreibbar als $\operatorname{Simp}(v_0, \ldots, v_n)$, *wo die Ecken gemäß ihrer Anordnung aufgeführt sind*. Es bezeichne nun

$$\operatorname{Simp}(v_0, \ldots, v_{i-1}\,,\, \widehat{v}_i\,,\, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

diejenige Seite von $\operatorname{Simp}(v_0, \ldots, v_n)$, die entsteht durch das *Weglassen der i-ten Ecke* (oder, vielleicht etwas genauer: diejenige Seite, die die i-te Ecke *nicht* enthält, dagegen aber alle anderen Ecken enthält). Diese Seite hat die Dimension $n{-}1$, und sie hat die kanonische Beschreibung

$$\operatorname{Simp}(w_0, \ldots, w_{n-1}) \quad , \qquad \begin{cases} w_j \,=\, v_j & , \quad j < i \\ w_j \,=\, v_{j+1} & , \quad j \geq i \ . \end{cases}$$

Sei nun ein geordneter Simplizialkomplex gegeben. Es bezeichne X_n die Menge der Simplizes der Dimension n . Für jedes i zwischen 0 und n haben wir dann eine Abbildung

$$\begin{aligned} d_i :\ X_n \quad &\longrightarrow \quad X_{n-1} \\ \operatorname{Simp}(v_0, \ldots v_n) \quad &\longmapsto \quad \operatorname{Simp}(v_0, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist in Worten: Jedem n-Simplex wird seine i-te $(n{-}1)$-dimensionale Seite zugeordnet.

Für die Komposition solcher Abbildungen

$$X_n \xrightarrow{\ d_i\ } X_{n-1} \xrightarrow{\ d_j\ } X_{n-2}$$

gilt die fundamentale Beziehung

$$d_j\, d_i \;=\; d_{i-1}\, d_j \quad , \quad \text{wenn} \ \ j < i \quad .$$

In Worten: Zuerst die i-te Ecke weglassen und dann die j-te ist für $j < i$ dasselbe wie zuerst die j-te Ecke weglassen und dann eben nicht die i-te, sondern die $(i{-}1)$-te.

Linearisierung

Wir brauchen eine Konstruktion allgemeiner Art. Ist A eine abelsche Gruppe und M eine Menge, dann kann man eine abelsche Gruppe $A[M]$ bilden, deren Elemente die formalen endlichen Summen sind,

$$a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k \ , \quad a_i \in A \ , \ \ x_i \in M \ ;$$

bis auf eine naheliegende Äquivalenzrelation: nämlich man darf immer

$$a\,x + a'\,x \quad \text{mit} \quad (\,a + a'\,)\,x$$

identifizieren, und man darf einen Term $0 \cdot x$ immer weglassen. Die Addition geschieht in der offensichtlichen Weise.

Eine (vielleicht) bessere Beschreibung von $A[M]$ ist diese: Seine Elemente sind die Abbildungen $f: M \to A$ mit der Eigenschaft, daß $f(x) \neq 0$ für höchstens endliche viele x in M. Die formale Summe $a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k$ (wo die x_i alle verschieden sind) entspricht hier der Abbildung $x_i \mapsto a_i$ (und $x \mapsto 0$, sonst).

Beispiel. Wenn A ein Körper ist, dann ist $A[M]$ in naheliegender Weise ein Vektorraum über A. Dieser Vektorraum hat eine kanonische Basis, nämlich M.

Definition. Ist X ein geordneter Simplizialkomplex, dann heißt $A[X_n]$ die *Gruppe der n-Ketten von X mit Koeffizienten in A.*

Bemerkung. *Die Abbildung $d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ induziert* (über "lineare Fortsetzung") *eine Abbildung*

$$\begin{aligned} A[X_n] &\longrightarrow A[X_{n-1}] \\ a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k &\longmapsto a_1 d_i(x_1) + \ldots + a_k d_i(x_k) \ . \end{aligned}$$

Diese Abbildung soll ebenfalls mit d_i bezeichnet werden. Für die so fortgesetzten Abbildungen gilt immer noch die fundamentale Gleichung

$$d_j\,d_i \;=\; d_{i-1}\,d_j \quad \text{wenn} \quad j < i$$

(warum?).

Wegen der nunmehr vorhandenen abelschen Gruppenstruktur können wir die d_i jetzt zusammenbauen zu *einer einzigen Abbildung*, dem sogenannten *Rand-Operator*

$$d \ := \ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, d_i \ : \quad A[X_n] \longrightarrow A[X_{n-1}] \ .$$

Statt d werden wir manchmal auch d^n schreiben, wenn wir betonen wollen, daß $A[X_n]$ die Quelle der Abbildung ist.

Satz. *Es ist* $d\,d = 0$.

In Worten: *Für jedes* n *ist die Komposition* $d^n\,d^{n+1}$ *gleich der* 0*-Abbildung.*

Beweis. Das beruht auf der Tatsache, daß $d_j\,d_i \;=\; d_{i-1}\,d_j$ wenn $j < i$. Nämlich,

$$\begin{aligned}
d^n\,d^{n+1} \ &\underset{\text{Def.}}{=} \ \sum (-1)^j \ d^n_j \ \sum (-1)^i \ d^{n+1}_i \qquad {\scriptstyle (0 \le j \le n\,,\ 0 \le i \le n+1)} \\
&= \ \sum_{j,i} (-1)^{j+i}\, d_j\, d_i \\
&= \ \sum_{j \ge i} (-1)^{j+i}\, d_j\, d_i \ + \ \sum_{j<i} (-1)^{j+i}\, d_j\, d_i \\
{\scriptstyle (d_j\,d_i \;=\; d_{i-1}\,d_j \text{ wenn } j<i)} \quad &= \ \sum_{j \ge i} (-1)^{j+i}\, d_j\, d_i \ + \ \sum_{j<i} (-1)^{j+i}\, d_{i-1}\, d_j \\
{\scriptstyle (i-1 \text{ wird umbenannt in } i')} \quad &= \ \sum_{j \ge i} (-1)^{j+i}\, d_j\, d_i \ - \ \sum_{i' \ge j} (-1)^{j+i'}\, d_{i'}\, d_j \\
&= \ 0
\end{aligned}$$

□

Folgerung. $\mathrm{Bild}(d^{n+1}) \ \subset \ \mathrm{Kern}(d^n)$.

Aufgrund dieser Folgerung können wir die folgende Definition machen.

Definition. Die n-te *Homologiegruppe* des Simplizialkomplexes X , *mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe* A , ist definiert als die Quotientengruppe

$$H_n(X;A) \ := \ \ \mathrm{Kern}\big(\, A[X_n] \xrightarrow{\ d^n \ } A[X_{n-1}] \,\big) \ / \ \mathrm{Bild}\big(\, A[X_{n+1}] \xrightarrow{\ d^{n+1} \ } A[X_n] \,\big) \ .$$

Der bei weitem wichtigste Spezialfall für die Koeffizientengruppe ist der Fall $A = \mathbb{Z}$ (= *Gruppe der ganzen Zahlen*). Dieser Fall ist so wichtig, daß man üblicherweise sogar die Koeffizienten aus der Notation wegläßt: anstatt $H_n(X, \mathbb{Z})$ schreibt man $H_n(X)$.

Ein anderer wichtiger Fall ist der, wo A ein Körper ist; z.B. $\mathbb{Q}$ (= *Körper der rationalen Zahlen*) oder $\mathbb{F}_2$ (= *Körper mit zwei Elementen*). Wenn A ein Körper ist, dann sind die Homologiegruppen Vektorräume über diesem Körper; sie haben in dem Fall also eine besonders einfache Struktur.

Δ-Mengen

Die Definition der Homologiegruppen hat auf die Betrachtung einer Art von kombinatorischer Struktur geführt: die Kodifizierung dessen, wie die diversen Simplizes in einem Simplizialkomplex 'zusammengebaut' sind. Diese kombinatorische Struktur wollen wir nun genauer anschauen. Zur Bezeichnung verwenden wir einen Buchstaben, der in seinem Aussehen einem Simplex nahekommt, das " Δ " ('Delta').

Definition. Eine Δ-*Menge* besteht aus einer Folge von Mengen

$$X_0\,,\ X_1\,,\ X_2\,,\ \ldots$$

sowie (für jedes n) einem System von Abbildungen d_i^n (oder, kurz, d_i)

$$d_i^n:\ X_n \longrightarrow X_{n-1}\ ,\qquad i=0,\,1,\,\ldots,\,n\ ,$$

so daß die folgende Bedingung erfüllt ist: Für die zusammengesetzten Abbildungen (wenn $n \geq 2$)

$$d_j\,d_i:\quad X_n \xrightarrow{d_i} X_{n-1} \xrightarrow{d_j} X_{n-2}$$

gilt die Beziehung

$$d_j\,d_i \ = \ d_{i-1}\,d_j\ ,\quad \text{wenn}\ \ j<i\ .$$

Dies ist die Abstraktion dessen, was wir früher kennengelernt haben: X_n stellen wir uns vor als die Menge der n-Simplizes. Und die Abbildung d_i^n ist diejenige, die jedem n-Simplex x seine 'i-te Seite' $d_i(x)$ zuordnet.

Man kann den Begriff der Δ-Menge interpretieren als einen Code, der das *Zusammenkleben von Simplizes* spezifiziert. Dies ist ganz analog zur Konstruktion von CW-Komplexen, nur eben etwas 'kombinatorischer'. Anstatt von "Standard-Bällen" werden nunmehr "Standard-Simplizes" verklebt. Das wollen wir jetzt präzisieren.

Das *affine Standard Simplex*, ∇^n, ist dasjenige affine n-Simplex im $\mathbb{R}^{n+1}$, dessen Eckenmenge die Menge der kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist,

$$i\text{-te Ecke} \ = \ (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \qquad (\text{“}\,1\,\text{” an der } i\text{-ten Stelle})$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$\nabla^n \ = \ \{\,(t_0,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\ \mid\ t_i\geq 0,\ \Sigma\ t_i = 1\,\}\ .$$

Auf den ersten Blick sieht das unnötig kompliziert aus: Warum ist das n-dimensionale Standard-Simplex als Teilraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ gegeben und nicht, wie man vernünftigerweise erwarten sollte, als Teilraum des $\mathbb{R}^n$?

Die gegebene Beschreibung hat den Vorteil, daß man mit ihrer Hilfe einige Dinge besonders prägnant ausdrücken kann. Insbesondere ist das so für einige wichtige Abbildungen zwischen den Standard-Simplizes.

So hat man für jedes i (wo $0 \le i \le n$) die *i-te Seiten-Inklusion* $\delta_i \colon \nabla^n \to \nabla^{n+1}$. Dies ist die Inklusion, deren Bild *nicht* die i-te Ecke von ∇^{n+1} enthält. Die Inklusions-Abbildung $\delta_i \colon \nabla^n \to \nabla^{n+1}$ läßt sich beschreiben als

$$(t_0, \ldots, t_n) \longmapsto (t_0, \ldots, t_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{0}, t_i, \ldots, t_n) .$$

Gegeben sei nun eine Δ-Menge X (im Detail: die Struktur von X ist eine Liste $X = \{X_0, X_1, \ldots;\ d_i^n,\ n = 0, 1, \ldots,\ 0{\le}i{\le}n\}$ und es gelten gewisse Beziehungen zwischen den Kompositionen der Abbildungen). Wir ordnen der Δ-Menge einen topologischen Raum $\operatorname{Real}(X)$ zu; dieser Raum wird auch als die *geometrische Realisierung* der Δ-Menge bezeichnet.

$\operatorname{Real}(X)$ wird definiert als ein Quotientenraum der disjunkten Vereinigung

$$\dot{\bigcup}_n \ X_n \times \nabla^n$$

(oder was auf dasselbe hinausläuft, einer disjunkten Vereinigung von Bällen; nämlich je ein Standard-n-Simplex für jedes Element von X_n , und das für alle n). Die Äquivalenzrelation, die $\operatorname{Real}(X)$ als Quotientenraum dieser disjunkten Vereinigung spezifiziert,

$$\operatorname{Real}(X) \ = \ \dot{\bigcup}_n \ X_n \times \nabla^n \ / \sim \ ,$$

sagt (per Definition) daß, für jedes n, gewisse $(n{-}1)$-Simplizes zu identifizieren sind mit Seiten von n-Simplizes. Nämlich für jedes $x \in X_n$ soll das durch $d_i(x)$ indizierte $(n{-}1)$-Simplex identifiziert werden mit der i-ten Seite von dem durch x indizierten n-Simplex.

Es läuft auf dasselbe hinaus, zu sagen: Für jedes n und für jeden Punkt

$$(x,t) \in X_n \times \nabla^{n-1}$$

sollen, für jedes i , die beiden Punkte

$$X_{n-1} \times \nabla^{n-1} \ni (d_i(x), t) \quad \text{und} \quad (x, \delta_i(t)) \in X_n \times \nabla^n$$

miteinander identifiziert werden. Es sollen andererseits aber auch nicht mehr Punkte miteinander identifiziert werden als durch diese Vorschrift (und deren Konsequenzen) erzwungen ist. Mit anderen Worten, die genannte Vorschrift *erzeugt* die Äquivalenzrelation “ $\sim$ ” in der Definition von $\operatorname{Real}(X)$.

Unsere erste Bemerkung ist die, daß wir einen geordneten affinen Simplizialkomplex aus der zugeordneten Δ-Menge rekonstruieren können (jedenfalls bis auf topologische Äquivalenz). Wir formulieren diese Bemerkung als Satz.

SATZ. *Sei* K *ein* (*endlicher*) *geordneter affiner Simplizialkomplex, und sei* X *die zugeordnete* Δ-*Menge. Es gibt eine Abbildung von der geometrischen Realisierung* $\mathrm{Real}(X)$ *zu dem unterliegenden topologischen Raum* K , *und diese Abbildung ist eine topologische Äquivalenz.*

BEWEIS. Sei $\mathrm{Simp}(v_0,\ldots,v_n)$ das von einer geordneten Eckenmenge $(v_0,\ldots,v_n)$ aufgespannte affine n-Simplex in $\mathbb{R}^N$. Es gibt eine kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla^n &\longrightarrow \mathrm{Simp}(v_0,\ldots,v_n) \\ (t_0,\ldots,t_n) &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} t_i\, v_i \ . \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist bijektiv. Denn sie ist surjektiv nach Definition, und sie ist injektiv, weil die $v_0,\ldots,v_n$ affin unabhängig sind (nach Definition ist ein Simplex die konvexe Hülle einer affin unabhängigen Menge).

Ist $\mathrm{Simp}(v_0,\ldots,v_n)$ ein Simplex des Simplizialkomplexes K , und $x \in X_n$ das zugeordnete Element, das dieses Simplex indiziert, dann können wir die Abbildung auch auffassen als eine Abbildung

$$\{x\} \times \nabla^n \longrightarrow \mathrm{Simp}(v_0,\ldots,v_n)$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, als eine durch x indizierte Abbildung

$$f_x : \ \nabla^n \longrightarrow \mathrm{Simp}(\, v_0(x),\ldots,v_n(x)\,) \ ,$$

wo, der Deutlichkeit halber, die i-te Ecke von dem Simplex x jetzt mit $v_i(x)$ bezeichnet worden ist. Die Ansammlung der Abbildungen f_x nun ist mit den Verklebevorschriften für die geometrische Realisierung $\mathrm{Real}(X)$ verträglich. Denn für jedes n , jedes $x \in X_n$ und für jedes i ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \nabla^{n-1} \arrow[r, "f_{d_i(x)}"] \arrow[d, "\delta_i"] & \mathrm{Simp}(\, v_0(x),\ldots,\widehat{v_i(x)},\ldots,v_n(x)\,) \arrow[d] \\ \nabla^n \arrow[r, "f_x"'] & \mathrm{Simp}(\, v_0(x),\ldots,v_n(x)\,) \end{tikzcd}$$

kommutativ. Folglich erhalten wir eine induzierte Abbildung

$$\mathrm{Real}(X) \longrightarrow \textit{unterliegender topologischer Raum von } K \ .$$

Die so erhaltene Abbildung ist bijektiv: Sie ist surjektiv, weil alle Simplizes von K in $\mathrm{Real}(X)$ wirklich benutzt worden sind. Und sie ist injektiv aus dem folgenden Grund (Definition eines Simplizialkomplexes): wenn ein Punkt aus K im Durchschnitt zweier Simplizes x und y liegt, dann liegt er schon in einem Simplex z (von im allgemeinen kleinerer Dimension), *das gemeinsame Seite von x und y ist*; die Äquivalenzrelation in der Konstruktion der geometrischen Realisierung sagt nun, daß die fraglichen drei Punkte aus den Simplizes x, z und y alle in $\mathrm{Real}(X)$ miteinander zu identifizieren sind.

Daß die Abbildung eine topologische Äquivalenz ist, folgt aus ihrer Bijektivität (nach dem Kriterium dafür, wann eine bijektive stetige Abbildung schon eine topologische Äquivalenz ist). Denn die Quelle der Abbildung, $\mathrm{Real}(X)$, ist quasikompakt (Zusammenkleben endlich vieler Simplizes) und das Ziel ist ein Hausdorff-Raum (Unterraum von $\mathbb{R}^N$). □

Bemerkung. Die Umkehrung des vorigen Satzes ist nicht richtig. Das heißt, es ist *nicht* richtig, daß jede Δ-Menge (oder auch nur jede 'endliche' Δ-Menge) auf die früher beschriebene Weise aus einem geordneten Simplizialkomplex erhalten werden könnte. Hier ist ein einfaches Beispiel. Es beruht auf der Tatsache, daß jedes 1-Simplex in einem Simplizialkomplex mit zwei verschiedenen 0-Simplizes inzident ist; daß aber das Analogon davon in einer Δ-Menge nicht zu gelten braucht.

Wir nehmen für X_0 eine 1-elementige Menge; für X_1 auch; und für X_n, $n \geq 2$, die leere Menge. Aus diesen Daten kann man auf genau eine (und im übrigen sehr banale) Weise eine Δ-Menge machen: die beiden Abbildungen $d_0 : X_1 \to X_0$ und $d_1 : X_1 \to X_0$ tun beide das, was sie nicht lassen können (jede von ihnen bildet den Punkt in X_1 auf den Punkt in X_0 ab).

Die geometrische Realisierung dieser Δ-Menge entsteht aus der disjunkten Vereiningung $\nabla^0 \dot{\cup} \nabla^1$, indem man zwei Identifikationen durchführt; nämlich ∇^0 muß auf die eine Weise mit einer 'Seite' von ∇^1 identifiziert werden (nämlich mit Hilfe von d_0), und auf die andere Weise auch (mit d_1). Im Klartext, man muß die beiden Endpunkte von ∇^1 und den Punkt ∇^0 alle drei miteinander identifizieren. In diesem Fall ist die geometrische Realisierung also die 1-Sphäre S^1, und eine Struktur als CW-Komplex (mit einer 0-Zelle und einer 1-Zelle) wird gleich mitgeliefert: die 0-Zelle kommt von ∇^0 und die 1-Zelle (oder vielmehr ihr Abschluß) kommt von ∇^1. □

Aufgrund des Beispiels könnte man auf die Idee kommen, zu glauben, daß eine Δ-Menge, wenn sie schon nicht zu einem Simplizialkomplex gehört, so doch zumindest als geometrische Realisierung immer einen CW-Komplex haben sollte; und das vielleicht auch noch auf kanonische Weise. Diese Idee ist tatsächlich richtig, und wir wollen uns ihr als nächstes zuwenden. Wir müssen einige Betrachtungen vorwegschicken, die die Eindeutigkeit der Darstellung von Punkten aus $\mathrm{Real}(X)$ betreffen.

Für die zusammengesetzten Abbildungen

$$\delta_i\,\delta_j : \quad \nabla^{n-2} \xrightarrow{\delta_j} \nabla^{n-1} \xrightarrow{\delta_i} \nabla^n$$

gilt (umgekehrte Reihenfolge wie für die d's !)

$$\delta_i\,\delta_j \;=\; \delta_j\,\delta_{i-1} \;, \quad \text{wenn } j < i \;,$$

denn beide Seiten bezeichnen die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \nabla^{n-2} & \longrightarrow & \nabla^{n} \\ (t_0, \ldots, t_{n-2}) & \longmapsto & (t_0, \ldots, t_{j-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{0}, t_j, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{0}, \ldots, t_{n-2}) \end{array}$$

Ferner gilt, daß jeder Punkt aus ∇^n eine *kanonische* Darstellung der Form

$$\delta_{i_m}\, \delta_{i_{m-1}}\, \ldots\, \delta_{i_1}\, (\, t_0\, ,\, \ldots\, ,\, t_{n-m}\,)$$

$$(\quad =\quad \delta_{i_m}\, (\, \delta_{i_{m-1}}\, (\ \ldots\quad \delta_{i_1}\, (\, t_0\, ,\, \ldots\, ,\, t_{n-m}\,)\ \ \ldots\ )\,)\quad)$$

hat, wo die $t_0\, ,\, \ldots\, ,\, t_{n-m}$ alle von 0 verschieden sind, und wo $i_m > i_{m-1} > \ldots > i_1$. Denn sei ein Punkt aus ∇^n als Tupel $(u_0, \ldots, u_n)$ gegeben. Man bekommt die Zahl m als die Anzahl der Nullen unter den u 's, die Indizes $i_1, \ldots, i_m$ sind die Stellen dieser Nullen (in aufsteigender Reihenfolge genommen)

$$(\ \ldots, \underset{\substack{| \\ i_1}}{0}, \ldots, \underset{\substack{| \\ i_2}}{0}, \ldots,\ \ldots,\ \ldots, \underset{\substack{| \\ i_m}}{0}, \ldots\ )$$

und die restlichen u 's (d.h., die von 0 verschiedenen) liefern die t 's.

Satz. *Jeder Punkt aus* $\operatorname{Real}(X)$ *hat einen Repräsentanten*

$$(x,t)\ \in\ X_n \times \nabla^n$$

mit kleinst-möglichem n *. Dieser Repräsentant ist eindeutig bestimmt. Jeder andere Repräsentant ist von der Form* (x', t') *, wo gilt*

$$t' \ =\ \delta_{i_m}\, \delta_{i_{m-1}}\, \ldots\, \delta_{i_1}(\, t\,)\quad ,\qquad x\ =\ d_{i_1}\, \ldots\, d_{i_{m-1}}\, d_{i_m}(\, x'\,)\ .$$

Außerdem ist letztere Darstellung eindeutig, wenn vorausgesetzt wird, daß die i *'s in aufsteigender Reihenfolge aufgelistet sind,* $i_1 < \cdots < i_{m-1} < i_m$ *.*

Beweis. Sei $(x,t)\ \in\ X_n \times \nabla^n$ ein Repräsentant, und $t\ =\ (t_0, \ldots, t_n)$. Wenn unter den t_i eine oder mehrere Nullen vorkommen, können wir einen äquivalenten Repräsentanten mit kleinerem n finden: z.B. wenn $t_0 = 0$, dann ist $t = \delta_0(\tilde{t})$, wo $\tilde{t}$ das Tupel mit dem weggelassenen t_0 bezeichnet, und deshalb $(\, x, t\,)\ =\ (\, x, \delta_0(\tilde{t})\,)\ \sim$ $(\, d_0(x), \tilde{t}\,)$. Wir können also annehmen, daß unter den t_i keine Nullen vorkommen. Wir werden zeigen, daß dies (x,t) dann schon der kanonische Repräsentant mit dem kleinst-möglichen n ist.

Wenn $x = d_{i_1} \ldots d_{i_m}(x')$ dann haben wir einen neuen Repräsentanten

$$\begin{aligned} (x,t)\ \ =\ \ (\, d_{i_1} \ldots d_{i_m}(x')\, ,\, t\,)\ &\sim\ \ (\, d_{i_2} \ldots d_{i_m}(x')\, ,\, \delta_{i_1}(t)\,) \\ &\sim\ \ \ldots \\ &\sim\ \ (\, x'\, ,\, \delta_{i_m} \ldots \delta_{i_1}(t)\,)\ \ =:\ \ (x', t')\ . \end{aligned}$$

Wir prüfen nach, daß *jede* Äquivalenz zu (x,t) in diese Form gebracht werden kann.

Die hier zu diskutierende Äquivalenzrelation sieht so aus. Es ist (x,t) äquivalent zu (x'',t'') dann, und nur dann, wenn es eine Kette gibt,

$$(x,t) \;=\; (x_1,t^1)\;,\;\; (x_2,t^2) \quad \ldots\ldots \quad (x_{j-1}\,,\,t^{j-1})\;,\;\; (x_j,t^j) \;=\; (x'',t'')\;,$$

so daß für jedes n zwischen 1 und $j-1$ *entweder* ein i_n existiert mit

$$x_n \;=\; d_{i_n}(x_{n+1}) \quad \text{und} \quad t^{n+1} \;=\; \delta_{i_n}(t^n)$$

oder eben ein i_n mit

$$x_{n+1} \;=\; d_{i_n}(x_n) \quad \text{und} \quad t^n \;=\; \delta_{i_n}(t^{n+1}) \;.$$

Per Induktion über die Länge einer solchen Kette dürfen wir annehmen, daß der Satz für Ketten kleinerer Länge schon bewiesen ist, insbesondere also schon bewiesen für

$$(x',t') \;=\; (x_{j-1}\,,\,t^{j-1}) \;.$$

Der Induktionsschritt wird fertig sein, wenn wir aufgrund dieser Voraussetzung den Satz für

$$(x'',t'') \;=\; (x_j,t^j)$$

beweisen können. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall. $x' = d_k(x'')$ und $t'' = \delta_k(t')$ (für geeignetes k). Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$x \;=\; d_{i_1}\ldots d_{i_m}(x') \quad \text{und} \quad t' \;=\; \delta_{i_m}\ldots\delta_{i_1}(t) \;.$$

Die Darstellung $t'' = \delta_k\,\delta_{i_m}\ldots\delta_{i_1}(t)$ nun läßt sich wieder in die Form fallender Indizes bringen (fallend von links nach rechts) wegen der Identitäten $\delta_i\,\delta_j = \delta_j\,\delta_{i-1}$, wenn $j < i$. Dieser Prozeß bringt gleichzeitig die Darstellung $x = d_{i_1}\ldots d_{i_m} d_k(x'')$ in die Form aufsteigender Indizes; dabei haben wir benutzt, daß $d_j\,d_i = d_{i-1}\,d_j$ für $j < i$ (die vorausgesetzten Identitäten in der Struktur einer Δ-Menge).

2. Fall. $x'' = d_k(x')$ und $t' = \delta_k(t'')$. Nach unserer Voraussetzung über t kommen in der Darstellung von $t' = \delta_{i_m}\ldots\delta_{i_1}(t)$ als Tupel keine Nullen vor, außer an den Stellen $i_1,\ldots,i_m$. Deshalb ist notwendigerweise k eine von diesen Stellen. Sei $k = i_\ell$. Es ist dann

$$\delta_{i_m}\ldots\delta_{i_1} \;=\; \delta_k\,\delta_{j_{m-1}}\,\delta_{j_{m-2}}\ldots\delta_{j_1}$$

wo

$$j_{p-1} \;=\; \begin{cases} i_p & \text{wenn } p < \ell \\ i_p - 1 & \text{wenn } p > \ell \;. \end{cases}$$

Wie im ersten Fall ist dieses Umschreiben auch für die d's eine erlaubte Operation; es führt auf

$$t'' \;=\; \delta_{j_{m-1}}\ldots\delta_{j_1}(t) \quad \text{und} \quad x \;=\; d_{j_1}\ldots d_{j_{m-1}}(x'') \;.$$

Die Existenz der behaupteten Darstellung ist nun geklärt. Die Eindeutigkeit wurde schon vorher behandelt (kanonische Darstellung von Punkten in ∇^n). Nämlich durch t'' einerseits und die Beziehung $t'' = \delta_{j_{m-1}}\ldots\delta_{j_1}(t)$ andererseits sind sowohl t als auch die Indizes $i_1,\ldots,i_m$ eindeutig bestimmt — vorausgesetzt, daß in der Darstellung von t als Tupel keine Nullen vorkommen und daß die Indizes in aufsteigender Reihenfolge aufgelistet sind. □

Als *m-Skelett* einer Δ-Menge X wollen wir die Δ-Menge X^m bezeichnen mit

$$(X^m)_n \;=\; \begin{cases} X_n & \text{wenn } n \leq m \\ \emptyset & \text{wenn } n > m \end{cases}$$

wobei die Strukturabbildungen von X übernommen werden.

Satz. *Der Raum* $\mathrm{Real}(X)$ *ist ein CW-Komplex, mit Skelettfiltrierung*

$$\emptyset = \mathrm{Real}(X^{-1}) \;\subset\; \mathrm{Real}(X^0) \;\subset\; \ldots \;\subset\; \mathrm{Real}(X^m) \;\subset\; \ldots \;\subset\; \mathrm{Real}(X)\;.$$

Beweis. Als topologischer Raum ist ∇^n äquivalent zu D^n, und der Rand $\partial\nabla^n$ ist gegeben durch die Vereinigung der eigentlichen Seiten oder, was auf dasselbe hinausläuft, durch die Vereinigung der $(n{-}1)$-dimensionalen Seiten

$$\partial\nabla^n \;=\; \textstyle\bigcup_i \; \delta_i(\nabla^{n-1})\;.$$

Wir behaupten, daß, für $x \in X_n$, die Äquivalenzrelation eine Anhefte-Abbildung

$$\{x\} \times \partial\nabla^n \;\longrightarrow\; \mathrm{Real}(X^{n-1})$$

induziert. Um dies einzusehen, wird es genügen, die Einschränkungen der Anhefte-Abbildung auf diejenigen Teile von $\partial\nabla^n$ zu beschreiben, die durch die $(n{-}1)$-dimensionalen Seiten gegeben sind; und dann nachzuprüfen, daß diese Teil-Abbildungen auf den Durchschnitten ihrer Definitionsbereiche, d.h., auf den Teilen

$$\delta_i(\nabla^{n-1}) \cap \delta_j(\nabla^{n-1}) \;=\; \delta_i\,\delta_j(\nabla^{n-2}) \;=\; \delta_j\,\delta_{i-1}(\nabla^{n-2}) \qquad (\text{wenn } j < i)\;,$$

übereinstimmen.

Wenn $t' \in \delta_i(\nabla^{n-1})$ und, etwa, $t' = \delta_i(t)$, so wird das Bild von (x,t') unter der Anhefte-Abbildung *definiert* als derjenige Punkt in $\mathrm{Real}(X^{n-1})$, der durch $(d_i(x),t)$ repräsentiert ist.

Die so definierte Abbildung ist (offensichtlich) stetig auf jedem der Unterräume $\delta_i(\nabla^{n-1})$. Da es sich um *abgeschlossene* Unterräume handelt, werden wir wissen, daß die Abbildung auf ganz $\partial\nabla^n$ stetig ist, sobald wir wissen, daß sie überhaupt wohldefiniert ist.

Nun ist die Abbildung definiert über die der Konstruktion von $\mathrm{Real}(X)$ zugrunde liegende Äquivalenzrelation. Wäre sie nicht wohldefiniert, so würde das bedeuten, daß es zwei Punkte aus $\partial\nabla^n$ gäbe, die denselben Punkt aus $\mathrm{Real}(X)$, aber zwei verschiedene Punkte aus $\mathrm{Real}(X^{n-1})$ definierten. Das hieße, daß die der Konstruktion von $\mathrm{Real}(X)$ zugrunde liegende Äquivalenzrelation gröber wäre als die der Konstruktion von $\mathrm{Real}(X^{n-1})$ zugrunde liegende Äquivalenzrelation auf

$$X_0 \times \nabla^0 \;\dot\cup\; \ldots \;\dot\cup\; X_{n-1} \times \nabla^{n-1}\;.$$

Das ist aber nicht der Fall: Sind (x,t) und (x',t') zwei Punkte hieraus, die in $\mathrm{Real}(X)$ äquivalent sind, dann läßt sich (nach dem vorigen Satz) die Relation zwischen diesen beiden Punkten schon beschreiben unter ausschließlicher Verwendung von Abbildungen d_i^k (bzw. δ_i^k) mit $k \leq n{-}1$ (denn nur solche Abbildungen werden benutzt, wenn man die beiden Punkte zu dem minimalen Repräsentanten in Beziehung setzt). Es folgt auch noch, daß die Abbildung $\mathrm{Real}(X^{n-1}) \to \mathrm{Real}(X^n)$ injektiv ist.

Unter erneuter Benutzung der Tatsache, daß die Anhefte-Abbildung über die Äquivalenzrelation definiert ist, erhalten wir eine Abbildung

$$\mathrm{Real}(X^{n-1}) \cup_{X_n \times \partial\nabla^n} X_n \times \nabla^n \longrightarrow \mathrm{Real}(X^n) .$$

Sobald wir wissen, daß diese Abbildung bijektiv ist, werden wir auch wissen, daß sie eine topologische Äquivalenz ist (denn beide Räume sind Quotientenräume von ein- und demselben Raum, nämlich von $X_0 \times \nabla^0 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, X_n \times \nabla^n$). Daß die Abbildung surjektiv ist, ist klar. Für die Injektivität müssen wir noch zwei Fälle betrachten:

Sei $(x', t') \in X_n \times \nabla^n$ äquivalent zu einem Punkt aus $\mathrm{Real}(X^{n-1})$. Sei (x, t) der minimale Repräsentant dieses Punktes, dann ist (nach dem vorigen Satz)

$$t' = \delta_{i_p} \ldots \delta_{i_1}(t)$$

mit $p \geq 1$, weil $(x, t) \neq (x', t')$. Also ist t' ein Randpunkt von ∇^n.

Seien $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2)$, $(x_i, t_i) \in X_n \times \nabla^n$, und seien t_1 und t_2 keine Randpunkte von ∇^n. Dann sind beide Punkte Repräsentanten kleinster Dimension in ihrer Äquivalenzklasse, nach dem vorigen Satz sind sie also sogar gleich.

Wir fassen zusammen: $\mathrm{Real}(X)$ ist Quotientenraum einer disjunkten Vereinigung von Bällen, nämlich von $\dot\bigcup_n X_n \times \nabla^n$. $\mathrm{Real}(X^m)$ ist der Bildraum der Bälle der Dimension $\leq m$. Die Äquivalenzrelation läßt sich sukzessive beschreiben über Anhefte-Abbildungen für m-Bälle an $\mathrm{Real}(X^{m-1})$.

Letzteres ist aber eine der Charakterisierungen, die wir kennengelernt haben für einen CW-Komplex, mit Skelettfiltrierung gegeben durch die $\mathrm{Real}(X^m)$. $\square$

Es ist plausibel (und auch richtig), daß es CW-Komplexe gibt, die nicht konstruierbar sind als die geometrische Realisierung einer Δ-Menge (z.B. hefte man eine 2-Zelle an S^1 an mit Hilfe einer "wilden" Anhefte-Abbildung). Andererseits, bei den Räumen, die als eine solche geometrische Realisierung entstehen, haben wir auch mehr Struktur als nur die eines CW-Komplexes: Die Anhefte-Abbildungen sind in einer ganz bestimmten (und finiten) Weise gegeben, über die kombinatorische Seiten-Zuordnung einerseits und über die Standard-Abbildungen zwischen den Standard-Simplizes andererseits.

Wir stellen uns eine Δ-Menge vor als einen *kombinatorisch-definierten CW-Komplex*.

Singulärer Komplex

Der *singuläre Komplex* eines topologischen Raumes ist leicht zu definieren (das machen wir jetzt gleich), aber es ist nicht so leicht, sich die außerordentliche Nützlichkeit der Konstruktion klarzumachen (die Herleitung der entsprechenden Sätze wird uns eine Weile beschäftigen). Man kann die Konstruktion des singulären Komplexes auch zum Anlaß nehmen, sich ein wenig zu erschrecken. Denn sie führt auf die Betrachtung sehr großer Mengen, selbst wenn man nur an recht einfachen topologischen Räumen interessiert ist.

Bezeichne, wie früher, ∇^n das Standard-n-Simplex. Sei Y ein topologischer Raum. Der *singuläre Komplex von* Y ist definiert als die Δ-Menge $\mathrm{S}(Y)$, wo

$$\mathrm{S}(Y)_n \ = \ \textit{Menge der stetigen Abbildungen} \ \nabla^n \longrightarrow Y \ ,$$

und wo die Strukturabbildungen $d_i : S(Y)_n \longrightarrow \mathrm{S}(Y)_{n-1}$ in naheliegender Weise über die Standard-Inklusionen der Standard-Simplizes, $\delta_i \ : \ \nabla^{n-1} \longrightarrow \nabla^n$, erklärt sind. Nämlich, wenn

$$f \in \mathrm{S}(Y)_n \ , \qquad f : \nabla^n \longrightarrow Y \ ,$$

dann ist $d_i(f) \in \mathrm{S}(Y)_{n-1}$ definiert als die zusammengesetzte Abbildung

$$f\,\delta_i \ : \qquad \nabla^{n-1} \xrightarrow{\ \delta_i\ } \nabla^n \xrightarrow{\ f\ } Y \ .$$

Die verlangten Identitäten zwischen den Kompositionen der d_i sind hier nun einfache Folgerungen aus den analogen Identitäten für die Kompositionen der δ_i . Nämlich wenn $f \in \mathrm{S}(Y)_n$, wenn $n \geq 2$ und $j < i$, dann ist

$$d_j\, d_i(f) \ = \ d_j(f\,\delta_i) \ = \ f\,\delta_i\,\delta_j \ = \ f\,\delta_j\,\delta_{i-1} \ = \ d_{i-1}(f\,\delta_j) \ = \ d_{i-1}d_j(f) \ .$$

Was die Homologiegruppen einer Δ-Menge sind, das wissen wir schon. Deshalb können wir jetzt auch Homologiegruppen für topologische Räume erklären.

Definition. Die *singulären Homologiegruppen* eines topologischen Raumes Y sind definiert als die Homologiegruppen der Δ-Menge $\mathrm{S}(Y)$.

Um mit der Definition etwas anfangen zu können (zum Beispiel für Berechnungen), benötigt man einige Sätze allgemeiner Art, also eine “Theorie”. Die Herleitung dieser Sätze wird uns eine Weile beschäftigen.

Selbst im Falle von ganz einfachen topologischen Räumen Y (man denke z.B. an ein Intervall) werden die an der Δ-Menge $\mathrm{S}(Y)$ beteiligten Mengen i.a. sehr groß sein. $\mathrm{S}(Y)_0$ etwa ist die *unterliegende Menge* von Y, und $\mathrm{S}(Y)_1$ kann man identifizieren mit der *Menge aller Wege* in Y. Die Konstruktion ist also ziemlich unanschaulich. Allerdings kann der Nachteil der Unanschaulichkeit zu einem gewissen Grade durch Gewöhnung behoben werden. Als ersten Schritt dazu überlegen wir uns, daß es eine Beziehung gibt zwischen dem Raum Y einerseits und der geometrischen Realisierung der Δ-Menge $\mathrm{S}(Y)$ andererseits.

Satz. *Es gibt eine natürliche Abbildung* ("*Evaluation*")

$$\mathrm{ev} \ : \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) \ \longrightarrow \ Y \ .$$

Bemerkung. Daß die Evaluation als eine 'natürliche' Abbildung bezeichnet wurde, hat eine ganz bestimmte technische Bedeutung. Nämlich sowohl die Konstruktion des singulären Komplexes eines topologischen Raumes als auch die der geometrischen Realisieung einer Δ-Menge sind *funktorielle* Konstruktionen. Wenn also $Y \to Y'$ eine Abbildung von topologischen Räumen ist, so induziert diese erstens eine Abbildung von Δ-Mengen, $\mathrm{S}(Y) \to \mathrm{S}(Y')$, und zweitens diese wieder eine Abbildung von Räumen, $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) \to \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y'))$. Die besagte 'Natürlichkeit' ist nun die Aussage, daß das resultierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y')) & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & Y' \end{array}$$

tatsächlich *kommutativ* ist.

Beweis des Satzes. Das ist fast eine Trivialität. Die geometrische Realisierung ist ja definiert als

$$\mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) \ = \ \dot{\bigcup}_n \ \mathrm{S}(Y)_n \times \nabla^n \ / \sim \ ,$$

deshalb genügt es, eine Abbildung

$$\dot{\bigcup}_n \ \mathrm{S}(Y)_n \times \nabla^n \ \longrightarrow \ Y$$

anzugeben, die mit der Äquivalenzrelation verträglich ist. Es läuft auf dasselbe hinaus, für jedes n und für jedes $f \in \mathrm{S}(Y)_n$ eine Abbildung $g : \{f\} \times \nabla^n \longrightarrow Y$ anzugeben, oder besser

$$g_f : \ \nabla^n \ \longrightarrow \ Y \ ;$$

dabei muß für $n \geq 1$ und $0 \leq i \leq n$ gelten, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \nabla^{n-1} & \xrightarrow{\delta_i} & \nabla^n \\ {\scriptstyle g_{d_i(f)}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle g_f} \\ Y & \xrightarrow{=} & Y \end{array}$$

kommutiert. Alle diese Daten haben wir aber nach Definition von $\mathrm{S}(Y)$. Wir nehmen nämlich einfach $g_f = f$. Die Kommutativität des Diagramms ist dann erfüllt nach Definition dessen, was die Abbildung $d_i(f)$ ist. $\square$

Natürlich kann man nicht erwarten, daß die Abbildung $\mathrm{ev} : \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) \to Y$ immer eine Homotopieäquivalenz ist. $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y))$ ist ja, wie wir wissen, ein CW-Komplex. Wenn ev überhaupt eine Chance haben soll, eine Homotopieäquivalenz zu sein, so muß notwendigerweise gelten, daß der Raum Y zumindest *den Homotopietyp eines CW-Komplexes hat*.

Diese Bedingung ist z.B. nicht erfüllt für den Unterraum $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, oder für den Abschluß vom Graphen von $t \longmapsto \sin \frac{1}{t}$ (letzterer Raum ist das Standard-Beispiel für "zusammenhängend, aber nicht weg-zusammenhängend").

Erfreulicherweise ist die genannte notwendige Bedingung aber auch hinreichend (und es wird eines unserer Ziele sein, dies auch irgendwann einzusehen):

Inoffizielle Mitteilung. Wenn Y ein CW-Komplex ist (eventuell auch nur bis auf Homotopie), dann ist die Abbildung $\mathrm{ev} : \mathrm{Real}(\mathrm{S}(Y)) \to Y$ eine Homotopieäquivalenz.

Beispiel. Bezeichne pt. den topologischen Raum, der nur aus einem einzigen Punkt besteht. Für jedes n hat $\mathrm{S}(\mathrm{pt.})_n$ offenbar genau ein Element. Folglich ist $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(\mathrm{pt.}))$ ein CW Komplex, der in jeder Dimension genau eine Zelle hat. Nach der gerade gemachten Mitteilung ist dieser CW-Komplex *zusammenziehbar* (homotopieäquivalent zum ein-punktigen Raum). Diese Tatsache direkt einzusehen, ist nicht ganz leicht. $\square$

Es gibt mehrere Gründe, noch eine Variante vom Begriff der "Δ-Menge" zu betrachten; das wird unser nächstes Thema sein. Einer der Gründe ist, daß man mit den Δ-Mengen als "kombinatorisch definierten CW-Komplexen" einige Dinge einfach nicht in dem Umfang machen kann, wie man das möchte; etwa "Quotienten-Räume" konstruieren.

Sei zum Beispiel der 2-Ball aufgefaßt als die geometrische Realisierung der Δ-Menge 'Dreieck' (drei 0-Simplizes, drei 1-Simplizes und ein 2-Simplex). Durch Kollabieren des Randes möchte man die 2-Sphäre als Quotientenraum davon konstruieren. Es gibt nur eine Δ-Menge, die als Resultat einer solchen Konstruktion in Frage käme. Sie hat jeweils ein Simplex in den Dimensionen 0, 1 und 2 (weil man die drei 0-Simplizes zu einem einzigen 0-Simplex identifizieren müßte und die drei 1-Simplizes zu einem einzigen 1-Simplex). Die geometrische Realisierung der fraglichen Δ-Menge ist aber nicht die 2-Sphäre; das wird plausibel, wenn man die Euler'schen Charakteristiken vergleicht.

Bei der nun zu betrachtenden Variante besteht die zusätzliche Raffinesse darin, daß dem Anschein nach irrelevante Daten, nämlich sogenannte *ausgeartete* Simplizes, in die Buchführung ausdrücklich mit aufgenommen werden. Naturgemäß wird die Buchführung dadurch etwas komplizierter.

Simpliziale Mengen

Für die Zwecke der Buchführung führen wir eine Kategorie Δ ein. Die *Objekte* von Δ sind die geordneten Mengen $[0]$, $[1]$, $[2]$, $\dots$,

$$[n] \;=\; (0 < 1 < \cdots < n) \ ,$$

und die *Morphismen* in Δ sind die (schwach) monotonen Abbildungen zwischen diesen geordneten Mengen.

Im Detail, ein Morphismus $\alpha : [m] \to [n]$ ist eine Abbildung von $[m]$ zu $[n]$ mit der Eigenschaft: wenn $i \le j$ dann ist $\alpha(i) \le \alpha(j)$. Oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$i < j \quad \text{impliziert} \quad \alpha(i) \le \alpha(j) \ ,$$

aber nicht notwendigerweise $\alpha(i) < \alpha(j)$.

Die folgende Interpretation ist möglicherweise hilfreich. Die Kategorie Δ kann aufgefaßt werden als eine Kodifizierung der *Standard-Abbildungen zwischen Standard-Simplizes*. Nämlich man kann $[m]$ identifizieren mit der geordneten Menge der Ecken von dem Standard-Simplex ∇^m ; und ähnlich auch $[n]$ mit der geordneten Menge der Ecken von ∇^n . Eine *Standard-Abbildung von* ∇^m *zu* ∇^n nun bildet (nach Definition) Ecken auf Ecken ab und respektiert die Anordnung auf der Eckenmenge; sie induziert also eine Abbildung von $[m]$ zu $[n]$ im obigen Sinne. Im übrigen ist eine Standard-Abbildung $\nabla^m \to \nabla^n$ auch eine *affine Abbildung*, sie ist deshalb durch ihr Verhalten auf den Ecken bereits festgelegt.

Derselbe Sachverhalt, etwas formaler umschrieben, sieht so aus. Einer Abbildung

$$\alpha : \ [m] \ \longrightarrow \ [n]$$

wird zugeordnet eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\alpha_* : \ \nabla^m \ \longrightarrow \ \nabla^n \ ;$$

nämlich gerade die, die auf den Ecken das vorgeschriebene Verhalten hat (die i-te Ecke geht auf die $\alpha(i)$-te Ecke) und die ansonsten gegeben ist durch lineare Fortsetzung

$$\sum_i \, t_i \, v_i \ \longmapsto \ \sum_i \, t_i \, w_{\alpha(i)}$$

(wobei $v_i \;=\; i$-ter Basisvektor in $\mathbb{R}^{m+1}$, $w_{\alpha(i)} \;=\; \alpha(i)$-ter Basisvektor in $\mathbb{R}^{n+1}$) .

(Man kann das auch so ausdrücken: die beschriebene Zuordnung ist ein “kovarianter Funktor von der Kategorie Δ in die Kategorie der topologischen Räume”.)

Die angesprochene “Buchführung” mit Hilfe der Kategorie Δ hat den Sinn, daß man sich mit ihrer Hilfe Dinge merken kann, *ohne* das Gedächtnis zu belasten. Wir illustrieren das an der Definition von Δ-Mengen.

Dazu notieren wir, daß es in der Kategorie Δ für jedes i, $0 \le i \le n$, eine Abbildung

$$\delta_i : [n{-}1] \longrightarrow [n] ,$$

gibt, die *injektiv* ist und deren Bild den Punkt $i \in [n]$ *nicht* enthält; offenbar gibt es auch *nur* eine solche Abbildung. In suggestiver Notation handelt es sich um die Abbildung

$$(0 < \cdots < n{-}1) \longrightarrow (0 < \cdots < i{-}1 < \widehat{\ i\ } < i{+}1 < \cdots < n)$$

wo eben “ $\widehat{\ i\ }$ ” bedeuten soll, daß i *nicht* im Bild der Abbildung ist.

Für die Zusammensetzung solcher Abbildungen,

$$\delta_i\,\delta_j : \quad [n{-}2] \xrightarrow{\delta_j} [n{-}1] \xrightarrow{\delta_i} [n] ,$$

gilt die uns schon bekannte Identität

$$(*) \qquad \delta_i\,\delta_j = \delta_j\,\delta_{i-1} , \quad \text{wenn } j < i .$$

LEMMA. (i) *Jede injektive Abbildung* $[m] \longrightarrow [n]$ *in* Δ *läßt sich schreiben als Komposition von Abbildungen* δ_i .

(ii) *Mit Hilfe der Relationen* $(*)$ *läßt sich diese Komposition in die Form*

$$\delta_{i_p}\,\delta_{i_{p-1}}\ \ldots\ldots\ \delta_{i_2}\,\delta_{i_1}$$

bringen, mit $i_1 < i_2 < \ \ldots\ < i_{p-1} < i_p$ (und $p = n{-}m$).

(iii) *Letztere Darstellung ist eindeutig.*

BEWEIS. (i) und (ii) sind klar. Zu (iii) genügt es, zu bemerken, daß sich jede injektive Abbildung $\delta : [m] \longrightarrow [n]$ veranschaulichen läßt als

$$(0 < \cdots < m) \longrightarrow (\ldots\hat{}\ldots\hat{}\ldots\hat{}\ldots) \qquad (n{-}m \text{ Lücken})$$

und die $i_1, i_2, \ldots,$ sind dann gerade die Stellen dieser Lücken. □

BEMERKUNG. Es bezeichne Inj-Δ die Unterkategorie von Δ, deren Morphismen die *injektiven* Abbildungen sind (die Objekte sind dieselben wie in Δ auch). Folgende beiden Begriffe bezeichnen dann ein- und dasselbe Ding:

(i) Eine Δ-Menge.

(ii) Ein kontravarianter Funktor von der Kategorie Inj-Δ in die Kategorie der Mengen.

Denn die Daten eines solchen kontravarianten Funktors X besagen, daß jedem Objekt $[n]$ eine Menge $X[n]$ (oder, kurz, X_n) zugeordnet ist und jeder Abbildung $\delta : [m] \to [n]$ in Inj-Δ eine Abbildung von Mengen (Gegenrichtung !) $\delta^* : X_n \to X_m$. Wenn man diese Daten darauf beschränkt, nur von den $d_i = \delta_i^*$ und deren Vertauschungsrelationen zu reden, so hat man eine Δ-Menge. Umgekehrt kann man auch aus einer Δ-Menge einen solchen kontravarianten Funktor (re-) konstruieren, wegen dem gerade angeführten Lemma.

Zurück zu der Kategorie Δ . Es gibt darin, für jedes i , $0 \le i \le n$, eine Abbildung

$$\sigma_i : \ [n{+}1] \longrightarrow [n] \ ,$$

die *surjektiv* ist und unter der die beiden Punkte i und $i{+}1$ denselben Bildpunkt (nämlich $i \in [n]$) haben. Offenbar gibt es auch *nur* eine solche Abbildung; in suggestiver Notation,

$$(\,0 < \cdots < \underline{i < i{+}1} < \cdots < n{+}1\,) \ \longrightarrow \ (\,0 < \cdots < i < \cdots < n\,) \ .$$

Jede surjektive Abbildung in Δ läßt sich schreiben als Komposition von Abbildungen dieser Art. Es gibt Relationen zwischen Zusammensetzungen der σ 's , nämlich

$$\sigma_{i-1}\,\sigma_j \ = \ \sigma_j\,\sigma_i \ , \quad \text{wenn} \ \ j < i \ ,$$

und es gibt Relationen für die Zusammensetzung von einem δ_i mit einem σ_j ,

$$\sigma_i\,\delta_i \ = \ \mathrm{Id}_{[n]} \ = \ \sigma_i\,\delta_{i+1} \ , \qquad \begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "\delta_{i+1}"'] & {[n+1]} \arrow[d, "\sigma_i"] \\ {[n+1]} \arrow[r, "\sigma_i"] & {[n]} \end{tikzcd}$$

(erst eine Lücke machen bei i oder bei $i{+}1$ und danach i und $i{+}1$ auf dasselbe abbilden; das tut gar nichts), sowie zwei Fälle für $j \neq i\,,\,i{+}1$,

$$\sigma_i\,\delta_j \ = \ \delta_j\,\sigma_{i-1} \ , \quad \text{wenn} \ \ j < i \ , \qquad \begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, "\delta_j"] \arrow[d, "\sigma_{i-1}"'] & {[n+1]} \arrow[d, "\sigma_i"] \\ {[n-1]} \arrow[r, "\delta_j"] & {[n]} \end{tikzcd}$$

(Lücke vor der Verdopplung)

und

$$\sigma_i\,\delta_j \ = \ \delta_{j-1}\,\sigma_i \ , \quad \text{wenn} \ \ j > i{+}1 \ , \qquad \begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, "\delta_j"] \arrow[d, "\sigma_i"'] & {[n+1]} \arrow[d, "\sigma_i"] \\ {[n-1]} \arrow[r, "\delta_{j-1}"] & {[n]} \end{tikzcd}$$

(Verdopplung vor der Lücke)

und diese Relationen insgesamt sind *vollständig* in einem Sinne, wie es das obige Lemma für die injektiven Abbildungen präzisiert hat.

Es ist aber vollkommen überflüssig, sich solche Einzelheiten zu merken, denn was immer man davon braucht, kann man rekonstruieren, sobald man nur weiß, was es mit der Kategorie Δ auf sich hat (was ja nicht so schwer zu behalten ist).

Wichtig ist auch die folgende (triviale) Tatsache. *Jeder Morphismus in Δ läßt sich schreiben als eine Surjektion gefolgt von einer Injektion*; das heißt, als

$$\alpha \ = \ \delta\,\sigma \qquad (\,\sigma \text{ surjektiv} \ , \ \ \delta \text{ injektiv}\,)\,;$$

und diese Darstellung ist eindeutig.

Definition. Eine *simpliziale Menge* ist ein kontravarianter Funktor X von der Kategorie Δ in die Kategorie der Mengen.

Es bedeutet dasselbe, zu sagen, daß jedem $[n]$ eine Menge $X[n]$ (oder, kurz, X_n) zugeordnet ist; und jeder Abbildung $\alpha : [m] \to [n]$ in Δ eine Abbildung von Mengen (Gegenrichtung !)

$$X(\alpha) : \; X_n \longrightarrow X_m \; .$$

Dabei ist verlangt, daß die Zuordnung $\alpha \mapsto X(\alpha)$ mit *Komposition* verträglich ist, d.h., wenn

$$\beta\,\alpha \; : \quad [m] \xrightarrow{\;\alpha\;} [n] \xrightarrow{\;\beta\;} [p] \; ,$$

dann ist $X(\beta\,\alpha)$ gleich der zusammengesetzten Abbildung

$$X(\alpha)\,X(\beta) \; : \quad X_p \xrightarrow{X(\beta)} X_n \xrightarrow{X(\alpha)} X_m$$

(und, natürlich, wenn ι eine identische Abbildung ist, dann ist auch $X(\iota)$ eine identische Abbildung).

Statt $X(\alpha)$ wollen wir kürzer auch schreiben α^* (Stern oben für: Zuordnung dreht die Pfeile um).

Wir verwenden folgende Sprache. Die Abbildungen δ^* , für *injektives* δ , heißen die *Randabbildungen* der simplizialen Menge X . Es handelt sich dabei um die δ_i^* (die wir wie früher mit d_i bezeichnen wollen) und deren Kompositionen.

Die Abbildungen σ^* , für surjektives σ , heißen die *Ausartungs-Abbildungen*. (Auch wenn dies ein wenig seltsam klingen mag, so ist die identische Abbildung an dieser Stelle nicht ausgeschlossen.)

Die Elemente der Menge X_n heißen die *n-Simplizes*. Ein n-Simplex heißt *ausgeartet*, wenn es im Bild einer nicht-identischen Ausartungs-Abbildung σ^* liegt (oder was auf dasselbe hinausläuft, wenn es im Bild einer der speziellen Ausartungs-Abbildungen $\sigma_i^* : X_{n-1} \longrightarrow X_n$ liegt).

Beispiel. Der singuläre Komplex $\mathrm{S}(Y)$ eines topologischen Raumes Y ist nicht nur eine Δ-Menge, sondern auch eine simpliziale Menge. Nämlich für $\alpha : [m] \to [n]$ ist die zugeordnete Abbildung $\alpha^* : \mathrm{S}(Y)_n \to \mathrm{S}(Y)_m$ definiert als die Komposition mit der durch α beschriebenen Standard-Abbildung $\alpha_* : \nabla^m \to \nabla^n$,

$$(\; f : \nabla^n \longrightarrow Y \;) \quad \xmapsto{\quad \alpha^* \quad} \quad (\; f\,\alpha_* \; : \quad \nabla^m \xrightarrow{\;\alpha_*\;} \nabla^n \xrightarrow{\;f\;} Y \;) \; .$$

Wenn wir früher den singulären Komplex als Δ-Menge aufgefaßt haben, so lag das daran, daß wir andere Struktur-Abbildungen als die Rand-Abbildungen damals nicht beachtet haben.

Natürlich kann man ganz allgemein einer simplizialen Menge eine Δ-Menge dadurch zuordnen, daß man alle anderen Struktur-Abbildungen außer den Rand-Abbildungen einfach vergißt.

Wenn man weiß, was *ausgeartete Simplizes* sind, so hat man auch die Möglichkeit, diese systematisch zu ignorieren; oder besser: herauszukürzen. Demgemäß hat man für simpliziale Mengen nun Varianten der Konstruktion von Homologie einerseits und von geometrischer Realisierung andererseits zur Verfügung. Diese Varianten wollen wir zur Kenntnis nehmnen.

(1) *Konstruktion der Homologie.* Sei X simpliziale Menge, A abelsche Gruppe. Dann wissen wir schon (weil X per Vergessen von Struktur eine Δ-Menge ist), daß wir die Homologiegruppen $H_*(X;A)$ definieren können. Nämlich zunächst konstruieren wir einen sogenannten *Kettenkomplex*

$$\cdots \longrightarrow C_n(X;A) \xrightarrow{d=d^n} C_{n-1}(X;A) \xrightarrow{d} C_{n-2}(X;A) \longrightarrow \cdots \quad (\text{ mit } \ dd = 0\ )$$

wo $C_n(X;A) = A[X_n]$, $d = \sum_i (-1)^i d_i$; die *n-te Homologiegruppe von X mit Koeffizienten in A* ist dann definiert als $H_n(X;A) = \operatorname{Kern}(d^n) / \operatorname{Bild}(d^{n+1})$.

Die Elemente von $C_n(X;A)$ sind, per Definition, die *n-Ketten*, d.h. die formalen Summen $a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$, $a_j \in A$, $x_j \in X_n$ (modulo einer gewissen Äquivalenzrelation). Wir wollen eine Kette $\sum a_j x_j$ nun als *ausgeartet* bezeichnen, wenn sämtliche der x_j ausgeartet sind. Die ausgearteten Ketten bilden eine Untergruppe $C'_n(X;A)$. Die Quotientengruppe

$$\overline{C}_n(X;A) \ := \ C_n(X;A) \,/\, C'_n(X;A)$$

heißt die *reduzierte* (oder *normalisierte*) n-te Kettengruppe der simplizialen Menge X .

Wir nehmen zur Kenntnis (im Moment ohne Beweis, als inoffizielle Mitteilung), daß die $\overline{C}_n(X;A)$ wieder einen Kettenkomplex bilden, und daß die daraus erhaltenen Homologiegruppen *dieselben* sind wie vorher. □

(2) Die *geometrische Realisierung einer simplizialen Menge X* . Diese ist definiert als der Quotientenraum

$$|X| \ = \ \dot{\bigcup}_{n \geq 0} X_n \times \nabla^n \ / \ \sim$$

wo die Äquivalenzrelation " $\sim$ " nicht nur die Rand-Abbildungen benutzt (wie bei der geometrischen Realisierung einer Δ-Menge), sondern zusätzlich auch noch die Ausartungs-Abbildungen. Die Äquivalenzrelation ist nämlich erzeugt von der Vorschrift: Für jedes $\alpha : [m] \to [n]$ aus Δ , für jedes $t \in \nabla^m$ und jedes $x \in X_n$, sollen die Bildpunkte von (x,t) unter den beiden Abbildungen

$$X_m \times \nabla^m \xleftarrow{\alpha^* \times \mathrm{Id}} X_n \times \nabla^m \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \alpha_*} X_n \times \nabla^n$$

miteinander identifiziert werden. Das heißt, es soll sein

$$X_m \times \nabla^m \ \ni \ (\, \alpha^*(x) \,,\, t \,) \ \sim \ (\, x \,,\, \alpha_*(t) \,) \ \in \ X_n \times \nabla^n \ .$$

Die Definition ergibt, daß $|X|$ auch ein Quotientenraum von $\operatorname{Real}(X)$ ist (geometrische Realisierung von X als Δ-Menge). Die Quotientenabbildung $\operatorname{Real}(X) \to |X|$ kann aufgefaßt werden als nachträgliches "Kollabieren" derjenigen Zellen, die den ausgearteten Simplizes entsprechen.

Als Variation des entsprechenden Lemmas über Δ-Mengen hat man:

Lemma. (i) Jeder Punkt aus $|X|$ hat einen Repräsentanten $(x,t) \in X_d \times \nabla^d$ der Art, daß d möglichst klein ist. Dieser Repräsentant ist eindeutig bestimmt.

(ii) Ist $(x'', t'') \in \dot{\bigcup}_n \; X_n \times \nabla^n$ äquivalent zu (x,t), dann gibt es einen eindeutig bestimmten weiteren Repräsentanten (x', t'), wo t' kein Randpunkt ist (d.h., die Darstellung von t' als Tupel enthält keine Nullen), und es gibt eindeutig bestimmte Abbildungen σ und δ aus Δ, wo σ surjektiv ist und δ injektiv, mit

$$x' = \sigma^*(x) \ , \quad t = \sigma_*(t') \ ; \qquad\qquad x' = \delta^*(x'') \ , \quad t'' = \delta_*(t') \ .$$

Ebenfalls hat man als Variante des entsprechenden Satzes über Δ-Mengen:

Satz. $|X|$ ist ein CW-Komplex. Das n-Skelett ist gleich dem Bild von

$$X_0 \times \nabla^0 \quad \dot{\cup} \quad \ldots \quad \dot{\cup} \ X_n \times \ \nabla^n \ .$$

Die n-Zellen sind in $1:1$ Beziehung zu den *nicht-ausgearteten* n-Simplizes von X.

Beweis. Übungen □

Im Beweis des obigen Lemmas wird folgender einfacher aber wichtiger Struktursatz über simpliziale Mengen gebraucht.

Satz. *Sei x ein m-Simplex der simplizialen Menge X. Dann ist x Ausartung eines eindeutig bestimmten nicht ausgearteten Simplexes y, und zwar auf genau eine Weise. D.h., es gibt ein nicht-ausgeartetes $y \in X_n$ und ein surjektives $\sigma : [m] \to [n]$ mit $\sigma^*(y) = x$, und das Paar (y, σ) ist eindeutig bestimmt.*

Bemerkung. Wenn x nicht-ausgeartet ist, dann ist die Ausartungs-Abbildung σ natürlich eine identische Abbildung.

Beweis des Satzes. Existenz von (y, σ) ist klar. Angenommen, (y', σ') ist ein weiteres solches Paar, $\sigma' : [m] \to [n']$. Die Abbildung σ hat einen Schnitt, d.h. eine Abbildung (notwendigerweise injektiv) $\delta : [n] \to [m]$ mit $\sigma\,\delta = \mathrm{Id}_{[n]}$. Es ist dann

$$y \ = \ \delta^*\,\sigma^*\,(y) \ = \ \delta^*\,(x) \ = \ \delta^*\,\sigma'^*\,(y') \ = \ \overline{\sigma}^*\,\overline{\delta}^*\,(y') \ ,$$

wobei die letzte dieser Gleichungen deshalb gilt, weil sich jede Abbildung in der Kategorie Δ, also auch $\sigma'\,\delta$, in der Form $\overline{\delta}\,\overline{\sigma}$ (eine Surjektion gefolgt von einer Injektion) darstellen läßt.

Aber y ist nicht-ausgeartet, also ist $\overline{\sigma} = \mathrm{Id}$ und $y = \overline{\delta}^*\,(y')$. Insbesondere haben wir deshalb $n \leq n'$. Auf die gleiche Weise folgt auch $n' \leq n$. Folglich gilt $n = n'$. $\overline{\delta}$ ist somit ein *injektiver Endomorphismus* von $[n]$ und daher die Identität. Folglich ist $y = y'$. Wir haben außerdem nun auch noch gezeigt, daß jeder Schnitt δ von σ automatisch auch ein Schnitt von σ' ist (d.h., $\sigma\delta = \mathrm{Id} \implies \sigma'\delta = \mathrm{Id}$), und umgekehrt (aus Symmetriegründen). Daraus folgt aber $\sigma = \sigma'$. □

Nützliche Konstruktionen

Es ist i.a. nicht möglich, aus einer simplizialen Menge eine Δ-Menge dadurch zu machen, daß man die ausgearteten Simplizes einfach wegläßt. Denn wenn man zu einem nicht-ausgearteten Simplex ein Randsimplex nimmt, dann kann letzteres sehr wohl ausgeartet sein. (*Beispiel*: Im singulären Komplex der n-Sphäre betrachte man ein n-Simplex, das der Identifizierung $\nabla^n/_{\partial\nabla^n} \approx S^n$ entspricht.)

Man kann allerdings umgekehrt vorgehen. Man kann einer Δ-Menge Y immer eine simpliziale Menge X zuordnen derart, daß die nicht-ausgearteten Simplizes von X eine Δ-Menge bilden, und zwar gerade Y. Das geht auf die nächstliegende Weise: Als n-Simplizes von X nimmt man die Paare

$$(y , \sigma)$$

wo $\sigma : [n] \to [m]$ die surjektiven Abbildungen mit Quelle $[n]$ durchläuft; und y die Elemente von Y_m (m variabel). Um nun die Wirkung der Abbildung

$$\alpha^* : X_n \longrightarrow X_{n'}$$

auf (y, σ) zu erklären, wo $\alpha : [n'] \to [n]$, schreibt man die zusammengesetzte Abbildung

$$[n'] \xrightarrow{\alpha} [n] \xrightarrow{\sigma} [m]$$

in die kanonische Form um (Surjektion gefolgt von Injektion),

$$[n'] \xrightarrow{\overline{\sigma}} [\overline{n}] \xrightarrow{\overline{\delta}} [m] \ ,$$

und mit den so erhaltenen $\overline{\delta}$ und $\overline{\sigma}$ definiert man dann

$$\alpha^*(y , \sigma) \ := \ (\overline{\delta}^*(y) , \overline{\sigma}) \ .$$

Diese Regel ist mit der Komposition der α 's verträglich (also 'funktoriell', wie in der Definition von simplizialen Mengen verlangt). Denn ist $\alpha' : [n''] \to [n']$, dann sieht man, daß $(\alpha\alpha')^* (y, \sigma) \ = \ \alpha'^* \alpha^* (y, \sigma)$ wegen des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
{[n'']} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}"'] & {[n']} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\overline{\sigma}"] & {[n]} \arrow[d, "\sigma"] \\
{[\widetilde{n}]} \arrow[r, "\widetilde{\delta}"'] & {[\overline{n}]} \arrow[r, "\overline{\delta}"'] & {[m]}
\end{tikzcd}$$

und wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von $\sigma \, \alpha \, \alpha'$ als $\widehat{\delta} \, \widetilde{\sigma}$ (Surjektion gefolgt von Injektion), wo $\widehat{\delta} = \overline{\delta} \, \widetilde{\delta}$.

Speziell sagt die Regel auch, wenn ρ eine surjektive Abbildung, also ρ^* eine Ausartungs-Abbildung ist, dann ist

$$\rho^*(\, y \,,\, \sigma \,) \;=\; (\, y \,,\, \sigma\rho \,) \;.$$

Die nicht-ausgearteten n-Simplizes von X sind also genau die Paare

$$(\, y \,,\, \mathrm{Id}_{[n]} \,)$$

m.a.W. die n-Simplizes von Y. Und ist $\delta : [n'] \to [n]$ eine Rand-Abbildung, dann ist

$$\delta^*(\, y \,,\, \mathrm{Id}_{[n]} \,) \;=\; (\, \delta^*(y) \,,\, \mathrm{Id}_{[n']} \,) \;,$$

Y ist also tatsächlich eine Unter-Δ-Menge von X.

Wir nennen X *die von der* Δ*-Menge* Y *erzeugte simpliziale Menge.*

Satz. *Sei* Y *eine* Δ*-Menge, sei* X *die von* Y *erzeugte simpliziale Menge. Es ist*

$$|X| \;\cong\; \mathrm{Real}\,(Y) \;.$$

Beweis. Nach Definition

$$\begin{aligned} |X| \;&=\; \dot{\bigcup}_n \;\; X_n \times \nabla^n \;/ \;\sim \\ &=\; \dot{\bigcup}_n \;\Big(\dot{\bigcup}_{\sigma :\, [n] \twoheadrightarrow [m]} Y_m \times \nabla^n \;,\;\; \sigma \text{ und } [m] \text{ variabel} \Big) \Big/ \;\sim \\ &=\; \dot{\bigcup}_m \;\Big(\dot{\bigcup}_{\sigma :\, [n] \twoheadrightarrow [m]} Y_m \times \nabla^n \;,\;\; \sigma \text{ und } [n] \text{ variabel} \Big) \Big/ \;\sim \end{aligned}$$

Nun sagt der von der Ausartungs-Abbildung $\sigma : [n] \to [m]$ gelieferte Beitrag zur Äquivalenzrelation " $\sim$ " gerade, daß für jedes $y \in Y_m$ und jedes $t \in \nabla^n$,

$$(\, (\, y \,,\, \sigma) \,,\, t \,) \;=\; (\, \sigma^*(\, y \,,\, \mathrm{Id}_{[m]} \,) \,,\, t \,) \quad\sim\quad (\, (\, y \,,\, \mathrm{Id}_{[m]} \,) \,,\, \sigma_*(t) \,) \;,$$

d.h. die von σ indizierte Kopie des Raumes $Y_m \times \nabla^n$ muß identifiziert werden mit $Y_m \times \nabla^m$ vermöge der Abbildung induziert von $\sigma_* : \nabla^n \to \nabla^m$. Also ist $|X|$ ein Quotientenraum

$$\dot{\bigcup}_m \;\{\, \mathrm{Id}_{[m]} \,\} \times Y_m \times \nabla^m \;/\; \sim \;.$$

Aber die verbliebenen Simplizes $(\, y \,,\, \mathrm{Id} \,)$ sind sämtlich nicht-ausgeartet, die Strukturabbildungen zwischen ihnen sind daher notwendigerweise Rand-Abbildungen. Es folgt, daß die induzierte Äquivalenzrelation " $\sim$ " nicht gröber ist als die zur Definition von $\mathrm{Real}\,(Y)$ verwendete. $\square$

Beispiel. Sei K ein geordneter Simplizialkomplex. Das heißt (wie früher auch), daß K als Teilmenge eines euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ gegeben ist und daß zusätzlich gewisse weitere Daten spezifiziert sind (K ist dargestellt als Vereinigung affiner Simplizes, die sich nur in bestimmter Weise treffen dürfen; die Eckenmenge von jedem Simplex ist mit einer Ordnung versehen, und diese Ordnungen sind kompatibel).

Zu dem geordneten Simplizialkomplex gehört eine Δ-Menge Y. Einem m-Simplex y von Y entspricht eine Abbildung $\nabla^m \to K$, nämlich die kanonische injektive Abbildung, die das Standard-m-Simplex ∇^m identifiziert mit dem von y indizierten

Baustein von K. Einem n-Simplex der von Y erzeugten simplizialen Menge X entspricht nun ebenfalls eine Abbildung $\nabla^n \to K$. Nämlich dem Simplex (y, σ), wo $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [m]$, entspricht die Abbildung

$$\nabla^n \xrightarrow{\quad \sigma_* \quad} \nabla^m \xrightarrow{\quad y \quad} K \ .$$

Wir können also die simpliziale Menge X identifizieren mit einem Unterkomplex von dem singulären Komplex $\mathrm{S}(K)$. $\square$

Beispiel. Sei, speziell, $K = \nabla^k$ der geordnete Simplizialkomplex, der aus dem Standard-Simplex der Dimension k und seinen Seiten besteht. Die m-dimensionalen Seiten sind in $1{:}1$ Beziehung zu den injektiven Abbildungen

$$\delta : \ [m] \ \longrightarrow \ [k] \quad ,$$

die Beziehung ist gegeben durch

$$\textit{Seite} \ \longmapsto \ \textit{Menge ihrer Ecken.}$$

Wenn wir zu der zugehörigen simplizialen Menge übergehen, so entsprechen die n-Simplizes darin nun, allgemein, den Abbildungen

$$\alpha : \ [n] \longrightarrow [k] \ .$$

Nämlich zu der Abbildung α gehört das "affine singuläre Simplex"

$$\alpha_* : \ \nabla^n \longrightarrow \nabla^k \ .$$

Es stellt sich heraus, daß man diese spezielle simpliziale Menge auch noch einfacher definieren kann, und zwar auf rein kombinatorische Weise:

Definition. Die simpliziale Menge *Standard-k-Simplex*, Notation Δ^k, ist gegeben durch

$$(\Delta^k)_n \ = \ \mathrm{Hom}_\Delta(\,[n]\,,\,[k]\,)$$

(die Menge der Abbildungen in Δ von $[n]$ nach $[k]$), und, für $\alpha : [n'] \to [n]$ in Δ, ist die induzierte Abbildung $\alpha^* : (\Delta^k)_n \to (\Delta^k)_{n'}$ gegeben durch Komposition,

$$\alpha^*(\ \beta : \ [n] \ \longrightarrow \ [k] \ ) \quad := \qquad \beta\alpha : \ \ [n'] \ \xrightarrow{\quad \alpha \quad} \ [n] \ \xrightarrow{\quad \beta \quad} \ [k] \ .$$

Der Simplizialkomplex "k-Simplex" hat einen Unterkomplex "Rand", der gegeben ist durch die Vereinigung der eigentlichen Seiten. Dem entspricht hier eine Unter-simpliziale-Menge von Δ^k, die wir als den *Rand* von Δ^k bezeichnen, Notation $\partial\Delta^k$. Die Simplizes in $\partial\Delta^k$ sind gerade die Simplizes $[n] \to [k]$, die "über eine eigentliche Seite faktorisieren", (d.h. über eine der Abbildungen $\delta_i : [k{-}1] \longrightarrow [k]$). Oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$(\partial\Delta^k)_n \ = \ \{\, \alpha : \ [n] \to [k] \ \ | \ \ \alpha \ \textit{nicht} \ \text{surjektiv} \,\} \ .$$

Wie bei Räumen, so möchten wir auch hier nun eine "k-Sphäre" konstruieren, indem wir den 'Quotienten' von Δ^k nach $\partial\Delta^k$ bildet. Es ist nicht schwer, dem einen Sinn zu geben. Wir benötigen dafür (wie für andere Dinge auch) noch eine allgemeine Konstruktion:

DEFINITION. Eine *Äquivalenzrelation auf einer simplizialen Menge* X bedeutet:

(i) eine Äquivalenzrelation auf jeder der Mengen X_n ,

(ii) wobei diese verträglich sind mit den Strukturabbildungen; d.h. wenn $x, x' \in X_n$ und $\alpha : [n'] \to [n]$, dann: $x \backsim x'$ in $X_n \implies \alpha^*(x) \backsim \alpha^*(x')$ in $X_{n'}$.

In dieser Situation können wir eine neue simpliziale Menge bilden,

$$(X/_{\backsim})_n \ := \ X_n/_{\backsim} \qquad (+ \textit{ induzierte Strukturabbildungen}) \ .$$

Die Äquivalenzrelation " $\backsim$ " auf X induziert nun eine Äquivalenzrelation auf

$$\dot{\bigcup}_n \ X_n \times \nabla^n$$

und damit dann auch auf der geometrischen Realisierung $|X|$.

SATZ. $\quad | X/_{\backsim} | \ \cong \ | X | /_{\backsim}$.

BEWEIS. Die beiden Äquivalenzrelationen " $\backsim$ ", sowie " $\sim$ " (aus der Konstruktion der geometrischen Realisierung), erzeugen zusammen eine Äquivalenzrelation " $\sim \vee \backsim$ ". Es ist dann

$$\begin{aligned} |X|/_{\backsim} \ &\cong \ (\ \dot{\bigcup}_n \ X_n \times \nabla^n \ /_{\sim} \ ) \ /_{\backsim} \\ &\cong \ \ \dot{\bigcup}_n \ X_n \times \nabla^n \ /_{\sim \vee \backsim} \\ &\cong \ (\ \dot{\bigcup}_n \ X_n \times \nabla^n \ /_{\backsim} \ ) \ /_{\sim} \\ &\cong \ \ | \ X/_{\backsim} \ | \ . \end{aligned}$$

□

KOROLLAR. Ist X' Unter-simpliziale-Menge in X , dann können wir eine simpliziale Menge "Kollabieren von X' zu einem Punkt" bilden,

$$(\ X/X'\ )_n \ := \ X_n/X'_n \qquad (+ \textit{ induzierte Strukturabbildungen}) \ .$$

Und es ist $|\ X/X'\ | \ \cong \ |X| \, / \, |X'|$.

BEISPIEL (*Konstruktion einer k-Sphäre*). $\quad \$^k \ := \ \Delta^k/\partial\Delta^k \quad$ (wenn $k \geq 1$).

In Δ^k gibt es ein nicht-ausgeartetes Simplex, das nicht in $\partial\Delta^k$ liegt, nämlich $\mathrm{Id} : [k] \to [k]$. Alle anderen nicht-ausgearteten Simplizes liegen in $\partial\Delta^k$. Unter der Quotientenbildung gehen sie also nach $\partial\Delta^k / \partial\Delta^k \ \cong \ \Delta^0$ und werden demgemäß ausgeartete Simplizes, sofern ihre Dimension > 0 ist. In $\$^k$ gibt es deshalb nur zwei nicht-ausgeartete Simplizes, nämlich jeweils eines in den Dimensionen 0 und k . Es ist

$$|\ \$^k \ | \ \cong \ |\Delta^k| \, / \, |\partial\Delta^k| \ \cong \ \nabla^k/\partial\nabla^k \ \cong \ S^k \ .$$

Die resultierende Zellenstruktur der k-Sphäre folglich hat eine 0-Zelle und eine k-Zelle.

Es ist manchmal nützlich zu wissen, daß für simpliziale Mengen ein Analogon des *Zellenaufbaus* für CW-Komplexe existiert. Die Rolle des n-Balls (Modell für n-Zellen) wird dabei übernommen von der simplizialen Menge *Standard-n-Simplex*, Δ^n . Wir überlegen uns zunächst, daß zu jedem Simplex einer simplizialen Menge eine *repräsentierende Abbildung* gehört.

SATZ. *Sei X eine simpliziale Menge, $x \in X_n$ ein n-Simplex. Es gibt eine Abbildung von simplizialen Mengen*

$$\overline{x} : \Delta^n \longrightarrow X$$

mit der Eigenschaft

$$x = \text{Bild des nicht-ausgearteten } n\text{-Simplexes von } \Delta^n ;$$

diese Abbildung $\overline{x}$ ist eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Das ist fast eine Trivialität, wenn man es nur richtig hinschreibt. Für Δ^n haben wir nämlich die kanonische Beschreibung

$$(\Delta^n)_m = \mathrm{Hom}_\Delta(\,[m]\,,\,[n]\,)$$

wobei das nicht-ausgeartete n-Simplex von Δ^n dem Element

$$(\,\mathrm{Id}\colon\ [n] \to [n]\,) \in \mathrm{Hom}_\Delta(\,[n]\,,\,[n]\,)$$

entspricht. Wir definieren, $\overline{x}(\,\mathrm{Id} : [n] \to [n]\,) := x$. Die hypothetische Abbildung $\overline{x}$ ist hierdurch eindeutig bestimmt, wegen

$$\overline{x}(\,\alpha\colon [m] \to [n]\,) = \overline{x}(\,\alpha^*(\mathrm{Id}\colon [n] \to [n]\,)\,) = \alpha^*(\,\overline{x}(\,\mathrm{Id}\colon [n] \to [n]\,)\,) = \alpha^*(x)$$

(wobei die erste Gleichheit nach Definition der simplizialen Struktur von Δ^n besteht; und die zweite aufgrund der Tatsache, daß $\overline{x}$ eine Abbildung von simplizialen Mengen sein soll).

Wir können nun umgekehrt diese Formel auch als *Definition* von $\overline{x}$ nehmen: $\overline{x}$ ist dann eine Abbildung von simplizialen Mengen; der Test dafür, für $\beta\colon [\ell] \to [m]$, ist

$$\begin{aligned} \overline{x}(\,\beta^*(\,\alpha\colon [m] \to [n]\,)\,) &= \overline{x}(\,[\ell] \xrightarrow{\alpha\beta} [n]\,) = (\alpha\beta)^*(x) \\ &= \beta^*(\,\alpha^*(x)\,) = \beta^*(\,\overline{x}(\,\alpha\colon [m] \to [n]\,)\,) \ , \end{aligned}$$

m.a.W., das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\Delta^n)_m & \xrightarrow{\overline{x}} & X_m \\ {\scriptstyle \beta^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \beta^*} \\ (\Delta^n)_\ell & \xrightarrow{\overline{x}} & X_\ell \end{array}$$

kommutiert, wie verlangt. $\square$

Die Abbildung $\overline{x}$ heißt auch die *repräsentierende Abbildung* von x .

Satz. *Die simpliziale Menge* X *ist isomorph* (in kanonischer Weise) *zu*

$$\dot{\bigcup}_n \, X_n \times \Delta^n \,/\!\sim \quad ,$$

wo die Äquivalenzrelation erzeugt wird von der Vorschrift, daß für jedes $\gamma\colon [n] \to [p]$ *die Bilder der beiden Abbildungen*

$$X_n \times \Delta^n \xleftarrow{\ \gamma^* \times \mathrm{Id}\ } X_p \times \Delta^n \xrightarrow{\ \mathrm{Id} \times \gamma_*\ } X_p \times \Delta^p$$

zu identifizieren sind; mit anderen Worten: für jedes y in X_p, für jede Dimension m und für jedes z in $(\Delta^n)_m$, ist

$$X_n \times (\Delta^n)_m \ \ni \ (\,\gamma^*(y)\,,\, z\,) \quad \sim \quad (\,y\,,\, \gamma_*(z)\,) \ \in \ X_p \times (\Delta^p)_m$$

(hierbei ist $\gamma_* : \Delta^n \to \Delta^p$ die Abbildung von simplizialen Mengen, die definiert ist durch $\gamma_*(\,\alpha : [m] \to [n]\,) \ := \ \gamma\,\alpha\ )$.

Beweis. Zunächst ist " $\sim$ " tatsächlich eine Äquivalenzrelation von simplizialen Mengen; denn sei $\beta : [\ell] \to [m]$ in Δ, und seien (y,m,z) und γ wie oben, dann ist

$$\beta^*(\gamma^*(y),z) \ = \ (\gamma^*(y),\beta^*(z)\,) \ \sim \ (y,\gamma_*\beta^*(z)\,) \ = \ (y,\beta^*\gamma_*(z)\,) \ = \ \beta^*(y,\gamma_*(z)\,)\ .$$

Die repräsentierenden Abbildungen für die n-Simplizes kann man zusammenfassen zu einer Abbildung

$$X_n \times \Delta^n \longrightarrow X \ ;$$

auf den m-Simplizes ist diese Abbildung gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} X_n \times \mathrm{Hom}_\Delta(\,[m]\,,\,[n]\,) & \longrightarrow & X_m \\ (\ x\ ,\ \alpha\colon [m] \to [n]\ ) & \longmapsto & \alpha^*(x) \quad . \end{array}$$

Durch weiteres Zusammenfassen all dieser Abbildungen erhalten wir eine Abbildung

$$\dot{\bigcup}_n \, X_n \times \Delta^n \ \longrightarrow \ X \ .$$

Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv (wenn $x \in X_n$, dann ist $x = \overline{x}(\mathrm{Id}_{[n]})$).

Wir zeigen nun: (i) die Abbildung ist mit der Äquivalenzrelation verträglich; und (ii) nach Übergang zu Äquivalenzklassen wird die Abbildung ein Isomorphismus.

Zu (i). Sei γ wie oben. Sei auch (y,m,z) wie oben, $y \in X_p$, $z \in (\Delta^n)_m$,

$$z \ = \ (\alpha\colon [m] \to [n]\,) \ \in \ \mathrm{Hom}_\Delta(\,[m]\,,\,[n]\,)\ .$$

Dann (nach Definition der repräsentierenden Abbildung von $\gamma^*(y)$)

$$(\gamma^*(y),z) \ \longmapsto \ \alpha^*(\gamma^*(y)\,)$$

und andererseits

$$(y,\gamma_*(z)\,) \ = \ (\,y\,,\,[m] \xrightarrow{\gamma\alpha} [p]\,) \ \longmapsto \ (\gamma\alpha)^*(y) \ ,$$

was dasselbe ist (weil $(\gamma\,\alpha)^* \ = \ \alpha^* \circ \gamma^*$).

Zu (ii). Sei $x \in X_n$ und sei $(x\,,\,\alpha\colon [m] \to [n])$ ein m-Simplex von $\dot{\bigcup} X_n \times \Delta^n$.

Ist α nicht surjektiv, etwa

$$\alpha = \gamma\,\alpha' \;:\qquad [m] \xrightarrow{\;\alpha'\;} [q] \xrightarrow{\;\gamma\;} [n]$$

(wo γ injektiv ist, aber nicht bijektiv), dann ist

$$(x,\alpha) \;=\; (\,x\,,\,\gamma_*(\alpha')\,) \;\sim\; (\,\gamma^*(x)\,,\,\alpha'\,)\;,$$

wo $\gamma^*(x) \in X_q$ und $q < n$ (ein einfacherer Repräsentant !).

Ist andererseits x ausgeartet, etwa $x = \delta^*(x')$ (wo $\delta\colon [n] \to [k]$ surjektiv ist, aber nicht bijektiv), dann ist

$$(x,\alpha) \;=\; (\,\delta^*(x')\,,\,\alpha\,) \;\sim\; (\,x'\,,\,\delta_*(\alpha)\,)$$

wo $x' \in X_k$ und $k < n$ (wieder ein einfacherer Repräsentant).

Es folgt, daß jede Äquivalenzklasse einen Repräsentanten (x,α) hat, mit

$$x \;\textit{nicht-ausgeartet}\;, \qquad \alpha \;\textit{surjektiv}\;.$$

Dieser Repräsentant ist aber eindeutig bestimmt. Denn das Bildsimplex $\alpha^*(x)$ von X bestimmt, wie wir wissen, in eindeutiger Weise das nicht-ausgeartete Simplex x und die Ausartungs-Abbildung α .

Wir haben gezeigt, daß die resultierende Abbildung auf den Äquivalenzklassen,

$$\dot{\bigcup}_n\, X_n \times \Delta^n /_{\sim} \;\longrightarrow\; X\;,$$

bijektiv ist. Aber eine bijektive Abbildung von simplizialen Mengen ist automatisch schon ein Isomorphismus (es ist automatisch so, daß die Umkehrabbildung mit den simplizialen Strukturabbildungen verträglich ist). □

Bemerkung. Geometrische Realisierung ist verträglich mit disjunkter Vereinigung und auch mit dem Übergang zu Äquivalenzklassen. Deshalb

$$|X| \;\cong\; |\,\dot{\bigcup}_n\, X_n \times \Delta^n /_{\sim}\,| \;\cong\; \dot{\bigcup}_n\, X_n \times |\Delta^n| /_{\sim} \;\cong\; \dot{\bigcup}_n\, X_n \times \nabla^n /_{\sim}\;.$$

Der Isomorphismus

$$X \;\cong\; \dot{\bigcup}_n\, X_n \times \Delta^n /_{\sim}$$

ist so etwas wie das "kombinatorische Modell für die geometrische Realisierung". □

Auch für simpliziale Mengen kann man eine *Skelett-Filtrierung* definieren.

Definition. Das n-*Skelett* von X ist definiert als die simpliziale Menge $\mathrm{Skel}_n(X)$ (eine Unter-simpliziale-Menge von X), deren k-Simplizes gegeben sind durch

$$\mathrm{Skel}_n(X)_k \;:=\; \{\,x \in X_k \;\mid\; x \text{ ist Ausartung von einem Simplex der Dimension } \leq n\,\}\,.$$

Satz. *Es ist*

$$\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \cup_{J_n \times \partial\Delta^n} J_n \times \Delta^n \;\cong\; \mathrm{Skel}_n(X)$$

wo J_n *die Menge der nicht-ausgearteten* n*-Simplizes bezeichnet.*

Beweis. Man hat eine Abbildung $\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \,\dot\cup\, J_n{\times}\Delta^n \longrightarrow \mathrm{Skel}_n(X)$. Auf dem Teil $\mathrm{Skel}(X)_{n-1}$ ist die Abbildung durch die Inklusion gegeben, und auf dem Teil $J_n \times \Delta^n$ durch die charakteristischen Abbildungen für die nicht-ausgearteten n-Simplizes.

Die Abbildung ist surjektiv. Denn wenn ein k-Simplex von $\mathrm{Skel}_n(X)$ nicht in $\mathrm{Skel}_{n-1}(X)$ liegt, dann muß es Ausartung von einem nicht-ausgearteten Simplex der Dimension n sein; es liegt dann im Bild von $J_n \times \Delta^n$.

Wir erklären eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \,\dot\cup\, J_n{\times}\Delta^n$ dadurch, daß wir für jedes Simplex aus der Unter-simplizialen-Menge $J_n \times \partial\Delta^n$ dessen Bild unter der Inklusion von $J_n{\times}\partial\Delta^n$ in $J_n{\times}\Delta^n$ zu äquivalent erklären mit dem Bild unter der Abbildung (Einschränkung der charakteristischen Abbildungen) $J_n \times \partial\Delta^n \to \mathrm{Skel}_{n-1}(X)$.

Die Abbildung $\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \,\dot\cup\, J_n \times\Delta^n \longrightarrow \mathrm{Skel}_n(X)$ ist mit der Äquivalenzrelation verträglich, sie faktorisiert deshalb über die Quotienten-simpliziale-Menge und definiert somit eine Abbildung $\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \cup_{J_n \times \partial\Delta^n} J_n{\times}\Delta^n \longrightarrow \mathrm{Skel}_n(X)$. Als Faktorisierung einer surjektiven Abbildung ist letztere Abbildung ebenfalls surjektiv.

Die Abbildung ist auch injektiv. Denn wenn ein Simplex in $J_n \times \Delta^n$ Dimension $\leq n{-}1$ hat, oder Ausartung von einem Simplex dieser Art ist, dann liegt es in $\partial\Delta^n$ und ist deshalb schon mit einem Simplex in $\mathrm{Skel}_{n-1}(X)$ durch die Äquivalenzrelation identifiert worden. Wenn andererseits ein Simplex von $J_n \times \Delta^n$ nicht in der Unter-simplizialen-Menge $\partial\Delta^n$ liegt, dann hat es in $\mathrm{Skel}_n(X)$ sicherlich nicht dasselbe Bild wie irgendein Simplex aus $\mathrm{Skel}_{n-1}(X)$, wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von Simplizes von X in der Form “Ausartung eines nicht-ausgearteten Simplexes”.

Die Abbildung $\mathrm{Skel}_{n-1}(X) \cup_{J_n \times \partial\Delta^n} J_n \times \Delta^n \longrightarrow \mathrm{Skel}_n(X)$ ist also bijektiv und, wie früher schon festgestellt, deshalb ein Isomorphismus. □

Die Verträglichkeit von geometrischer Realisierung mit Äquivalenzrelationen ergibt

Korollar. *Sei* J_n *die Menge der nicht-ausgearteten* n*-Simplizes. Es ist*

$$|\,\mathrm{Skel}_{n-1}(X)\,| \;\cup_{J_n \times \partial\nabla^n} J_n \times \nabla^n \;\cong\; |\,\mathrm{Skel}_n(X)\,|\;. \qquad \Box$$

Korollar. $|X|$ *ist CW-Komplex, mit n-Skelett* $|\,\mathrm{Skel}_n(X)\,|$.

Letzteres folgt, weil die simpliziale Menge X Quotient von der disjunkten Vereinigung

$$\mathrm{Skel}_0(X) \;\dot\cup\; \mathrm{Skel}_1(X) \;\dot\cup\; \mathrm{Skel}_2(X) \;\dot\cup\; \ldots$$

ist bezüglich der Äquivalenzrelation, die $\mathrm{Skel}_n(X)$ mit einer Unter-simplizialen-Menge von $\mathrm{Skel}_{n+1}(X)$ identifiziert, für alle n . Wegen der Verträglichkeit von geometrischer Realisierung mit Äquivalenzrelationen folgt, daß $|X|$ Quotientenraum von

$$|\,\mathrm{Skel}_0(X)\,| \;\dot\cup\; |\,\mathrm{Skel}_1(X)\,| \;\dot\cup\; |\,\mathrm{Skel}_2(X)\,| \;\dot\cup\; \ldots$$

bezüglich der entsprechenden Äquivalenzrelation ist. □

Homotopie (bei simplizialen Mengen)

Es geht darum, den Homotopiebegriff über die Konstruktionen

$$\text{top. Raum} \xmapsto{\text{sing. Komplex}} \text{simpliziale Menge} \xmapsto{\text{geom. Realisierung}} \text{top. Raum}$$

zu verfolgen und, später auch,

$$\text{simpliziale Menge} \longmapsto \text{Kettenkomplex, Homologie} .$$

Eine *Homotopie von Abbildungen topologischer Räume* ist, nach Definition, selbst eine Abbildung, nämlich

$$F : V \times [0,1] \longrightarrow W ,$$

wenn V und W die beteiligten topologischen Räume bezeichnen. Durch Übergang zu den singulären Komplexen erhalten wir hieraus eine Abbildung von simplizialen Mengen

$$\mathrm{S}(F) \ : \ \mathrm{S}(V \times [0,1]) \ \longrightarrow \ \mathrm{S}(W) \ .$$

Nun ist aber

$$\mathrm{S}(V \times [0,1]) \ \cong \ \mathrm{S}(V) \times \mathrm{S}([0,1])$$

(eine Abbildung von ∇^n in den Produktraum $V \times [0,1]$ ist dasselbe wie ein Paar von Abbildungen $\nabla^n \to V$ und $\nabla^n \to [0,1]$). Und die unerfreulich große simpliziale Menge $\mathrm{S}([0,1])$ enthält eine viel schönere kleinere, nämlich Δ^1 . Dies ist die Unter-simpliziale-Menge des “affinen singulären Komplexes”; vermöge der Identifikation $[0,1] \cong \nabla^1$ kann die Inklusion beschrieben werden als

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 & \longrightarrow & \mathrm{S}(\nabla^1) \\ (\,\alpha\colon [n] \to [1]\,) & \longmapsto & (\,\alpha_*\colon \nabla^n \to \nabla^1\,) \ . \end{array}$$

Aus der Homotopie F und der obigen Abbildung $\mathrm{S}(F)$ erhalten wir also per Komposition eine Abbildung $\mathrm{S}(V) \times \Delta^1 \to \mathrm{S}(W)$,

$$\mathrm{S}(V) \times \Delta^1 \xrightarrow{\text{Inkl.}} \mathrm{S}(V) \times \mathrm{S}(\nabla^1) \xrightarrow{\approx} \mathrm{S}(V \times [0,1]) \xrightarrow{\mathrm{S}(F)} \mathrm{S}(W) \ .$$

Hierbei haben wir den Begriff des *Produktes* von simplizialen Mengen verwendet: das Produkt von X und X' ist, nach Definition, die simpliziale Menge

$$[n] \ \longmapsto \ (\,X \times X'\,)_n \ := \ X_n \times X'_n \ ,$$

wo die simplizialen Strukturabbildungen komponentenweise operieren.

Der Übergang von topologischen Räumen zu simplizialen Mengen vermöge von

$$X \longmapsto \mathrm{S}(X)$$

wird also "Homotopie" respektieren, wenn wir die folgende Definition zugrunde legen.

Definition. Seien X und Y simpliziale Mengen. Eine *Homotopie von Abbildungen von X nach Y* soll eine Abbildung von simplizialen Mengen sein,

$$G : \ X \times \Delta^1 \longrightarrow Y \ .$$

Und zwar ist G eine *Homotopie von* $g_0 : X \to Y$ *zu* $g_1 : X \to Y$, wo g_i die zusammengesetzte Abbildung

$$X \cong X \times \Delta^0 \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \times j_i} X \times \Delta^1 \xrightarrow{\quad G \quad} Y$$

bezeichnet, und $j_i : \Delta^0 \to \Delta^1$ die beiden Inklusionen.

Bemerkung. Homotopie in diesem Sinne ist i.a. *keine* Äquivalenzrelation: die Relation "es gibt eine Homotopie von g_0 zu g_1" braucht weder symmetrisch noch transitiv zu sein (vgl. Übungen). □

Unter der geometrischen Realisierung geht dieser Homotopiebegriff in den üblichen über, d.h. eine Abbildung $X \times \Delta^1 \longrightarrow Y$ induziert eine Abbildung $|X| \times |\Delta^1| \longrightarrow |Y|$. Das ist ein ganz und gar nicht-trivialer Sachverhalt, er beruht auf dem folgenden Satz.

Satz. *Für jede simpliziale Menge X ist die natürliche Abbildung*

$$|\, X \times \Delta^1 \,| \longrightarrow |X| \times |\Delta^1|$$

eine topologische Äquivalenz.

Die in dem Satz genannte Abbildung hat dabei die folgende Beschreibung. Sie entspricht einem Paar von Abbildungen $|\, X \times \Delta^1 \,| \longrightarrow |X|$ und $|\, X \times \Delta^1 \,| \longrightarrow |\Delta^1|$. Diese beiden Abbildungen sind, nach Definition, gegeben durch die geometrische Realisierung der ersten Projektion, $X \times \Delta^1 \to X$, und die geometrische Realisierung der zweiten Projektion, $X \times \Delta^1 \to \Delta^1$.

Zum Beweis des Satzes muß ein spezieller Fall gesondert nachgerechnet werden, dessen Beweis wir auf später verschieben.

Lemma. *Die natürliche Abbildung* $|\, \Delta^n \times \Delta^1 \,| \longrightarrow |\Delta^n| \times |\Delta^1|$ *ist eine topologische Äquivalenz.*

Beweis des Satzes. Wir benutzen die oben erhaltene Isomorphie

$$X \cong \dot{\bigcup}_n X_n \times \Delta^n / \sim$$

sowie die Tatsache, daß die geometrische Realisierung verträglich ist mit

- disjunkter Vereinigung
- Übergang zu Quotienten (–räumen).

Zusatz S. 97

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |\,X\times\Delta^1\,| & \xrightarrow{\text{konstruierter Isomorphismus}} & |X|\,\times\,|\Delta^1| \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ |X| & \xrightarrow{\quad = \quad} & |X| \end{array}$$

kann man, etwas formaler, bekommen indem man die eingangs benutzte Kette von Umformungen noch einmal hinschreibt; wobei aber Δ^1 durch Δ^0 ersetzt ist:

$$\begin{aligned} \big|\; X\times\Delta^0 \;\big| \quad &\cong \quad \big|\,\big(\,\dot{\bigcup}_n X_n\times\Delta^n \,/\sim\big)\,\times\,\Delta^0\,\big| \\ &\cong \quad \big|\,\big(\,\dot{\bigcup}_n\,(X_n\times\Delta^n\times\Delta^0)\,\big)\,/\sim\,\big| \\ &\cong \quad \dot{\bigcup}_n X_n\times\,|\,\Delta^n\times\Delta^0\,|\;/\sim \\ &\cong \quad \dot{\bigcup}_n X_n\times|\Delta^n|\,\times\,|\Delta^0|\;/\sim \\ &\cong \quad (\,\dot{\bigcup}_n X_n\times|\Delta^n|\,/\sim\,)\,\times\,|\Delta^0| \\ &\cong \quad |X|\,\times\,|\Delta^0|\;. \end{aligned}$$

— was natürlich nichts anderes ist als eine Folge von Beschreibungen von $|X|$ selbst. Die Abbildung $\Delta^1\to\Delta^0$ gibt dann die (vertikale) Abbildung

$$|\,X\times\Delta^1\,|\to|\,X\times\Delta^0\,|\;=\;|X| \qquad \text{bzw.} \qquad |X|\times|\Delta^1|\to|X|\times|\Delta^0|\;=\;|X|\;.$$

Ähnlich kann man auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |\,X\times\Delta^1\,| & \xrightarrow{\text{konstruierter Isomorphismus}} & |X|\,\times\,|\Delta^1| \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ |\Delta^1| & \xrightarrow{\quad = \quad} & |\Delta^1| \end{array}$$

in solcher Weise interpretieren. Man schreibt die obige Kette von Umformungen noch einmal hin für den Fall $X'=\Delta^0$; und benutzt dann die Abbildung $X\to\Delta^0$.

Es ist

$$
\begin{array}{lrl}
 & \mid X \times \Delta^1 \mid & \cong \ \mid \big(\ \dot{\bigcup}_n \ X_n \times \Delta^n \ / \sim \big) \ \times \ \Delta^1 \ \mid \\
\text{(induzierte Äquivalenzrelation)} & & \cong \ \mid \big(\ \dot{\bigcup}_n \ (X_n \times \Delta^n \times \Delta^1) \ \big) \ / \sim \ \mid \\
\text{(Kompatibilität mit disj. Verein. und Quot.)} & & \cong \ \dot{\bigcup}_n \ X_n \times \mid \Delta^n \times \Delta^1 \mid \ / \sim \\
\text{(Lemma)} & & \cong \ \dot{\bigcup}_n \ X_n \times |\Delta^n| \times |\Delta^1| \ / \sim \\
\text{(} |\Delta^1| \text{ kompakt)} & & \cong \ \big(\ \dot{\bigcup}_n \ X_n \times |\Delta^n| \ / \sim \ \big) \ \times \ |\Delta^1| \\
 & & \cong \ \ |X| \times |\Delta^1| \ .
\end{array}
$$

Zu zeigen ist noch, daß der aus dieser Kette durch Zusammensetzen resultierende Isomorphismus durch die natürliche Abbildung gegeben ist, wie behauptet. Nun ist aber jeder der obigen Isomorphismen verträglich mit der Projektion zu $|X|$, deshalb haben wir ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{array}{ccc}
\mid X \times \Delta^1 \mid & \xrightarrow{\text{konstruierter Isomorphismus}} & |X| \times |\Delta^1| \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
|X| & \xrightarrow{=} & |X|
\end{array}
$$

wo die vertikalen Pfeile von der ersten Projektion induziert sind.

Ähnlich haben wir auch ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{array}{ccc}
\mid X \times \Delta^1 \mid & \xrightarrow{\text{konstruierter Isomorphismus}} & |X| \times |\Delta^1| \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
|\Delta^1| & \xrightarrow{=} & |\Delta^1|
\end{array}
$$

wo die vertikalen Pfeile von der zweiten Projektion induziert sind.

Durch die Kombination dieser beiden Diagramme erhalten wir nun ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{array}{ccc}
\mid X \times \Delta^1 \mid & \xrightarrow{\text{konstruierter Isomorphismus}} & |X| \times |\Delta^1| \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
|X| \times |\Delta^1| & \xrightarrow{=} & |X| \times |\Delta^1|
\end{array}
$$

in dem der rechte vertikale Pfeil als seine Komponenten die beiden Projektionen hat. Der rechte vertikale Pfeil ist also die identische Abbildung auf $|X| \times |\Delta^1|$. Es folgt, daß der konstruierte Isomorphismus (der obere waagerechte Pfeil) gleich der durch den linken vertikalen Pfeil gegebenen Abbildung ist; also gleich der natürlichen Abbildung, wie gewünscht. $\square$

Beweis des Lemmas. Um einzusehen, daß $|\Delta^n \times \Delta^1| \xrightarrow{\approx} |\Delta^n| \times |\Delta^1|$, werden wir das 'Prisma' $|\Delta^n| \times |\Delta^1|$ in Simplizes zerlegen (das heißt, als Simplizialkomplex darstellen) und anschließend uns dann davon überzeugen, daß die simpliziale Menge $\Delta^n \times \Delta^1$ in ganz ähnlicher Weise in simpliziale Mengen vom Typ "Standard-Simplex" zerlegt werden kann.

Für die Diskussion von Simplizialkomplexen begeben wir uns in einen euklidischen Raum. Wir identifizieren also $|\Delta^n|$ mit einem Simplex in $\mathbb{R}^n$ und $|\Delta^1|$ mit dem Einheitsintervall in $\mathbb{R}^1$. Das Produkt $|\Delta^n| \times |\Delta^1|$ wird dadurch zu einem Prisma in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$.

Im einzelnen seien dazu $v_0 , v_1 , \ldots , v_n$ affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^n$. Die Punkte $(v_0, 0) , \ldots , (v_n, 0)$ und $(v_0, 1) , \ldots , (v_n, 1)$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ seien abkürzend mit $v'_0 , \ldots , v'_n$ und $v''_0 , \ldots , v''_n$ bezeichnet. Für jedes i , wo $0 \leq i \leq n$, ist es nun richtig, daß

$$v'_0 , \ldots , v'_i , v''_i , \ldots , v''_n$$

affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ sind, so daß also

$$S_i \ := \ \operatorname{Simp}(v'_0 , \ldots , v'_i , v''_i , \ldots , v''_n)$$

ein affines Simplex der Dimension $n{+}1$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ ist. Dieses Simplex ist enthalten in dem uns interessierenden Produktraum

$$P \ := \ \operatorname{Simp}(v_0 , \ldots , v_n) \ \times \ [0,1] \ ,$$

denn der Produktraum ist konvex, er enthält die Punkte $v'_0 , \ldots , v'_i , v''_i , \ldots , v''_n$, und er enthält damit auch deren konvexe Hülle.

Wir werden uns nun davon überzeugen, daß die Simplizes S_i , $0 \leq i \leq n$, eine Darstellung von P als Simplizialkomplex geben. Dazu werden wir nachprüfen, daß die Vereinigung der S_i das ganze Prisma P ist und daß die S_i die Durchschnittsbedingung erfüllen (der Durchschnitt von je zweien ist gemeinsame Seite von beiden); tatsächlich werden wir sehen, daß, für $i < j$, der Durchschnitt von S_i und S_j dasjenige Simplex ist, das von der Eckenmenge $v'_0 , \ldots , v'_i , v''_j , \ldots , v''_n$ aufgespannt wird.

Dies sagt insbesondere auch, S_i und S_{i+1} treffen sich in einem n-Simplex (nämlich dem von $v'_0 , \ldots , v'_i , v''_{i+1} , \ldots , v''_n$ aufgespannten), und dieses n-Simplex ist die Seite mit der Nummer $i{+}1$ sowohl von S_i als auch von S_{i+1} (Weglassen von v''_i , beziehungsweise von v'_{i+1}).

Wir benutzen eine andere Darstellung von Punkten in einem Simplex. Nämlich zusätzlich zu der Darstellung der Punkte aus $\operatorname{Simp}(v_0 , \ldots , v_n)$ in baryzentrischen Koordinaten,

$$\{ \ t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \in \mathbb{R}^n \ | \ t_i \geq 0 \ , \ \sum t_i \ = 1 \ \} \ ,$$

haben wir auch eine Darstellung in Form einer aufsteigenden Folge

$$0 = a_0 \ \leq \ a_1 \ \leq \ \cdots \ \leq \ a_n \ \leq \ a_{n+1} = 1 \ .$$

Die Beziehung ist, daß

$$a_{i+1} \ = \ t_0 + \cdots + t_i$$

und, demgemäß,

$$t_0 = a_1 - a_0 \ , \quad t_1 = a_2 - a_1 \ , \quad \ldots\ldots \ , \quad t_n = a_{n+1} - a_n \ .$$

Für die Punkte aus $|\Delta^{n+1}|$ haben wir die analoge Darstellung als Folgen

$$0 = b_0 \ \leq \ b_1 \ \leq \ \cdots \ \leq \ b_{n+1} \ \leq \ b_{n+2} = 1 \ .$$

Die i-te Ecke von $|\Delta^{n+1}|$, für $0 \leq i \leq n{+}1$, entspricht dabei der Folge

$$0 \leq \cdots \leq 0 \ \leq \ 1 \leq \cdots \leq 1$$

mit $i+1$ Nullen und $n{-}i+1$ Einsen.

Wenn wir also, für $0 \leq i \leq n$, eine Abbildung $f_i : \ |\Delta^{n+1}| \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ definieren,

$$\begin{aligned} &0 = b_0 \ \leq \ b_1 \ \leq \ \cdots \ \leq \ b_{n+1} \ \leq \ b_{n+2} = 1 \quad \longmapsto \\ &\qquad (b_1{-}b_0)\, v'_0 + \cdots + (b_{i+1}{-}b_i)\, v'_i \ + \ (b_{i+2}{-}b_{i+1})\, v''_i + \cdots + (b_{n+2}{-}b_{n+1})\, v''_n \ , \end{aligned}$$

so gehen die Ecken von $|\Delta^{n+1}|$ unter der Abbildung gerade auf die Ecken von dem Simplex S_i. Das Simplex S_i ist also gleich dem Bild der Abbildung f_i.

Etwas mißbräuchlich wollen wir weiter f_i für diese Abbildung schreiben, wenn wir sie, andererseits, auffassen als eine Abbildung in den durch das Prisma gegebenen Unterraum. Die Abbildung hat dann die Beschreibung[1]

$$f_i : \ |\Delta^{n+1}| \ \longrightarrow \ \mathrm{Simp}(v_0 \, , \, \ldots \, , v_n) \times [0,1]$$

$$\begin{aligned} &0 = b_0 \ \leq \ b_1 \ \leq \ \cdots \ \leq \ b_{n+1} \ \leq \ b_{n+2} = 1 \quad \longmapsto \\ &\qquad \big(\ 0 = b_0 \ \leq \cdots \leq \ b_i \ \leq \ b_{i+2} \ \leq \cdots \ \leq \ b_{n+2} = 1 \ \ , \quad 1 - b_{i+1} \ \big) \ . \end{aligned}$$

Man sieht auf diese Weise, daß das ganze Prisma im Bild der Abbildungen f_i ist (genauer: es ist enthalten in der Vereinigung der Bilder der f_i). Denn sei (x,t) gegeben,

$$(\, x \, , \, t \,) \ = \ (\ 0 = a_0 \ \leq \ a_1 \ \leq \ \cdots \ \leq \ a_n \ \leq \ a_{n+1} = 1 \ , \quad t \ ) \ .$$

Es gibt dann ein i so daß $a_i \leq 1{-}t \leq a_{i+1}$, und (x,t) ist nun das Bild von

$$0 = b_0 \ \leq \ b_1 \ \leq \ \cdots \ \leq \ b_{n+1} \ \leq \ b_{n+2} = 1$$

unter der Abbildung f_i, wo

$$b_j \quad = \quad \begin{cases} a_j & j \leq i \\ 1{-}t & j = i{+}1 \\ a_{j-1} & j \geq i{+}2 \ . \end{cases}$$

Das Einsortieren von $1{-}t$ in die Folge der a's geht allerdings nicht in allen Fällen auf eindeutige Weise. Wenn nämlich $1{-}t \, = \, a_{i+1}$, dann kann $1{-}t$ sowohl vor als auch

[1] Denn die folgende Formel sagt z.B., daß diese Abbildung, gefolgt von der ersten Projektion, die j–te Ecke auf die j–te Ecke abbildet, wenn $j \leq i$; aber die j–te Ecke auf die $(j-1)$–te, wenn $j > i$. Das charakterisiert die Abbildung $\mathrm{pr}_1 \circ f_i$. Ähnlich auch mit der zweiten Projektion.

nach a_{i+1} einsortiert werden. Die zugehörige Folge der b's hat dann die Eigenschaft, daß

$$b_{i+1} = b_{i+2} \ .$$

Diese Eigenschaft charakterisiert die Punkte der $(i{+}1)$-ten Seite. Es resultiert, daß der Durchschnitt von S_i und S_{i+1} ein Simplex ist, und zwar die $(i{+}1)$-te Seite von beiden.

Allgemeiner gilt auch, aus demselben Grund, daß der Durchschnitt von S_i und S_j, für $i < j$, ein Simplex ist; nämlich diejenige Seite, die nicht die Ecken mit den Nummern $i{+}1$ bis j enthält. Die Punkte darin entsprechen den Folgen der b's mit $b_{i+1} = \cdots = b_{j+1}$.

Wir haben erhalten, daß der Produktraum $|\Delta^n| \times |\Delta^1|$ ein Simplizialkomplex ist; und zwar haben wir, schematisch, eine Beschreibung als Verklebekonstruktion

$$\nabla^{n+1} \cup_{\nabla^n} \nabla^{n+1} \cup_{\nabla^n} \cdots \cup_{\nabla^n} \nabla^{n+1}$$

mit $n{+}1$ Simplizes ∇^{n+1}, numeriert von 0 bis n. Dabei sind die beiden Simplizes mit den Nummern i und $i{+}1$ (wo $0 \leq i$ und $i{+}1 \leq n$) entlang ihrer $(i{+}1)$-ten Seiten miteinander verklebt.

Der ersten Projektion $|\Delta^n| \times |\Delta^1| \longrightarrow |\Delta^n|$ entspricht die Abbildung auf dem verklebten Raum, die auf dem Simplex mit der Nummer i gegeben ist durch die Ausartungsabbildung $\nabla^{n+1} \to \nabla^n$, bei der (im Bild) die Ecke mit der Nummer i zweimal getroffen wird. In der Beschreibung von Punkten durch aufsteigende Folgen entspricht dies der Abbildung, die aus der Folge

$$0 = b_0 \ \leq \ b_1 \ \leq \ \cdots \ \leq \ b_{n+1} \ \leq \ b_{n+2} = 1$$

den Term b_{i+1} wegläßt.

Der zweiten Projektion $|\Delta^n| \times |\Delta^1| \longrightarrow |\Delta^1|$ entspricht, analog, eine Abbildung auf dem verklebten Raum, die auf jedem der Simplizes eine bestimmte Ausartungsabbildung $\nabla^{n+1} \to \nabla^1$ ist. Nämlich von dem Simplex mit der Nummer i werden die Ecken mit den Nummern 0 bis i alle auf die Ecke mit der Nummer 0 in ∇^1 abgebildet; und die restlichen auf die Ecke mit der Nummer 1.

Es bleibt, die analoge Analyse von dem Produkt von simplizialen Mengen, $\Delta^n \times \Delta^1$, zu machen. Das ist, seltsamerweise, leichter. Der Trick ist, daß man diese simpliziale Menge als den "affinen singulären Komplex" von $\nabla^n \times \nabla^1$ auffassen kann und daß man die "affinen singulären Simplizes" wieder über Ordnungsrelationen beschreiben kann.

Es soll, wie früher auch, $[n]$ die geordnete Menge $\{\, 0 < \cdots < n \,\}$ bezeichnen. Wir wollen *geordnete Mengen* jetzt als einen Spezialfall von *partiell geordneten Mengen* auffassen. Das heißt, es gelten die üblichen Regeln

$$a \leq b \, , \ b \leq c \implies a \leq c \quad \text{und} \quad a \leq b \, , \ b \leq a \iff a = b \ ,$$

aber es muß nicht für je zwei Elemente immer eine Relation bestehen.

Das Produkt $[n] \times [1]$ ist keine geordnete Menge mehr, es ist aber immer noch eine partiell geordnete Menge; nämlich die partiell geordnete Menge der Paare

$$(i, j) \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \quad 0 \leq j \leq 1 \ ,$$

mit der Anordnung

$$(i, j) \ \leq \ (i', j') \quad \Longleftrightarrow \quad i \ \leq \ i' \text{ und } j \ \leq \ j' \ .$$

Einer ordnungserhaltenden Abbildung $[k] \longrightarrow [n] \times [1]$ entspricht nun eine Folge

$$(i_0, j_0) \ \leq \ (i_1, j_1) \ \leq \ \ldots \ \leq \ (i_k, j_k)$$

oder, was offenbar dasselbe ist, ein Paar von Folgen

$$i_0 \ \leq \ i_1 \ \leq \ \ldots \ \leq \ i_k \ , \quad j_0 \ \leq \ j_1 \ \leq \ \ldots \ \leq \ j_k \ ;$$

mit anderen Worten: ein Paar von Abbildungen $[k] \to [n]$ und $[k] \to [1]$.

Wenn wir also mit “$\mathrm{Hom}_{\mathit{Ord}}$” die Menge der ordnungserhaltenden Abbildungen bezeichnen, so haben wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathit{Ord}}(\, [k] \, , [n] \times [1] \,) \ \xrightarrow{\ \approx\ } \ (\Delta^n)_k \times (\Delta^1)_k \ = \ (\Delta^n \times \Delta^1)_k \ .$$

Der Isomorphismus ist verträglich mit *Rand*-Abbildungen (Weglassen von Termen) und *Ausartungs*-Abbildungen (Mehrfach-Nennung von Termen). Die simpliziale Menge $\Delta^n \times \Delta^1$ haben wir also nun vollkommen beschrieben mit Hilfe von partiell geordneten Mengen.

Die gewünschte Beziehung zu simplizialen Mengen vom Typ “Standard-Simplex” werden wir über die Betrachtung von *total geordneten Teilmengen* von $[n] \times [1]$ bekommen; das heißt, solchen Teilmengen, wo für jedes Paar von Elementen die Ordnungsrelation definiert ist (anders gesagt, wenn a und b Elemente sind, dann ist es entweder richtig, daß $a \leq b$ oder daß $b \leq a$).

Sei M eine Teilmenge in $[n] \times [1]$. Wenn M ein Element $(i, 1)$ enthält, dann sind alle *größeren* Elemente in M ebenfalls von der Art $(i', 1)$. Wenn umgekehrt M ein Element $(i, 0)$ enthält, dann sind alle *kleineren* Elemente in M auch von der Art $(i', 0)$. Wenn also M eine total geordnete Teilmenge in $[n] \times [1]$ ist, so folgt, daß M schon ganz enthalten ist in einer Teilmenge der Art

$$(\, 0 \, , 0 \,) \ < \ \ldots \ < \ (\, i \, , 0 \,) \ < \ (\, i \, , 1 \,) \ < \ \ldots \ < \ (\, n \, , 1 \,) \ .$$

Wir werden diese Teilmenge auffassen als das Bild von $[n{+}1]$ bezüglich einer injektiven Abbildung $g_i : [n{+}1] \longrightarrow [n] \times [1]$.

Wenn nun M sowohl im Bild von g_i liegt als auch im Bild von $g_{i'}$, wo $i < i'$, dann ist M notwendigerweise enthalten in der Teilmenge

$$(\, 0 \, , 0 \,) \ < \ \ldots \ < \ (\, i \, , 0 \,) \ < \ (\, i' \, , 1 \,) \ < \ \ldots \ < \ (\, n \, , 1 \,) \ .$$

Insbesondere liegt M in dem Fall schon im Bild der Inklusion $g_i \, \delta_{i+1} = g_{i+1} \, \delta_{i+1}$,

$$g_i \, \delta_{i+1} : \quad [n] \ \xrightarrow{\ \delta_{i+1}\ } \ [n{+}1] \ \xrightarrow{\ g_i\ } \ [n] \times [1] \ .$$

Die von der Abbildung g_i induzierte Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{Ord}(\,[k]\,,\,[n{+}1]\,) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ord}(\,[k]\,,\,[n]\times[1]\,)\ ,$$

ist injektiv und ist, für variables k , mit Rand- und Ausartungs-Abbildungen verträglich. Wir haben also eine Inklusion

$$g_{i*}:\ \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n \times \Delta^1\ .$$

Wegen der Identitäten $g_i\,\delta_{i+1} = g_{i+1}\,\delta_{i+1}$ setzen diese Inklusionen sich zusammen zu einer Abbildung auf der 'zusammengeklebten' simplizialen Menge

$$\Delta^{n+1} \cup_{\Delta^n} \Delta^{n+1} \cup_{\Delta^n} \ \dots\ \cup_{\Delta^n} \Delta^{n+1}\ ,$$

das heißt, derjenigen simplizialen Menge, die aus der disjunkten Vereinigung von $n{+}1$ Exemplaren Δ^{n+1} , numeriert von 0 bis n , dadurch entsteht, daß für jedes Paar $(\,i\,,i{+}1\,)$ (wo $0 \le i$ und $i{+}1 \le n$) die beiden Unter-simplizialen-Mengen $\delta_{i+1}(\Delta^n)$ in den durch i und $i{+}1$ numerierten Exemplaren Δ^{n+1} zu identifizieren sind.

Nun ist es so, daß jede Abbildung $[k] \longrightarrow [n]\times[1]$ faktorisiert als eine Surjektion, gefolgt von einer Injektion; und zwar in eindeutiger Weise. Deshalb überträgt sich das oben über Teilmengen gesagte auch auf Abbildungen. Das Resultat ist, daß die Abbildung

$$\Delta^{n+1} \cup_{\Delta^n} \Delta^{n+1} \cup_{\Delta^n} \ \dots\ \cup_{\Delta^n} \Delta^{n+1} \ \longrightarrow\ \Delta^n \times \Delta^1$$

sowohl surjektiv als auch injektiv, also ein Isomorphismus ist.

Geometrische Realisierung ergibt einen weiteren Isomorphismus

$$|\Delta^{n+1}| \cup_{|\Delta^n|} \ \dots\ \cup_{|\Delta^n|} |\Delta^{n+1}| \ \approx\ |\,\Delta^{n+1} \cup_{\Delta^n} \ \dots\ \cup_{\Delta^n} \Delta^{n+1}\,| \ \longrightarrow\ |\Delta^n \times \Delta^1|\ .$$

Seine Zusammensetzung mit dem früher konstruierten Isomorphismus

$$\nabla^{n+1} \cup_{\nabla^n} \cdots \cup_{\nabla^n} \nabla^{n+1} \ \longrightarrow\ |\Delta^n| \times |\Delta^1|$$

liefert nun den Isomorphismus $|\Delta^n \times \Delta^1| \approx |\Delta^n| \times |\Delta^1|$, den das Lemma behauptet.

Der Isomorphismus ist mit den Projektionen zu $|\Delta^n|$ und $|\Delta^1|$ verträglich. Denn was z.B. die erste Projektion angeht, so wurde früher festgestellt, daß die zusammengesetzte Abbildung

$$|\Delta^{n+1}| \xrightarrow{\ i-\text{te Inklusion}\ } |\Delta^n| \times |\Delta^1| \xrightarrow{\ \text{erste Projektion}\ } |\Delta^n|$$

diejenige Standard-Abbildung ist, bei der die i-te Ecke im Bild zweimal getroffen wird. Bei dem nun konstruierten Isomorphismus von simplizialen Mengen hat die zusammengesetzte Abbildung

$$\Delta^{n+1} \xrightarrow{\ i-\text{te Inklusion}\ } \Delta^n \times \Delta^1 \xrightarrow{\ \text{erste Projektion}\ } \Delta^n$$

offenbar dieselbe Beschreibung.

Der Beweis des Lemmas (und auch der des Satzes) ist damit abgeschlossen. $\square$

Homotopie (bei Kettenkomplexen)

Sei A eine abelsche Gruppe (die "Koeffizienten"-Gruppe). Der Übergang von einer simplizialen Menge X zum "Kettenkomplex von X mit Koeffizienten in A" ist, nach Definition, die folgende Konstruktion. Der simplizialen Menge X ist zugeordnet die Folge der abelschen Gruppen

$$A[X_n] \ := \ \left\{ \ \sum a_i \, x_i \ \middle| \ x_i \in X_n \, , \ a_i \in A \ \right\} \qquad \big(\text{endliche Summen (bis auf eine Äq.rel.)}\big)$$

mit den "Rand"-Homomorphismen ∂_n (oder, kurz, ∂)

$$\begin{aligned} \partial : \ \ A[X_n] & \longrightarrow A[X_{n-1}] \\ \textstyle\sum_k \ a_k \, x_k & \longmapsto \textstyle\sum_k \ \sum_i \ (-1)^i \ a_k \ d_i(x_k) \end{aligned}$$

Eine Homotopie für Abbildungen von simplizialen Mengen, von X nach Y, ist ihrerseits definiert als eine Abbildung von (anderen) simplizialen Mengen, nämlich als eine Abbildung $F : X \times \Delta^1 \longrightarrow Y$. Sie induziert damit eine Abbildung von Kettenkomplexen, nämlich die Abbildung, die in der Dimension n gegeben ist durch

$$F_n : \ A[\,(X \times \Delta^1)_n\,] \, = \, A[\,X_n \times (\Delta^1)_n\,] \ \longrightarrow \ A[Y_n]$$

(lineare Fortsetzung der Abbildung F).

Wir erwarten, daß wir in dieser Situation die Abbildung F_* wieder als *Homotopie* interpretieren können (was immer das heißen mag), und zwar als eine Homotopie zwischen den beiden Abbildungen $(f_0)_*$ und $(f_1)_*$

$$(f_i)_* : \ \ A[X] \, \cong \, A[X \times \Delta^0] \ \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \times \iota_i} \ A[X \times \Delta^1] \ \longrightarrow \ A[Y] \ ,$$

wo $\iota_i : \Delta^0 \to \Delta^1$ die beiden Inklusionen bezeichnet.

Behauptung. *Es gibt in dieser Situation eine Folge von Abbildungen*

$$(P_F)_n \ : \ A[X_n] \ \longrightarrow \ A[Y_{n+1}]$$

so daß

$$\partial \, (P_F)_n \ = \ (-1) \ (P_F)_{n-1} \, \partial \ + \ (f_1)_n \ - \ (f_0)_n \ .$$

Bemerkung. Der Buchstabe P steht für *Prisma*. Der Rand von einem Prisma besteht aus den drei Teilen *Deckel*, *Seite*, *Boden*. Diese drei Teile entsprechen (in dieser Reihenfolge) den Einträgen f_1, $P_F \, \partial$, f_0 in der Formel.

Beweis der Behauptung. Für jedes n-Simplex $x \in X_n$ haben wir eine Folge von $(n+1)$-Simplizes in $X_{n+1} \times (\Delta^1)_{n+1}$, nämlich

$$(s_i(x)\,,\,\alpha_i)\;, \quad i = 0\,,\ldots,\,n\;,$$

wo $\alpha_i \in \mathrm{Hom}_\Delta(\,[n+1]\,,\,[1]\,)$ diejenige Abbildung bezeichnet, bei der i und $i+1$ verschiedene Werte annehmen, d.h.

$$(\,\alpha_i(0),\ldots,\alpha_i(i)\,,\,\alpha_i(i+1),\ldots,\alpha_i(n+1)\,) \;=\; (0,\ldots,0\,,\,1,\ldots,1)\;.$$

(Diese Simplizes sind die Bilder der nicht-ausgearteten $(n+1)$-Simplizes von $\Delta^n \times \Delta^1$ unter der Abbildung $\Delta^n \times \Delta^1 \to X \times \Delta^1$, die von $\overline{x} : \Delta^n \to X$, der charakteristischen Abbildung des n-Simplexes x, induziert ist.)

Für später merken wir an, daß ein Rand $d_j(\alpha_i)$ wieder vom Typ α_i ist, wenn $j \geq i+1$; sonst aber vom Typ α_{i-1}. Allerdings sind zwei extreme Fälle von dieser Beschreibung ein wenig auszunehmen; man hat nämlich

$$d_0(\alpha_0)\;(=\alpha_{-1}\,) \;=\; (1,\ldots,1)\;,\quad d_{n+1}(\alpha_n) \;=\; (0,\ldots,0)\;.$$

Wir *definieren* jetzt

$$(P_F)_n(\,x\,) \;:=\; \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, F_{n+1}(\,s_i(x)\,,\,\alpha_i\,)\;.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\partial(P_F)_n(\,x\,) \;&=\; \sum_j (-1)^j\, d_j \sum_i (-1)^i\, F_{n+1}(\,s_i(x)\,,\,\alpha_i\,) \\ &=\; \sum_{j<i} \;+\; \sum_{j>i+1} \;+\; \sum_{j=i} \;+\; \sum_{j=i+1}\;.\end{aligned}$$

Unter Benutzung von $d_j\,F_{n+1} \;=\; F_n\,d_j$ (F ist Abbildung von simplizialen Mengen) und unter Benutzung der Identitäten

$$\begin{aligned} d_j\,s_i \;&=\; s_{i-1}\,d_j \quad \text{wenn} \quad j<i\,, \\ d_j\,s_i \;&=\; s_i\,d_{j-1} \quad \text{wenn} \quad j>i+1 \quad \text{und} \\ d_i\,s_i \;&=\; d_{i+1}\,s_i \;=\; \mathrm{Id}\;, \end{aligned}$$

können wir dies nun schreiben als die Summe der beiden Terme

$$\sum_{j<i} (-1)^{j+i}\, F_n(\,s_{i-1}\,d_j(\,x\,)\,,\,\alpha_{i-1}\,) \;+\; \sum_{j>i+1} (-1)^{j+i}\, F_n(\,s_i\,d_{j-1}(\,x\,)\,,\,\alpha_i\,)$$

und

$$\sum_i (-1)^{i+i}\, F_n(\,x\,,\,\alpha_{i-1}\,) \;+\; \sum_i (-1)^{i+i+1}\, F_n(\,x\,,\,\alpha_i\,)$$

$$\Big(\;=\; F_n(\,x\,,\,\alpha_{-1}\,) - F_n(\,x\,,\,\alpha_n\,)\;\Big)\,.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
(P_F)_{n-1}\,\partial(\,x\,) \quad &= \quad \sum_i (-1)^i \sum_j (-1)^j \, F_n(\,s_i\,d_j(\,x\,)\,,\,\alpha_i\,) \\
&= \quad \sum_{j\leq i} \;+\; \sum_{j\geq i+1} \\
(\;i{+}1 \text{ statt } i\;) \qquad &= \quad \sum_{j<i} (-1)^{j+i+1}\, F_n(s_{i-1}\,d_j(\,x\,)\,,\,\alpha_{i-1}\,) \\
(\;j{+}1 \text{ statt } j\;) \qquad & \qquad + \sum_{j>i+1} (-1)^{j+i+1}\, F_n(s_i\,d_{j-1}(\,x\,)\,,\,\alpha_i\,)\ .
\end{aligned}$$

Der Vergleich dieser Formeln ergibt

$$\begin{aligned}
\partial\,(P_F)_n(x) \,+\, (P_F)_{n-1}\,\partial(x) \;&=\; F_n(\,x\,,\,\alpha_{-1}\,) \,-\, F_n(\,x\,,\,\alpha_n\,) \\
&=\; (f_1)_n(x) \,-\, (f_0)_n(x)\ .
\end{aligned}$$

□

Den soeben nachgerechneten Sachverhalt nimmt man zum Anlaß für die folgende Definition.

Definition. Seien $C = (\,\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\,\partial\,)$ und $C' = (\,\{C'_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\,\partial\,)$ zwei Kettenkomplexe. Sei $f_0 : C \to C'$ eine Abbildung von Kettenkomplexen (d.h. $f_0\,\partial = \partial\,f_0$), und sei $f_1 : C \to C'$ eine weitere. Eine *Homotopie* von f_0 zu f_1 besteht aus einer Folge von Abbildungen

$$D_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$$

derart, daß mit den zusammengesetzten Abbildungen

$$\partial\,D_n : \quad C_n \xrightarrow{\;D_n\;} C'_{n+1} \xrightarrow{\;\partial\;} C'_n$$

und

$$D_{n-1}\,\partial : \quad C_n \xrightarrow{\;\partial\;} C_{n-1} \xrightarrow{\;D_{n-1}\;} C'_n$$

die Beziehung gilt,

$$\partial\,D_n \,+\, D_{n-1}\,\partial \;=\; (f_1)_n \,-\, (f_0)_n\ ,$$

für alle n . □

Die obige Rechnung können wir jetzt so formulieren:

Satz. *Der Übergang von simplizialen Mengen zu Kettenkomplexen respektiert Homotopie von Abbildungen.* □

Wie zu erwarten, ist der Homotopiebegriff für Kettenkomplexe so gemacht, daß gilt:

SATZ. *Seien* $f_0 : C \to C'$ *und* $f_1 : C \to C'$ *Abbildungen von Kettenkomplexen. Es gebe eine Homotopie* $D = \{D_n\}$ *von* f_0 *zu* f_1 . *Die von* f_0 *und* f_1 *in der Homologie induzierten Abbildungen* $(f_0)_* : H_*(C) \to H_*(C')$ *und* $(f_1)_* : H_*(C) \to H_*(C')$ *sind dann zueinander gleich.*

BEWEIS. Sei

$$[x] \ \in \ H_n(C) \ = \ \mathrm{Kern}(\, C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1}) \ / \ \mathrm{Bild}(C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n) \ ,$$

wo $x \in \mathrm{Kern}(\, C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1})$ einen Repräsentanten von $[x]$ bezeichnet. Es ist dann $(f_0)_*[x] \ = \ [\,(f_0)_n(x)\,]$ (das ist die Definition; man prüft nach, daß diese Definition unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten x ist) und ähnlich auch mit f_1 . Nach Voraussetzung gilt andererseits

$$(f_1)_n(x) \ - \ (f_0)_n(x) \ \ = \ \ D_{n-1}\,\partial(x) \ + \ \partial\, D_n(x) \ .$$

Nun ist $D_{n-1}\,\partial(x) \ = \ 0$, weil $x \ \in \ \mathrm{Ker}(C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1})$, deshalb

$$(f_1)_n(x) \ - \ (f_0)_n(x) \ \ = \ \ \partial\, D_n(x) \ \in \ \mathrm{Bild}(\, C'_{n+1} \xrightarrow{\partial} C'_n) \ .$$

Es folgt, daß $[\, f_1(x)\,] - [\, f_0(x)\,] \ = \ [\, f_1(x) \ - \ f_0(x)\,] \ = \ 0$, deshalb $(f_1)_*[x] \ = \ (f_0)_*[x]$, wie behauptet. □

KOROLLAR. *Eine Homotopie-Äquivalenz von topologischen Räumen induziert Isomorphismen der (singulären) Homologiegruppen.*

BEWEIS. Sei $f : X \to Y$ eine Homotopie-Äquivalenz. Sei g ein Homotopie-Inverses zu f . Eine Homotopie von $g\,f$ zu Id_X induziert eine Homotopie von Abbildungen von simplizialen Mengen,

$$\text{von} \quad \mathrm{S}(g)\,\mathrm{S}(f) \quad \text{zu} \quad \mathrm{Id}_{\mathrm{S}(X)} \ \ ,$$

und damit auch eine Homotopie der induzierten Abbildungen von Kettenkomplexen,

$$\text{von} \quad A[\,\mathrm{S}(g)\,]\; A[\,\mathrm{S}(f)\,] \quad \text{zu} \quad \mathrm{Id}_{A[\,\mathrm{S}(X)\,]} \ \ ,$$

wo A die zugrundegelegte abelsche Koeffizientengruppe ist. Es folgt,

$$g_* f_* \ \ = \ \ \mathrm{Id}_{H_*(X;A)} \ .$$

Ähnlich folgt auch, daß $f_* g_* \ = \ \mathrm{Id}_{H_*(Y;A)}$. Also ist f_* ein Isomorphismus, mit Inversem g_* . □

Kleine Simplizes

Wichtiges Hilfsmittel ist ein Satz, den wir jetzt formulieren wollen. Er besagt, daß man, ohne einen wesentlichen Fehler zu machen, den singulären Komplex eines topologischen Raumes häufig durch eine kleinere simpliziale Menge ersetzen kann, die der jeweiligen Situation besser angemessen ist.

Sei X ein topologischer Raum. Sei $O = \{O_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von X . Wir verlangen nicht, daß die Mengen O_i offen sind. Wir sind vielmehr zufrieden mit der etwas schwächeren Voraussetzung, daß das System der offenen Mengen $\{\mathring{O}_i\}_{i \in I}$ immer noch eine Überdeckung von X ist (wo $\mathring{O}_i$ den offenen Kern von O_i bezeichnet). Eine solche Überdeckung nennen wir *zulässig*.

Ein singuläres Simplex $f : \nabla^n \longrightarrow X$ heiße *klein bezüglich* O , wenn es mindestens ein $i \in I$ gibt, so daß das Bild $f(\nabla^n)$ ganz in O_i enthalten ist. Offenbar ist jeder Rand eines kleinen Simplexes wieder klein, und jede Ausartung ebenfalls. Die bezüglich O kleinen Simplizes bilden also eine Unter-simpliziale-Menge des singulären Komplexes $\mathrm{S}(X)$, die wir mit $\mathrm{S}_O(X)$ bezeichnen wollen.

Satz (Satz über kleine Simplizes). *Sei* $O = \{O_i\}_{i \in I}$ *eine zulässige Überdeckung von dem Raum* X *. Die Inklusion* $\mathrm{S}_O(X) \to \mathrm{S}(X)$ *induziert*

- *Isomorphismen der Homologiegruppen*,
- *Homotopieäquivalenz der geometrischen Realisierung,* $|\,\mathrm{S}_O(X)\,| \longrightarrow |\,\mathrm{S}(X)\,|$.

Den Beweis verschieben wir auf später. Zunächst befassen wir uns mit Folgerungen des Satzes.

Satz. *Sei* X *ein topologischer Raum, der topologisch äquivalent ist zu einem endlichen CW-Komplex. Die natürliche Abbildung*

$$|\,\mathrm{S}(X)\,| \longrightarrow X$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Wenn X ein Punkt ist, dann ist $\mathrm{S}(X)$ die simpliziale Menge Δ^0 und daher $|\mathrm{S}(X)|$ ebenfalls ein Punkt. Etwas allgemeiner, wenn X eine disjunkte Vereinigung von Punkten ist, dann ist $\mathrm{S}(X)$ die entsprechende disjunkte Vereinigung von simplizialen Mengen Δ^0 , und wieder ist $|\mathrm{S}(X)| \longrightarrow X$ eine topologische Äquivalenz.

Im allgemeinen Fall sei nun der topologische Raum X auf irgendeine Weise mit der Struktur eines endlichen CW-Komplexes versehen, dessen Dimension sei n. Wir gehen induktiv vor und nehmen als Induktionsvoraussetzung an, daß der Satz für endliche CW-Komplexe der Dimension $< n$ bereits bewiesen ist.

Um die gleichzeitige Behandlung mehrerer Zellen zu vermeiden, machen wir die weitere Induktionsannahme, daß der Satz auch schon für n-dimensionale CW-Komplexe bewiesen ist, sofern diese nur weniger n-Zellen haben als X selbst.

Wir schreiben $X = X' \cup_{S^{n-1}} D^n$ (Anheften der "letzten" n-Zelle). Nach der Induktionsvoraussetzung sind dann

$$|\,\mathrm{S}(X')\,| \longrightarrow X' \quad \text{und} \quad |\,\mathrm{S}(S^{n-1})\,| \longrightarrow S^{n-1}$$

Homotopieäquivalenzen. Diese nutzen wir dadurch aus, daß wir eine geeignete Überdeckung von X wählen.

Seien die Mengen U' und V' definiert als

$$U' = \left\{ x \in D^n \;\middle|\; \|x\| \leq \tfrac{2}{3} \right\} \quad \text{und} \quad V' = \left\{ x \in D^n \;\middle|\; \|x\| \geq \tfrac{1}{3} \right\}$$

und U und V in $X' \cup_{S^{n-1}} D^n$ als

$$U = \mathrm{Bild}(U') \;, \quad V = X' \cup \mathrm{Bild}(V') \;.$$

Die offenen Kerne von U und V bilden dann noch eine Überdeckung von $X' \cup_{S^{n-1}} D^n$, also ist das Paar $\{U, V\}$ eine zulässige Überdeckung von X. Es ist

$$U \cap V \approx U' \cap V' \approx S^{n-1} \times \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right] .$$

Die Inklusion $S^{n-1} \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \longrightarrow \frac{2}{3} D^n$ hat die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft; deshalb hat $U \cap V \to U$ sie auch.

Behauptung. *Die Abbildungen*

$$|\,\mathrm{S}(U)\,| \longrightarrow U \;, \quad |\,\mathrm{S}(V)\,| \longrightarrow V \;, \quad |\,\mathrm{S}(U \cap V)\,| \longrightarrow U \cap V$$

sind sämtlich Homotopieäquivalenzen.

Beweis. Das folgt aus der Induktionsvoraussetzung, den Homotopieäquivalenzen

$$U \xrightarrow{\sim} \mathrm{pt.} \;, \quad X' \xrightarrow{\sim} V \;, \quad U \cap V \xrightarrow{\sim} S^{n-1} \;,$$

dem Lemma. *Der Funktor $Y \longmapsto |\mathrm{S}(Y)|$ respektiert Homotopieäquivalenzen.*

(Beweis. Sowohl $Y \longmapsto \mathrm{S}(Y)$ als auch $\mathrm{S}(Y) \longmapsto |\mathrm{S}(Y)|$ respektieren Homotopie von Abbildungen.),

und den kommutativen Diagrammen

$$\begin{tikzcd} |\,\mathrm{S}(X')\,| \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & X' \arrow[d, "\sim"] \\ |\,\mathrm{S}(V)\,| \arrow[r] & V \end{tikzcd} \quad , \quad \text{etc.}$$

□

Wir wenden jetzt das sogenannte *Klebe-Lemma* an.

KLEBE-LEMMA. *Sei*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d] & A \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y' & A' \arrow[l] \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Abbildungen topologischer Räume. Es gelte

(i) Die Abbildungen $A \rightarrowtail X$ und $A' \rightarrowtail X'$ sind abgeschlossene Inklusionen mit der Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft.

(ii) Die vertikalen Pfeile sind Homotopieäquivalenzen.

Dann gilt, daß die induzierte Abbildung der verklebten Räume

$$Y \cup_A X \longrightarrow Y' \cup_{A'} X'$$

ebenfalls eine Homotopieäquivalenz ist.

— Den Beweis des Klebelemmas verschieben wir auf später (siehe Anhang).

Die Inklusion $U \cap V \longrightarrow U$ hat die HEE, und die Inklusion $|\,\mathrm{S}(U \cap V)\,| \longrightarrow |\,\mathrm{S}(U)\,|$ hat sie auch, weil sie eine zelluläre Inklusion von CW-Komplexen ist. Wir können also das Klebe-Lemma auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} |\,\mathrm{S}(U)\,| \arrow[d] & |\,\mathrm{S}(U \cap V)\,| \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & |\,\mathrm{S}(V)\,| \arrow[d] \\ U & U \cap V \arrow[l] \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

anwenden, und schließen, daß

$$|\,\mathrm{S}(U)\,| \cup_{|\mathrm{S}(U\cap V)|} |\,\mathrm{S}(V)\,| \longrightarrow U \cup_{U \cap V} V \;\cong\; X$$

eine Homotopieäquivalenz ist.

Wenn wir nun mit O die Überdeckung $\{\,U\,,\,V\,\}$ von X bezeichnen, dann gilt offensichtlich

$$\mathrm{S}(U) \cup_{\mathrm{S}(U\cap V)} \mathrm{S}(V) \;\cong\; \mathrm{S}_O(X)$$

(ein Simplex ist klein, wenn es entweder in U oder in V liegt, und es kann auch in beiden liegen), also nach dem “Satz über kleine Simplizes”

$$|\,\mathrm{S}(U) \cup_{\mathrm{S}(U\cap V)} \mathrm{S}(V)\,| \xrightarrow{\sim} |\,\mathrm{S}(X)\,|\,.$$

Mit dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} |\,\mathrm{S}(U) \cup_{\mathrm{S}(U\cap V)} \mathrm{S}(V)\,| \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & |\,\mathrm{S}(X)\,| \arrow[d] \\ |\,\mathrm{S}(U)\,| \cup_{|\mathrm{S}(U\cap V)|} |\,\mathrm{S}(V)\,| \arrow[r, "\sim"] & X \end{tikzcd}$$

folgt jetzt, daß $|\,\mathrm{S}(X)\,| \longrightarrow X$ Homotopieäquivalenz ist. $\square$

KOROLLAR. *Der Raum Y habe den Homotopietyp von einem CW-Komplex. Die Abbildung $|\,\mathrm{S}(Y)\,| \longrightarrow Y$ ist eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Weil $Y \longmapsto |\,\mathrm{S}(Y)\,|$ Homotopieäquivalenzen respektiert, ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß Y selbst ein CW-Komplex ist. Da $|\,\mathrm{S}(Y)\,|$ ohnehin ein CW-Komplex ist, genügt es also (nach dem Whitehead-Satz), zu zeigen, daß die Abbildung $|\,\mathrm{S}(Y)\,| \longrightarrow Y$ Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert (zu vorgegebenem Basispunkt in $|\,\mathrm{S}(Y)\,|$).

(i) *Die Abbildung $\pi_n|\,\mathrm{S}(Y)\,| \longrightarrow \pi_n Y$ ist surjektiv.* Denn sei $f : S^n \to Y$ ein Repräsentant. Wegen der Kompaktheit von S^n liegt das Bild von f in einem *endlichen* Unterkomplex Y_0 von Y . Nach dem vorigen Satz ist die Abbildung

$$\pi_n|\,\mathrm{S}(Y_0)\,| \longrightarrow \pi_n\, Y_0$$

ein Isomorphismus. Es folgt, daß $[f]$ im Bild von $\pi_n|\,\mathrm{S}(Y)\,|$ liegt.

(ii) *Die Abbildung $\pi_n|\,\mathrm{S}(Y)\,| \longrightarrow \pi_n\, Y$ ist injektiv.* Denn sei $g : S^n \to |\mathrm{S}(Y)|$ Repräsentant eines Elements, und sei $h : S^n \times [0,1] \to Y$ eine Nullhomotopie seines Bildes. Zunächst liegt das Bild von g in einem endlichen Unterkomplex Z von $|\,\mathrm{S}(Y)\,|$. Wegen der Kompaktheit von Z und von $S^n \times [0,1]$ gibt es dann weiter einen endlichen Unterkomplex Y_1 von Y , der sowohl das Bild von Z als auch das Bild der Abbildung h enthält. Weil $\mathrm{Bild}(Z) \subset Y_1$ ist $Z \subset |\,\mathrm{S}(Y_1)\,|$, d.h. g kann aufgefaßt werden als eine Abbildung $S^n \to |\mathrm{S}(Y_1)|$. Nach dem vorigen Satz ist $\pi_n|\,\mathrm{S}(Y_1)\,| \to \pi_n\, Y_1$ ein Isomorphismus. Nach Konstruktion ist $[g]$ im Kern dieser Abbildung, also trivial, und folglich somit auch trivial in $\pi_n|\,\mathrm{S}(Y)\,|$. □

Relative Homologiegruppen

Um die Folgerungen des *Satzes über kleine Simplizes* für die Homologie herzuleiten, brauchen wir noch ein bißchen mehr Maschinerie. Sei nämlich X' Unterraum von X. Es gibt dann *relative Homologiegruppen* $H_n(X, X'; A)$ (wo A eine abelsche Gruppe bezeichnet, die Koeffizientengruppe für die Homologie). Wir werden sehen, daß wir diese relativen Homologiegruppen auffassen können als ein Maß dafür, wie weit die Abbildungen $H_n(X'; A) \longrightarrow H_n(X; A)$ davon abweichen, Isomorphismen zu sein. Technisch läuft das auf ähnliches hinaus, wie wir es von den Homotopiegruppen her schon kennen. Nämlich es gibt eine lange exakte Folge

$$\cdots \longrightarrow H_n(X'; A) \longrightarrow H_n(X; A) \longrightarrow H_n(X, X'; A) \longrightarrow H_{n-1}(X'; A) \longrightarrow \cdots \quad .$$

Es bezeichne C den singulären Kettenkomplex von X mit Koeffizienten in A, und C' denjenigen von X'. Weil X' Unterraum von X ist, ist (offensichtlich) C' Unterkomplex von C.

Ein Element von $H_n(X; A)$ ist eine Äquivalenzklasse $[x]$, wo x eine n-Kette ist (d.h. ein Element von C_n) mit der Bedingung, daß der Rand trivial ist (d.h., es ist $\partial x = 0$).

In Analogie zu der Situation bei den relativen Homotopiegruppen werden wir erwarten, daß ein Element von $H_n(X, X'; A)$ repräsentiert sein soll von einem $x \in C_n$, dessen Rand nicht unbedingt trivial ist, dessen Rand aber jedenfalls in C'_{n-1} liegt. Das ist aber gerade die Bedingung dafür, daß das von x repräsentierte Element $\overline{x}$ in der Quotientengruppe

$$\overline{C}_n \ = \ C_n / C'_n$$

trivialen Rand hat! (Hier ist, implizit, auch behauptet, daß die Quotientengruppen $\overline{C}_n$ ihrerseits einen Kettenkomplex bilden.)

Das motiviert (zu einem gewissen Grad) die folgende Definition.

Definition. Sei X topologischer Raum, X' Unterraum von X. Seien C und C' wie oben. Die *relativen Homologiegruppen* $H_*(X, X'; A)$ sind definiert als die Homologiegruppen des Quotientenkomplexes, $\overline{C} = C/C'$,

$$H_n(X, X'; A) \ := \ \ \mathrm{Ker}(\overline{C}_n \xrightarrow{\partial} \overline{C}_{n-1}) \ / \ \mathrm{Bild}(\overline{C}_{n+1} \xrightarrow{\partial} \overline{C}_n) \ .$$

Die Situation ist hier also insofern einfacher als bei den relativen Homotopiegruppen, als die relativen Homologiegruppen wieder definiert werden können als die Homologiegruppen von einem ganz normalen Kettenkomplex, nämlich eben $\overline{C}$. Andererseits wird man in dieser Situation im allgemeinen nicht erwarten können, daß $\overline{C}$ selbst der singuläre Kettenkomplex eines topologischen Raumes wäre.

Die schon erwähnte Tatsache über die lange exakte Folge der Homologiegruppen läßt sich nun einfacher, und allgemeiner, so ausdrücken:

Satz. *Sei C ein Kettenkomplex, C' Unterkomplex, und $\overline{C} = C/C'$ der Quotient. Es gibt natürliche "Rand"-Abbildungen*

$$H_n(\overline{C}) \xrightarrow{\ \delta\ } H_{n-1}(C') \ ,$$

und die lange Folge

$$\cdots \longrightarrow H_n(C') \xrightarrow{j} H_n(C) \xrightarrow{q} H_n(\overline{C}) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C') \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow H_0(C') \longrightarrow H_0(C) \longrightarrow H_0(\overline{C}) \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis. Wir bezeichnen die Rand-Abbildungen in C und C' beide mit ∂, und die von $\overline{C}$ mit $\overline{\partial}$. Wir konstruieren zunächst die Abbildung

$$H_n(\overline{C}) \xrightarrow{\ \delta\ } H_{n-1}(C') \ .$$

Sei $[\overline{x}] \in H_n(\overline{C})$, sei $\overline{x} \in \overline{C}_n$ davon ein Repräsentant. Sei $x \in C_n$ ein Repräsentant von $\overline{x}$. Dann ist

$$\overline{\partial(x)} \ = \ \overline{\partial}(\overline{x}) \ = \ 0 \ ,$$

folglich

$$\partial(x) \ \in \ C'_{n-1} \ .$$

Es ist ∂x *geschlossen* in C', denn sein Rand kann ebensogut in C berechnet werden, $\partial(\partial x) = (\partial\partial)x = 0$ (weil eben C' Unterkomplex von C ist — natürlich sagt diese Sache, im allgemeinen, *nicht*, daß ∂x auch Rand in C' wäre). Das Bild von $[\overline{x}]$ in $H_{n-1}(C')$ wird nun *definiert* als die von ∂x repräsentierte Klasse $[\partial x]$,

$$\delta(\,[\overline{x}]\,) \ := \ [\partial x] \ .$$

Das ist *wohldefiniert*, denn:

(i) Hat x_1 die Eigenschaft, daß $\overline{x}_1 = \overline{x}$, dann ist $[\partial x_1] = [\partial x]$ in $H_{n-1}(C')$, weil dann $\partial x - \partial x_1 \ = \ \partial(x - x_1)$ sogar Rand in C' ist (denn $x - x_1 \in C'_n$, weil $\overline{x - x_1} = 0$).

(ii) Die Konstruktion hängt auch nicht ab von der Auswahl des Repräsentanten $\overline{x}$ von $[\overline{x}]$. Denn ist $\overline{x}_0$ ein weiterer Repräsentant, dann gibt es ein $\overline{y} \in \overline{C}_{n+1}$ mit $\overline{x}_0 - \overline{x} = \overline{\partial}\,\overline{y}$. Folglich, wenn y ein Repräsentant von $\overline{y}$ ist, dann ist $\overline{\partial y} = \overline{\partial}\,\overline{y}$, d.h., es ist ∂y Repräsentant von $\overline{x}_0 - \overline{x}$. Deshalb $\delta(\,[\overline{x}_0] - [\overline{x}]\,) \ = \ \delta(\,[\overline{x}_0 - \overline{x}]\,) \ = \ [\partial(\partial y)] = 0$.

Wir kommen nun zum Nachweis der Exaktheit der langen Folge der Homologiegruppen.

Exaktheit an der Stelle $H_{n-1}(C')$. Sei $[z] \in H_{n-1}(C')$.

Wenn $[z] \in \text{Bild}(\delta)$, dann ist (nach Definition von δ) $[z] = [\partial x]$ für ein $x \in C_n$. Folglich $j[z] = [\partial x] = 0$ in $H_{n-1}(C)$.

Umgekehrt, wenn $j[z] = 0$ in $H_{n-1}(C)$, dann gibt es $x \in C_n$ mit $\partial x = z$. Nach Definition von δ ist dann $[z] = \delta[\overline{x}]$, wo $\overline{x}$ das Bild von x in $\overline{C}_n$ bezeichnet (dies funktioniert, weil $\overline{\partial}\,\overline{x} = \overline{\partial x} = \overline{z} = 0$ ist).

Exaktheit an der Stelle $H_n(\overline{C})$. Sei $[\overline{x}] \in H_n(\overline{C})$.

Wenn $[\overline{x}] \in \text{Bild}(q)$, etwa $[\overline{x}] = q[x]$, wo $\partial x = 0$, dann ist $\delta[\overline{x}] = [\partial x] = [0] = 0$.

Umgekehrt gelte $\delta[\overline{x}] = 0$. Nach Definition der Abbildung δ bedeutet dies: Sei $\overline{x}$ Repräsentant von $[\overline{x}]$, und x Repräsentant von $\overline{x}$, dann gibt es ein $z \in C'_n$ mit $\partial z = \partial x$. Da $x - z$ nun ebenfalls Repräsentant von $\overline{x}$ ist, und da $\partial(x-z) = 0$, folgt dann $[\overline{x}] = q[x-z]$.

Exaktheit an der Stelle $H_n(C)$. Sei $[x] \in H_n(C)$.

Wenn $[x] \in \text{Bild}(j)$, etwa $[x] = [z]$, wo $z \in C'_n$, dann ist $q[x] = [\overline{x}] = [\overline{z}] = [0] = 0$.

Umgekehrt gelte $q[x] = [\overline{x}] = 0$ in $H_n(\overline{C})$, d.h., es gibt $\overline{y} \in \overline{C}_{n+1}$ mit $\overline{x} = \overline{\partial}\overline{y}$. Sei y Repräsentant von $\overline{y}$. Dann ist $[x] = [x - \partial y]$ und $\overline{x - \partial y} = 0$, d.h. $x - \partial y \in C'_n$. Folglich $[x] = [x - \partial y] \in \text{Bild}(j)$. □

Korollar. Sei C Kettenkomplex, C' Unterkomplex, und $\overline{C} = C/C'$ der Quotient; sei ebenso D Kettenkomplex, $D' \subset D$ und $\overline{D} = D/D'$. Sei $C \to D$ eine Abbildung von Kettenkomplexen mit $C' \to D'$, und sei $\overline{C} \to \overline{D}$ die induzierte Abbildung der Quotientenkomplexe. *Wenn zwei der Abbildungen $C \to D$, $C' \to D'$ und $\overline{C} \to \overline{D}$ Isomorphismen in der Homologie induzieren, dann auch die dritte Abbildung.*

Beweis. Wir behandeln den Fall, wo die beiden Abbildungen $C' \to D'$ und $C \to D$ Isomorphismen in der Homologie induzieren.

Aus den langen exakten Folgen für $C' \to C \to \overline{C}$ und $D \to D \to \overline{D}$, zusammen mit den Abbildungen zwischen den Kettenkomplexen, bekommt man ein Diagramm, von dem das folgende Diagramm ein Teil ist,

$$\begin{tikzcd}
H_n(C') \arrow[r] \arrow[d] & H_n(C) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(\overline{C}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(C') \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(C) \arrow[d] \\
H_n(D') \arrow[r] & H_n(D) \arrow[r] & H_n(\overline{D}) \arrow[r] & H_{n-1}(D') \arrow[r] & H_{n-1}(D)
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm ist *kommutativ*: Die Behauptung ist klar (oder?) für das erste, zweite und vierte Teilquadrat. Für das dritte Teilquadrat muß man sich anhand eines

Nachprüfens der Definition der Abbildung δ von dieser Tatsache überzeugen; diese Nachprüfung lassen wir hier weg — schwer ist sie nicht.

Aufgrund der Hypothese, daß $C' \to D'$ und $C \to D$ Isomorphismen in der Homologie induzieren, können wir das Fünferlemma anwenden. Das Fünferlemma ergibt, daß auch die Abbildung $H_n(\overline{C}) \to H_n(\overline{D})$ ein Isomorphismus ist.

Die anderen beiden Fälle des Korollars gehen analog. $\square$

Mit Hilfe der relativen Homologiegruppen können wir den wichtigen *Ausschneidungs-Satz* nun formulieren.

Satz. *Sei* X *topologischer Raum,* $X' \subset X$. *Sei* Y *ein Unterraum von* X' *, so daß gilt* $\overline{Y} \subset \mathring{X}'$ (der Abschluß von Y ist enthalten im offenen Kern von X'). *Dann ist die von der Inklusion induzierte Abbildung der relativen Homologiegruppen*

$$H_n(X - Y,\ X' - Y) \ \longrightarrow\ H_n(X, X')$$

ein Isomorphismus, für alle n (*und für beliebige Koeffizienten*).

Beweis. Wir zeigen, daß diese Homologiegruppen aus ein- und demselben Kettenkomplex berechnet werden können. Dazu ersetzen wir zunächst den Kettenkomplex von X durch einen kleineren, mit Hilfe des Satzes über kleine Simplizes. Sei nämlich O die Überdeckung von X , bestehend aus X' und $X'' := X - Y$. Wegen der Voraussetzung $\overline{Y} \subset \mathring{X}'$ ist diese Überdeckung *zulässig* in dem Sinn, daß auch $\{\mathring{X}', \mathring{X}''\}$ noch Überdeckung von X ist. Also, wenn $C_O(X)$ und $C(X)$ die Kettenkomplexe der simplizialen Mengen $\mathrm{S}_O(X)$ und $\mathrm{S}(X)$ (mit Koeffizienten in einer vorgegebenen abelschen Gruppe A) bezeichnen, dann induziert nach dem Satz über kleine Simplizes die Inklusion

$$C_O(X) \ \longrightarrow\ C(X)$$

einen Isomorphismus der Homologiegruppen. Nach dem vorstehenden Korollar induziert damit auch

$$C_O(X) \,/\, C(X') \ \longrightarrow\ C(X) \,/\, C(X')$$

einen Isomorphismus der Homologiegruppen, d.h., die $H_n(X, X')$ berechnen sich aus dem Kettenkomplex $C_O(X) \,/\, C(X')$.

Andererseits berechnet sich $H_n(X{-}Y, X'{-}Y) = H_n(X'', X'' \cap X')$ aus dem Kettenkomplex $C(X'') \,/\, C(X'' \cap X')$. Der Satz folgt daher mit:

Behauptung. *Die natürliche Abbildung*

$$C(X'') \,/\, C(X'' \cap X') \ \longrightarrow\ C_O(X) \,/\, C(X')$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Nach Definition von $C_O(X)$ sind die erzeugenden Simplizes diejenigen, welche entweder in X'' liegen oder in X' (oder eventuell auch in beiden). Die ersteren werden getroffen, die letzteren sind systematisch zu vernachlässigen (Quotientenbildung nach dem Unterkomplex $C(X')$), die Abbildung ist also surjektiv. Andererseits ist die Abbildung auch injektiv, denn erstens ist $C(X'') \to C_O(X)$ injektiv, und zweitens, wenn eine Kette aus $C(X'')$ in $C_O(X)$ zu vernachlässigen ist, dann liegt sie in $C(X')$, also insgesamt in $C(X'') \cap C(X') \;=\; C(X'' \cap X')$. $\square$

Mit Hilfe der bereitgestellten Hilfsmittel kann man viele Homologiegruppen direkt ausrechnen.

Zur Erinnerung. Sei X topologischer Raum, und $X' \subset X$. Sei ähnlich $Y' \subset Y$. Sei $X \to Y$ eine Abbildung mit $X' \to Y'$. Dann gilt (als Konsequenz aus dem Fünferlemma): Wenn zwei der Abbildungen

$$H_*(X') \to H_*(Y') \ , \quad H_*(X) \to H_*(Y) \ , \quad H_*(X, X') \to H_*(Y, Y')$$

(Koeffizienten in A) Isomorphismen sind, dann auch die dritte. Speziell ist dies sicher der Fall, wenn $X' \to Y'$ und $X \to Y$ Homotopieäquivalenzen sind. Wir bezeichnen dies als die *Homotopie-Eigenschaft*.

Als nächstes notieren wir eine relativ triviale Reduktion des Berechnungsproblems für Homologiegruppen: Wenn ein Raum eine disjunkte Vereinigung ist, dann kann man seine Homologie in sehr direkter Weise beschreiben durch die Homologie der Komponenten; nämlich als die direkte Summe der Homologie der Komponenten. Einzelheiten sind durch die folgende Bemerkung gegeben.

Bemerkung. Sei X topologischer Raum, seien $\{X_j\}_{j\in J}$ die Weg-Zusammenhangs-Komponenten von X (oder etwas allgemeiner: $X = \bigcup_j X_j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ wenn $i \neq j$, und jedes X_j ist Vereinigung von Weg-Zusammenhangs-Komponenten von X). Dann gilt

$$\bigoplus\nolimits_{j\in J} \; H_n(X_j; A) \;\xrightarrow{\approx}\; H_n(X; A)$$

für alle n und alle abelschen Koeffizientengruppen A; dabei bezeichnet "$\bigoplus$" die direkte Summe. Ebenso, wenn $X' \subset X$, dann ist auch

$$\bigoplus\nolimits_{j\in J} \; H_n(X_j, X_j \cap X'; A) \;\xrightarrow{\approx}\; H_n(X, X'; A) \ .$$

Beweis. Ein Simplex ist weg-zusammenhängend, deshalb liegt jedes singuläre Simplex ganz in einer Weg-Zusammenhangs-Komponente. Also ist

$$S(X) \;\cong\; \dot{\bigcup}_{j\in J} S(X_j) \ .$$

Deshalb gilt für die Kettenkomplexe (mit Koeffizienten in A)

$$C(X) \;\cong\; \bigoplus\nolimits_{j\in J} C(X_j) \quad ,$$

und für die Homologiegruppen,

$$\begin{aligned}
H_n(X) &= \operatorname{Ker}\big(\textstyle\bigoplus_j C_n(X_j) \to \bigoplus_j C_{n-1}(X_j)\big) \,/\, \operatorname{Bild}\big(\bigoplus_j C_{n+1}(X_j) \to \bigoplus_j C_n(X_j)\big) \\
&\cong \textstyle\bigoplus_j \operatorname{Ker}\big(\, C_n(X_j) \to C_{n-1}(X_j)\,\big) \,/\, \bigoplus_j \operatorname{Bild}\big(\, C_{n+1}(X_j) \to C_n(X_j)\,\big) \\
&\cong \textstyle\bigoplus_j \ \big(\operatorname{Ker}(\dots) \,/\, \operatorname{Bild}(\dots)\big) \\
&= \textstyle\bigoplus_j \ H_n(X_j) \ .
\end{aligned}$$

Speziell, weil

$$H_n(\,\mathrm{pt.}\,;\ A) \ \cong \ \begin{cases} A & , \ n = 0 \\ 0 & , \ n > 0 \end{cases}$$

folgt

$$H_n(S^0; A) \ = \ H_n(\,\mathrm{pt.} \,\dot\cup\, \mathrm{pt.}\,;\ A) \ \cong \ \begin{cases} A \oplus A & , \ n = 0 \\ 0 & , \ n > 0 \ . \end{cases}$$

Als nächstes haben wir die folgende einfache Berechnung.

Satz. *Seien X_j , $j \in J$, die Weg-Zusammenhangs-Komponenten von X . Es ist*

$$H_0(X; A) \ \cong \ \textstyle\bigoplus_j H_0(X_j\,;\ A) \ \cong \ \bigoplus_{j\in J} A \ \cong \ A[J] \ .$$

Beweis. Es ist noch zu zeigen: Wenn Y weg-zusammenhängend ist, dann ist $H_0(Y; A) \cong A$. Das ist aber klar, denn die Erzeugenden (über A) von $C_0(Y; A)$ sind die Punkte $y \in Y$. Zu je zwei Punkten y_0, y_1 gibt es einen Weg, der sie verbindet; das davon repräsentierte Element in $C_1(Y; A)$ hat als Rand die Differenz $y_0 - y_1$, deshalb ist $[y_0 - y_1] = 0$; das heißt $[y_0] = [y_1]$. $H_0(Y; A)$ ist also ein Quotient von A . Dieser Quotient ist A selbst. Denn dies ist richtig im Fall $Y = \mathrm{pt.}$, und deshalb auch allgemein, weil pt. ein Retrakt von jedem nicht-leeren Raum Y ist. □

Satz. *Sei $m > 0$ und $n > 0$. Es ist*

$$H_n(S^m; A) \ \cong \ H_n(D^m,\, S^{m-1}\,;\ A) \ \cong \ \begin{cases} A & , \ n = m \\ 0 & , \ n \neq m \ . \end{cases}$$

Beweis. Wir fassen D^m als Unterraum von S^m auf, und zwar als die südliche Halbkugel. Bezeichne x den Nordpol und y den Südpol. Die Homotopieäquivalenzen $S^{m-1} \longrightarrow S^m{-}\{x, y\}$ und $D^m \longrightarrow S^m{-}\{x\}$ induzieren einen Isomorphismus (wir lassen die abelsche Gruppe A in der Notation fort)

$$H_n(D^m, S^{m-1}) \ \xrightarrow{\ \approx\ } \ H_n(S^m{-}\{x\}\,,\, S^m{-}\{x,y\}\,) \ ,$$

und der Ausschneidungssatz gibt einen weiteren Isomorphismus

$$H_n(S^m{-}\{x\}\,,\, S^m{-}\{x,y\}) \ \xrightarrow{\ \approx\ } \ H_n(S^m\,,\, S^m{-}\{y\}\,) \ .$$

Ferner gilt

$$H_n(S^m\,,\,S^m-\{y\}) \xleftarrow{\approx} H_n(S^m,\{x\})\ .$$

Die lange exakte Folge für das Paar $\{x\}\subset S^m$ ist

$$\cdots \to \underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{H_n(\{x\})} \to H_n(S^m) \to H_n(S^m,\{x\}) \to \underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{H_{n-1}(\{x\})} \to \cdots$$

$$\cdots \to \underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{H_1(\{x\})} \to H_1(S^m) \to H_1(S^m,\{x\}) \to H_0(\{x\}) \to H_0(S^m) \to 0 \quad .$$

Also ist $H_n(S^m) \to H_n(S^m,\{x\})$ ein Isomorphismus für $n\geq 2$, und jedenfalls injektiv für $n=1$. Es ist aber auch surjektiv für $n=1$, da $H_0(\{x\}) \to H_0(S^m)$ injektiv ist.

Aus dem Isomorphismus $H_n(S^m) \cong H_n(D^m,S^{m-1})$ für $m,\, n>0$ erhalten wir induktiv eine Berechnung über die lange exakte Folge für das Paar $S^{m-1}\subset D^m$,

$$\cdots \to \underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{H_n(D^m)} \to H_n(D^m,S^{m-1}) \to H_{n-1}(S^{m-1}) \to \underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{H_{n-1}(D^m)} \to \cdots$$

$$\cdots \to \underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{H_1(D^m)} \to H_1(D^m,S^{m-1}) \to H_0(S^{m-1}) \to H_0(D^m)$$

Nämlich,

$$\begin{aligned} H_1(D^m,S^{m-1}) \;&\cong\; \operatorname{Ker}(\,H_0(S^{m-1}) \;\to\; H_0(D^m)\,) \\ &\cong \begin{cases} \operatorname{Ker}(A \xrightarrow{\approx} A) = 0 & ,\quad \text{wenn} \quad m\geq 2 \\ \operatorname{Ker}(A\oplus A \to A) \;\cong\; A & ,\quad \text{wenn} \quad m=1 \end{cases}\end{aligned}$$

(wo $A\oplus A\to A$ die Abbildung $a\oplus a' \longrightarrow a{+}a'$ bezeichnet) und, für $n\geq 2$,

$$H_n(D^m,S^{m-1}) \;\cong\; H_{n-1}(S^{m-1})\ . \qquad \square$$

Korollar (Satz von der topologischen Invarianz der Dimension). *Seien $U\subset\mathbb{R}^m$ und $V\subset\mathbb{R}^n$ offen und sei U topologisch äquivalent zu V. Dann ist $m=n$.*

Beweis. Sei $u\in U$, sei v sein Bildpunkt unter einer topologischen Äquivalenz. Dann

$$H_j(U,U{-}u) \;\approx\; H_j(V,V{-}v)\ ,\ \text{für alle}\ \ j\ .$$

Nach dem Ausschneidungssatz ist ersteres isomorph zu

$$H_j(\mathbb{R}^m,\,\mathbb{R}^m{-}u) \;\cong\; H_j(D^m,\,S^{m-1})\ ;$$

und letzteres entsprechend, mit n statt m. Nach dem Satz folgt $m=n$. $\square$

Zelluläre Homologie

Die Berechnung der Homologie eines Simplizialkomplexes über den simplizialen Kettenkomplex hat eine Version für CW-Komplexe. Die Verallgemeinerung ist gegeben durch den sogenannten *zellulären Kettenkomplex.*

SATZ. *Sei* X *ein CW-Komplex. Bezeichne* J_n *die Indexmenge für die* n*-Zellen. Die Homologie von* X (mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe A) *ist berechenbar aus einem Kettenkomplex, dessen* n*-te Kettengruppe zu* $A[J_n]$ *isomorph ist.*

KOROLLAR. *Sei* X *endlicher CW-Komplex. Die Wechselsumme*

$$\chi(X) \;=\; \sum (-1)^n \, \#(J_n)$$

ist eine Invariante des Homotopietyps (und insbesondere eine topologische Invariante).

BEWEIS. Wenn man für A einen Körper nimmt, dann liefert eine bekannte Rechnung

$$\chi(X) \;=\; \sum (-1)^n \; \dim H_n(X;A) \ .$$

Die $H_n(X;A)$ sind alle Homotopie-invariant; also auch dieser Ausdruck. □

In manchen Fällen liefert der Satz sogar eine Berechnung der Homologie, ohne daß man auch nur den Randoperator ausrechnen müßte. Denn es kommt vor, daß der Randoperator aus banalen Gründen null ist (wenn nämlich entweder Quelle oder Ziel der Abbildung jeweils trivial sind).

BEISPIELE. 1) Ist X CW-Komplex mit Zellen nur in geraden Dimensionen, so folgt

$$H_n(X;A) \;\cong\; A[J_n] \ .$$

Dieser Sachverhalt liegt zum Beispiel vor bei $\mathbb{C}P^n$, dem *komplexen projektiven Raum,* $\mathbb{C}P^n \;\cong\; (\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})\,/\,\mathbb{C}^*$. Wie wir ohne Beweis anführen wollen, so hat dieser Raum eine Zellenstruktur mit genau einer Zelle in jeder geraden Dimension von 0 bis $2n$.

2) Die m-dimensionale Sphäre S^m hat eine Struktur als CW-Komplex mit einer 0-Zelle und einer m-Zelle,

$$\#(J_n) \;=\; \begin{cases} 1 \,, & n=0,\ m \\ 0 \,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Für $m \geq 2$ folgt also wieder auf die besonders schnelle Art,

$$H_n(S^m;A) \;\cong\; \begin{cases} A \,, & n=0,\, m \\ 0 \,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Was den Beweis des Satzes angeht, so haben wir als erstes das Problem, den zellulären Kettenkomplex überhaupt zu *definieren*. Insbesondere müssen wir sagen, was der Randoperator in dem zellulären Kettenkomplex sein soll. In dem (Spezial-) Fall von Simplizialkomplexen genügte seinerzeit die Angabe einer einfachen Formel. Hier werden wir aber auch für die Definition schon Maschinerie heranziehen müssen.

Als Hilfsmittel brauchen wir eine Variante der langen exakten Folge eines Paares von Räumen. Es handelt sich dabei um die lange exakte Folge eines *Tripels*, die jetzt beschrieben werden soll. Unter einem Tripel wird dabei eine Folge von Räumen und Inklusionen verstanden, $Y'' \subset Y' \subset Y$.

Die Inklusion von Raumpaaren $(Y',Y'') \subset (Y,Y'')$ gibt eine induzierte Abbildung in der Homologie, $H_n(Y',Y'') \to H_n(Y,Y'')$. Und die Inklusion von Raumpaaren $(Y,Y'') \subset (Y,Y')$ gibt ebenfalls eine induzierte Abbildung, $H_n(Y,Y'') \to H_n(Y,Y')$. Schließlich definieren wir noch eine *Rand*-Abbildung $H_n(Y,Y') \to H_{n-1}(Y',Y'')$ als die zusammengesetzte Abbildung (eine Rand- und eine Inklusions-Abbildung)

$$H_n(Y,Y') \longrightarrow H_{n-1}(Y') \longrightarrow H_{n-1}(Y',Y'')$$

(hier, wie auch im folgenden, unterdrücken wir die Koeffizientengruppe in der Notation).

Bemerkung. *Sei* $Y'' \subset Y' \subset Y$ *ein Tripel von Räumen. Die Folge*

$$\longrightarrow H_n(Y',Y'') \longrightarrow H_n(Y,Y'') \longrightarrow H_n(Y,Y') \longrightarrow H_{n-1}(Y',Y'') \longrightarrow$$

ist exakt.

Beweis. Bezeichne C den singulären Kettenkomplex von Y , seien C' und C'' entsprechend. Man bildet die (Quotienten-) Kettenkomplexe C'/C'' und C/C'' . Aus der Inklusion von Kettenkomplexen

$$C'/C'' \ \subset \ C/C''$$

bekommt man, wie üblich, eine lange exakte Folge von Homologiegruppen,

$$\longrightarrow H_n(C'/C'') \longrightarrow H_n(C/C'') \longrightarrow H_n(\,(C/C'')\,/\,(C'/C'')\,) \longrightarrow H_{n-1}(C'/C'') \longrightarrow$$

Das ist schon die behauptete Folge: die Identifikation mit den Homologiegruppen der obigen Folge ist in zwei Fällen deren Definition, im dritten Fall kommt sie daher, daß die Abbildung

$$C/C' \ \longrightarrow \ (C/C'')\,/\,(C'/C'')$$

ein Isomorphismus ist (die Abbildung ist offensichtlich surjektiv und — eigentlich auch offensichtlich — injektiv). Auch für zwei von den drei Abbildungen ist es klar, daß es sich um die richtigen handelt. Bei der dritten, der *Rand*-Abbildung

$$\delta : \ H_n(\,(C/C'')\,/\,(C'/C'')\,) \ \longrightarrow \ H_{n-1}(C'/C'') \ ,$$

schauen wir genauer hin. Die Definition von δ lautete: zu $[x] \in H_n(\,(C/C'')/(C'/C'')\,)$ wähle man einen Repräsentanten $\overline{x}$, man lifte diesen zu C/C'' , (etc.). Nun kann man aber ebensogut weiterliften zu C , das “etc.” liefert dann ein Element in $H_{n-1}(C')$ (dies ist die Definition der Rand-Abbildung in der langen exakten Folge für $C' \subset C$). Das Rückgängigmachen der zusätzlichen Liftung schließlich bedeutet, daß man das erhaltene Element in $H_{n-1}(C')$ ersetzt durch sein Bild-Element in $H_{n-1}(C'/C'')$. $\square$

Für den zellulären Kettenkomplex können wir nun die Definition angeben. Diese mag auf den ersten Blick recht verblüffend aussehen, da die 'Kettengruppen' selbst als singuläre Homologiegruppen beschrieben werden. Nämlich für den CW-Komplex X ist die n-te *zelluläre Kettengruppe* mit Koeffizienten in A definiert als

$$\widetilde{C}_n(X;A) \ := \ H_n(X^n, X^{n-1};A)$$

(wo X^m das m-Skelett von X bezeichnet). Und die Rand-Abbildung

$$\widetilde{C}_n(X;A) \xrightarrow{\ \widetilde{\partial}\ } \widetilde{C}_{n-1}(X;A)$$

ist definiert als die Rand-Abbildung in der langen exakten Folge für das Tripel $X^{n-2} \subset X^{n-1} \subset X^n$; das heißt, als die zusammengesetzte Abbildung

$$H_n(X^n, X^{n-1};A) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1};A) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2};A) \ .$$

Die verlangte Identität für Kettenkomplexe, $\widetilde{\partial}\,\widetilde{\partial} \,=\, 0$, ist gültig, weil die Komposition

$$\widetilde{C}_n(X;A) \xrightarrow{\ \widetilde{\partial}\ } \widetilde{C}_{n-1}(X;A) \xrightarrow{\ \widetilde{\partial}\ } \widetilde{C}_{n-2}(X;A)$$

nach ihrer Definition eine Komposition von Abbildungen ist, bei der die Teilfolge

$$H_{n-1}(X^{n-1};A) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2};A) \longrightarrow H_{n-2}(X^{n-2};A)$$

beteiligt ist. Diese Teilfolge ist aber auch Teil der langen exakten Folge für das Paar $X^{n-2} \subset X^{n-1}$. Also ist die Komposition schon dieser beiden Abbildungen gleich null.

Wir überlegen uns sogleich, daß wir, erstens, die Kettengruppen recht gut kennen und daß, zweitens, der Kettenkomplex die gewünschte Homologie hat. Die Inklusion

$$X^{n-1} \ \longrightarrow \ X^n - \text{Mittelpunkte der } n\text{-Zellen}$$

ist eine Homotopie-Äquivalenz, deshalb

$$H_k(X^n,\, X^{n-1}) \ \cong \ H_k(\, X^n,\, X^n - \text{Mittelpunkte der } n\text{-Zellen}\,) \ ,$$

was, nach dem Ausschneidungs-Satz, angewandt auf die offene Überdeckung von X^n ,

$$\Big\{ \ \big(\ \dot{\bigcup}_{j\in J_n} \text{offene } n\text{-Zelle(n)} \ \big) \ , \ \ \big(\ X^n - \text{Mittelpunkte der } n\text{-Zellen} \ \big) \ \Big\} \ ,$$

wiederum isomorph ist zu

$$\begin{aligned} &H_k\big(\ \dot{\bigcup}_{j\in J_n} \text{offene } n\text{-Zelle} \ , \ \dot{\bigcup}_{j\in J_n} \text{offene } n\text{-Zelle} - \text{Mittelpunkt} \ \big) \\ &\cong \ \textstyle\bigoplus_{j\in J_n} H_k(\mathring{D}^n,\, \mathring{D}^n - \textit{Mittelpunkt}) \ . \end{aligned}$$

und, wieder nach der Homotopie-Eigenschaft, weiter isomorph zu

$$\textstyle\bigoplus_{j\in J_n} H_k(D^n,\, D^n - \textit{Mittelpunkt}) \ \cong \ \bigoplus_{j\in J_n} H_k(D^n,\, S^{n-1}) \ .$$

Insbesondere ist also

$$\widetilde{C}_n(X;A) \ = \ H_n(X^n, X^{n-1};A) \ \cong \ \textstyle\bigoplus_{j\in J_n} A \ \cong \ A[J_n]$$

und

$$H_k(X^n, X^{n-1}; A) \;=\; 0\,, \quad \text{wenn} \quad k \neq n\ .$$

Aus letzterem folgt allgemeiner

Lemma. $H_k(X^n, X^m; A) = 0$, wenn $k > n$ oder $k \leq m$.

Beweis. (Induktion über $n{-}m$). Der Induktionsanfang $n{-}m = 1$ wurde gerade eben gemacht. Für den Induktionsschritt betrachtet man einen Abschnitt in der langen exakten Folge des Tripels $X^m \subset X^{n-1} \subset X^n$, nämlich

$$H_k(X^{n-1},\, X^m) \longrightarrow H_k(X^n,\, X^m) \longrightarrow H_k(X^n,\, X^{n-1})\ .$$

Der Term links ist dann null nach Induktionsvoraussetzung, und der Term rechts ist auch null, wie wir wissen. Es folgt, daß der Term in der Mitte ebenfalls null ist. □

Anfangs- und End-Term der exakten Folge

$$H_{n+1}(X^{n+q+1}, X^{n+q}) \longrightarrow H_n(X^{n+q}) \longrightarrow H_n(X^{n+q+1}) \longrightarrow H_n(X^{n+q+1}, X^{n+q})$$

sind, nach dem Lemma, gleich null, sobald $q \geq 1$. Also hat man Isomorphismen

$$H_n(X^{n+1}) \xrightarrow{\approx} H_n(X^{n+2}) \xrightarrow{\approx} \cdots \xrightarrow{\approx} H_n(X^{n+q}) \xrightarrow{\approx} \cdots\ .$$

Hieraus folgt weiter, daß man auch einen Isomorphismus

$$H_n(X^{n+1}) \xrightarrow{\approx} H_n(X)$$

hat.

Beweis. Jedes singuläre Simplex in X liegt in einem der Skelette X^p (ein Simplex ist kompakt). Eine singuläre Kette ist eine *endliche* Summe von singulären Simplizes. Wenn also x singuläre Kette in X ist, so gibt es ein p , so daß x schon eine singuläre Kette in X^p ist. Angewandt auf einen Repräsentanten von einem Element von $H_n(X)$, zeigt dies, daß das fragliche Element im Bild von $H_n(X^p)$ liegt, für genügend großes p ; nach dem obigen liegt es dann aber auch im Bild von $H_n(X^{n+1})$. Das zeigt die Surjektivität der Abbildung. Die Injektivität sieht man, seltsamerweise, genauso. Denn sei $[x']$ ein Element von $H_n(X^{n+1})$, dessen Bild in $H_n(X)$ trivial ist. Sei x' Repräsentant von $[x']$. Dann gibt es eine Kette y in X , deren Rand die Kette x' ist (wegen der vorausgesetzten Trivialität des Bildes von $[x']$). Nach der obigen Betrachtung gibt es nun ein p , so daß die Kette y schon in X^p liegt. Das heißt aber, daß x' schon Rand in X^p ist, daß also das Bild von $[x']$ in $H_n(X^p)$ schon null ist. □

Auch Anfangs- und End-Term der exakten Folge

$$H_n(X^q, X^{q-1}) \longrightarrow H_n(X^{n+1}, X^{q-1}) \longrightarrow H_n(X^{n+1}, X^q) \longrightarrow H_{n-1}(X^q, X^{q-1})$$

sind, nach dem Lemma, gleich null, sobald $q \leq n{-}2$. Also hat man Isomorphismen

$$H_n(X^{n+1}) = H_n(X^{n+1}, X^{-1}) \xrightarrow{\approx} H_n(X^{n+1}, X^0) \xrightarrow{\approx} \cdots \xrightarrow{\approx} H_n(X^{n+1}, X^{n-2})\ .$$

Insgesamt hat man damit einen Isomorphismus

$$H_n(X) \;\cong\; H_n(X^{n+1}, X^{n-2}) \; .$$

Den Term $H_n(X^{n+1}, X^{n-2})$ können wir nun in Beziehung setzen zu der n-ten Homologiegruppe des Kettenkomplexes $\widetilde{C}$. Das geht in zwei Schritten.

Als ersten Schritt betrachten wir die lange exakte Folge der relativen Homologiegruppen für das Tripel $X^{n-2} \subset X^{n-1} \subset X^n$. Sie hat als Abschnitt die exakte Folge

$$H_n(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \; .$$

Der erste Term $H_n(X^{n-1}, X^{n-2})$ in der Folge ist null (das Lemma), also schließen wir, daß der zweite Term, $H_n(X^n, X^{n-2})$, erstens Untergruppe von $H_n(X^n, X^{n-1})$ ist, und zweitens gerade gleich ist zu der uns interessierenden Untergruppe $\operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_n$,

$$H_n(X^n, X^{n-2}) \;\cong\; \operatorname{Ker}\big(H_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \big) \; .$$

Als zweiten Schritt betrachten wir die lange exakte Folge der relativen Homologiegruppen für das Tripel $X^{n-2} \subset X^n \subset X^{n+1}$. Sie hat als Abschnitt die exakte Folge

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^{n+1}, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^{n+1}, X^n) \; .$$

Der zweite Term in der Folge, $H_n(X^n, X^{n-2})$, ist gleich der Untergruppe $\operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_n$ von $H_n(X^n, X^{n-1})$, wie wir gerade gesehen haben. Das macht es plausibel, daß wir, bis auf die Restriktion des Ziels, die erste Abbildung in der Folge mit der Abbildung $\widetilde{\partial}_{n+1}$ identifizieren können. Das ist auch richtig. Denn eine der Möglichkeiten, die Rand-Abbildung $H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \to H_n(X^n, X^{n-1})$ zu definieren, war ja, die zusammengesetzte Abbildung

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \longrightarrow H_n(X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$$

zu nehmen. Nun ist es so, daß die zweite dieser Abbildungen auch als eine Komposition

$$H_n(X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$$

geschrieben werden kann. Deshalb kann $\widetilde{\partial}_{n+1}$ ebenfalls als eine Komposition

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-2}) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$$

geschrieben werden; wo, wie wir schon wissen, die zweite Abbildung gleich der Inklusion von $\operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_n$ in $H_n(X^n, X^{n-1})$ ist.

Der letzte Term in dem obigen Abschnitt, $H_n(X^{n+1}, X^n)$, ist null (wieder das Lemma). Wir haben den Abschnitt damit identifiziert zu einer exakten Folge

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\;\widetilde{\partial}_{n+1}\;} \operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_n \;\longrightarrow\; H_n(X^{n+1}, X^{n-2}) \;\longrightarrow\; 0 \; .$$

Wir haben damit gezeigt, daß die n-te Homologie des zellulären Kettenkomplexes isomorph ist zu $H_n(X^{n+1}, X^{n-2})$ und damit auch, wie wir schon wissen, zu $H_n(X)$.

Unterteilung

Um den “Satz über kleine Simplizes” zu beweisen, brauchen wir einen Trick, der darin besteht, daß man Simplizes in systematischer Weise durch kleinere ersetzen kann. Diese Ersetzung geht durch *Unterteilung*: Aus einem einzigen Simplex werden plötzlich ganz viele, aber (und das ist gerade der Witz) jedes einzelne dieser neuen Simplizes ist ‘kleiner’ als das, von dem wir ausgegangen sind.

Es gibt viele Möglichkeiten der Unterteilung. Welche man benutzt, ist letztlich nicht wichtig, solange die Methode nur funktioniert. Wir verwenden hier die sogenannte *baryzentrische Unterteilung*, weil diese sich (relativ) am einfachsten beschreiben läßt.

In einem affinen Simplex ist der *Baryzenter* (= Schwerpunkt) definiert als das *arithmetische Mittel* der Eckenmenge. Wenn das Simplex die Ecken $v_0, \ldots, v_n$ hat, dann ist der Baryzenter also der Punkt

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1}\, v_i \ .$$

Die *baryzentrische Unterteilung* des n-Simplexes ∇^n ist nun ein gewisser geordneter Simplizialkomplex, den wir mit U-∇^n bezeichnen wollen. Ein k-Simplex von U-∇^n ist, nach Definition, gegeben durch eine strikt aufsteigende Folge von Seiten von ∇^n, $k{+}1$ an der Zahl. Das k-Simplex hat als Ecken die Baryzenter der fraglichen Seiten.

Beispiele. Wir bezeichnen die Ecken von ∇^n mit den Ziffern von 0 bis n, und wir bezeichnen eine Seite von ∇^n durch die Angabe derjenigen Ecken, die sie enthält.

1) U-∇^1 hat drei 0-Simplizes $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$ (die Baryzenter der beiden 0-dimensionalen Seiten und der einen 1-dimensionalen Seite) und zwei 1-Simplizes $\{0\} \subset \{0,1\}$ und $\{1\} \subset \{0,1\}$.

2) U-∇^2 hat sieben 0-Simplizes, zwölf 1-Simplizes und sechs 2-Simplizes. Beispielsweise sind $\{0\} \subset \{0,1\} \subset \{0,1,2\}$ und $\{1\} \subset \{0,1\} \subset \{0,1,2\}$ zwei von den 2-Simplizes, und diese beiden haben als gemeinsame Seite das 1-Simplex $\{0,1\} \subset \{0,1,2\}$.

Die explizite Benennung der Dinge ist etwas aufwendig. Als Alternative geben wir deshalb auch eine (weniger explizite) induktive Beschreibung. Dabei wird die folgende Konstruktion benutzt.

Sei K ein geordneter Simplizialkomplex. Ihm zugeordnet ist ein neuer geordneter Simplizialkomplex cK, der *Kegel über K mit Kegelpunkt c*. Dieser hat, nach Definition, die folgende Beschreibung. cK enthält K und den Kegelpunkt c. Die übrigen Simplizes von cK sind in 1:1 Beziehung zu den Simplizes von K. Und zwar, zu einem Simplex x von K, von der Dimension n, enthält cK ein Simplex cx von der Dimension $n{+}1$. Wenn x die Ecken $v_0, \ldots, v_n$ hat, so hat cx die Ecken $v_0, \ldots, v_n$ und c (in dieser Reihenfolge — die neue Ecke, c, ist die mit der höchsten Nummer). Die simpliziale Struktur ist so, daß $d_i(c\,x) = c\,d_i(x)$, für $0 \leq i \leq n$, während $d_{n+1}(c\,x) = x$.

Wir beschreiben die baryzentrische Unterteilung mit Hilfe der Kegel-Konstruktion. Dem Simplex ∇^n soll ein geordneter Simplizialkomplex U-∇^n zugeordnet werden, der wieder das Simplex ∇^n als unterliegenden topologischen Raum hat; und zwar soll das in der Weise geschehen, daß die Konstruktion mit Seiten-Inklusionen verträglich ist: U-∇^n soll für jede Seite von ∇^n die baryzentrische Unterteilung dieser Seite als einen Unterkomplex enthalten.

Per Induktion nehmen wir an, daß U-∇^m schon konstruiert ist für $m \leq n{-}1$. Dann setzen sich die Unterteilungen der Randseiten von ∇^n zusammen zu einer Unterteilung des Randes, die wir mit $\mathrm{U}\partial\nabla^n$ bezeichnen. U-∇^n wird jetzt *definiert* als $\beta\,\mathrm{U}\partial\nabla^n$, der *Kegel über $\mathrm{U}\partial\nabla^n$ mit Kegelpunkt β* (der Baryzenter).

Die Konstruktion beinhaltet eine kanonische Abbildung (einen Isomorphismus)

$$\mathrm{Real}(\text{U-}\nabla^n) \longrightarrow \nabla^n$$

denn wenn ein Simplex in U-∇^n nicht schon selbst im Rand $\mathrm{U}\partial\nabla^n$ liegt, dann ist es entweder der Kegelpunkt (der Baryzenter) oder es ist aufgespannt von einem Simplex im Rand zusammen mit dem Baryzenter. Der erhaltene Isomorphismus ist verträglich mit Seiten-Inklusionen: das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Real}(\text{U-}\nabla^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Real}(\text{U-}\delta_i)"'] & \nabla^{n-1} \arrow[d, "\delta_i"] \\
\mathrm{Real}(\text{U-}\nabla^{n}) \arrow[r] & \nabla^{n}
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ (für $0 \leq i \leq n$).

Wir kommen nun zu dem *Unterteilungs*-Trick. Er besteht in der Angabe einer Abbildung

$$\mathrm{Unt}: \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ ,$$

wo X einen topologischen Raum bezeichnet, $\mathrm{S}(X)$ dessen singulären Komplex, und $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$ schließlich die geometrische Realisierung davon im Sinne von Δ-Mengen (diejenige Version von geometrischer Realisierung, bei der nur die Rand-Abbildungen, dagegen nicht die Ausartungs-Abbildungen verwendet worden sind).

Es war $\mathrm{S}(X)_n$ definiert als die Menge der Abbildungen $f : \nabla^n \to X$, wo die Rand-Abbildung $d_i : \mathrm{S}(X)_n \to \mathrm{S}(X)_{n-1}$ dem f die zusammengesetzte Abbildung

$$\nabla^{n-1} \xrightarrow{\delta_i} \nabla^n \xrightarrow{f} X$$

zuordnet (Komposition mit der Inklusion der i-ten Seite). Die Äquivalenzrelation " $\sim$ " in der Definition von

$$\mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ := \ \dot{\bigcup}_n \ \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n \,/\sim$$

sagte, daß für jedes f und jedes i die Seite $\{f\} \times \delta_i(\nabla^{n-1})$ von $\{f\} \times \nabla^n$ zu identifizieren ist mit dem Simplex $\{d_i(f)\} \times \nabla^{n-1}$.

Jedes $f \in \mathrm{S}(X)_n$ bestimmt eine Abbildung $\overline{f} : \nabla^n \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$. Das ist eine etwas tautologische Konstruktion,

$$\nabla^n \ \cong \ \{f\} \times \nabla^n \ \subset \ \dot{\bigcup}_n \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n \ \longrightarrow \ \dot{\bigcup}_n \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n / \sim \ = \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ .$$

Mit Hilfe der baryzentrischen Unterteilung bekommen wir von dieser Konstruktion eine interessante Variante. Mit dem obigen Isomorphismus $\mathrm{Real}(\mathrm{U}\text{-}\nabla^n) \cong \nabla^n$ haben wir nämlich die zusammengesetzte Abbildung

$$\mathrm{Real}(\mathrm{U}\text{-}\nabla^n) \xrightarrow{\approx} \nabla^n \xrightarrow{f} X \ ,$$

und die können wir nun um-interpretieren: Durch Einschränken der Abbildung auf die diversen Simplizes in dem Simplizialkomplex $\mathrm{U}\text{-}\nabla^n$ erhalten wir ein kompatibles System singulärer Simplizes; mit anderen Worten, wir erhalten eine Abbildung von Δ-Mengen, $\mathrm{U}\text{-}\nabla^n \to \mathrm{S}(X)$. Die geometrische Realisierung ergibt hieraus eine Abbildung

$$\overline{\overline{f}} : \ \nabla^n \cong \mathrm{Real}(\mathrm{U}\text{-}\nabla^n) \ \longrightarrow \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ .$$

Die Konstruktion ist mit der Inklusion von Seiten verträglich: es ist

$$\overline{\overline{f}} \circ \delta_i \ = \ \overline{\overline{f \circ \delta_i}} \ .$$

Das liegt daran, daß $\mathrm{U}\text{-}\nabla^n$ als einen Unterkomplex die baryzentrische Unterteilung der i-ten Seite enthält. Wir könnten das auch formulieren als

$$\overline{\overline{f}} \circ \delta_i \ = \ \overline{\overline{d_i(f)}} \ ,$$

da ja $d_i(f) \ = \ f \circ \delta_i$ (nach Definition).

Die Konstruktion definiert eine Abbildung

$$\dot{\bigcup}_n \ \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n \ \longrightarrow \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ ,$$

nämlich auf $\{f\} \times \nabla^n$ gerade die Abbildung $\overline{\overline{f}}$. Wie gerade notiert, ist diese Abbildung mit der Äquivalenzrelation " $\sim$ " verträglich, sie induziert deshalb eine Abbildung

$$\mathrm{Unt} : \ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ .$$

Die Abbildung ist *nicht* die Identität. Sie ist aber dazu homotop, wie der folgende Satz präzisiert.

Satz. *Es gibt eine Abbildung*

$$F:\ \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$$

mit $F \,\big|\, \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \times 0 = \mathrm{Id}$ *und* $F \,\big|\, \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \times 1 = \mathrm{Unt}$.

Beweis. Per Komposition mit der Quotienten-Abbildung

$$\dot{\bigcup}_n \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \times [0,1]$$

entspricht die gesuchte Abbildung F einer Abbildung

$$\dot{\bigcup}_n \mathrm{S}(X)_n \times \nabla^n \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \ ,$$

die mit der induzierten Äquivalenzrelation verträglich ist. Um eine solche Abbildung anzugeben, genügt es, jedem $f:\ \nabla^n \to X$ eine Abbildung

$$\widetilde{f}:\ \nabla^n \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$$

zuzuordnen mit

$$\widetilde{f} \,\big|\, (\nabla^n \times 0) = \overline{f} \ , \quad \widetilde{f} \,\big|\, (\nabla^n \times 1) = \overline{\overline{f}}$$

und

$$\widetilde{f} \circ (\, \delta_i \times \mathrm{Id}_{[0,1]}\,) = \widetilde{f \circ \delta_i} \ .$$

Die letzte Gleichung ist gerade die geforderte Verträglichkeit mit der induzierten Äquivalenzrelation. Die ersten beiden Gleichungen sagen, daß diese Homotopie von der identischen Abbildung (*Zusammenkleben der* $\overline{f}$) zu der Abbildung Unt (*Zusammenkleben der* $\overline{\overline{f}}$) geht.

Die Konstruktion der Abbildung $\widetilde{f}$ ist ganz ähnlich zu der von der Abbildung $\overline{\overline{f}}$. Der wesentliche Schritt besteht darin, zunächst eine geeignete Unterteilung von $\nabla^n \times [0,1]$ anzugeben; wir bezeichnen diese mit $\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)$.

Diese Unterteilung soll eine Art Interpolation sein zwischen der baryzentrischen Unterteilung einerseits und dem "Nichts-Tun" andererseits. Das heißt, wir suchen einen Simplizialkomplex, dessen unterliegender Raum das Prisma $\nabla^n \times [0,1]$ ist; wo der Deckel des Prismas, $\nabla^n \times 1$, unterteilt sein soll als die baryzentrische Unterteilung von ∇^n ; wo hingegen der Boden $\nabla^n \times 0$ nicht weiter unterteilt sein soll (es soll der Simplizialkomplex sein, der nur aus dem Simplex ∇^n und seinen Seiten besteht).

Da wir ohnehin darauf Wert werden legen müssen, daß die Konstruktion mit den Seiten-Inklusionen verträglich ist, bietet sich folgendes induktive Vorgehen an.

— Über der i-ten Seite ist das Prisma $\delta_i(\nabla^{n-1}) \times [0,1]$ unterteilt als $\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^{n-1} \times [0,1]\,)$ (die Induktionsvoraussetzung sagt uns, wie).

— Der Boden $\nabla^n \times 0$ ist nicht unterteilt.

Aus den vorstehenden Spezifikationen erhält man einen Simplizialkomplex mit unterliegendem Raum $\nabla^n \times 0 \cup \partial\nabla^n \times [0,1]$. Das ganze Prisma $\nabla^n \times [0,1]$ wird jetzt trianguliert als der Kegel über diesem Simplizialkomplex, wobei der Kegelpunkt der

Baryzenter des Deckels $\nabla^n \times 1$ ist. Speziell wird der Deckel $\nabla^n \times 1$ also baryzentrisch unterteilt.

Der Rest des Arguments geht nun wie vorher auch. Wir benutzen den Isomorphismus

$$\mathrm{Real}\,(\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)) \;\cong\; \nabla^n \times [0,1]$$

um eine Abbildung zu definieren

$$\mathrm{Real}\,(\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)) \longrightarrow \nabla^n \times [0,1] \xrightarrow{\mathrm{pr}} \nabla^n \xrightarrow{f} X \ .$$

Durch Einschränken der Abbildung auf die diversen Simplizes in dem Simplizialkomplex $\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)$ erhalten wir ein kompatibles System singulärer Simplizes. Mit anderen Worten, wir erhalten eine Abbildung von Δ-Mengen, $\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,) \to \mathrm{S}(X)$. Die geometrische Realisierung ergibt hieraus die gewünschte Abbildung

$$\widetilde{f} : \nabla^n \times [0,1] \;\cong\; \mathrm{Real}\,(\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)) \longrightarrow \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X)) \ . \qquad \square$$

Bemerkung. Es sei $O = \{O_j\}_{j\in J}$ eine zulässige Überdeckung von dem Raum X (das heißt, das System der offenen Kerne $\{\mathring{O}_j\}_{j\in J}$ ist immer noch eine Überdeckung). Es gilt dann: Die Abbildung $\mathrm{Unt} : \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X)) \to \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X))$ respektiert kleine Simplizes in dem Sinne, daß $\mathrm{Unt}(\mathrm{Real}\,(\mathrm{S}_O(X))) \subset \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}_O(X))$. Ähnlich respektiert die Homotopie von der Identität zu der Abbildung Unt ebenfalls kleine Simplizes in dem Sinne, daß $\mathrm{Bild}(\mathrm{Real}\,(\mathrm{S}_O(X)) \times [0,1]\,) \subset \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}_O(X))$. — Das ist klar, denn wenn $f : \nabla^n \to X$ klein bezüglich O ist, so heißt das, daß es ein j gibt mit $f(\nabla^n) \subset O_j$; offensichtlich gilt dann für jedes der Simplizes, die in die Definition von $\overline{\overline{f}}$ bzw. von $\widetilde{f}$ eingehen, ebenfalls, daß sein Bild ganz in O_j enthalten ist.

Daß die Unterteilungs-Abbildung Simplizes verkleinert, präzisiert nun folgender Satz.

Satz. *Sei X topologischer Raum, sei O eine zulässige Überdeckung von X. Zu jedem singulären Simplex $f : \nabla^n \to X$ existiert eine natürliche Zahl k, so daß die k-fache Wiederholung der Unterteilungs-Abbildung das Bild $\overline{f}(\nabla^n) \subset \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}(X))$ klein macht in dem Sinne, daß*

$$\underbrace{(\mathit{Unt} \circ \cdots \circ \mathit{Unt})}_{k}\ (\overline{f}(\nabla^n)) \;\subset\; \mathrm{Real}\,(\mathrm{S}_O(X)) \ .$$

Beweis. Die Behauptung des Satzes ist gleichbedeutend mit folgender Behauptung: *Sei $O' = \{f^{-1}(O_j)\}_{j\in J}$ die induzierte Überdeckung von ∇^n. Dann gibt es ein k, so daß jedes Simplex der k-fachen baryzentrischen Unterteilung von ∇^n ganz in einer Menge dieser Überdeckung enthalten ist.*

Dazu wird es genügen, zu zeigen, daß eine Zahl $a < 1$ existiert mit der folgenden Eigenschaft: Sei Σ^n irgendein affines n–Simplex innerhalb von ∇^n (z.B. ∇^n selbst oder ein n–Simplex einer Unterteilung davon). Es ist dann richtig, daß jedes Simplex der baryzentrischen Unterteilung von Σ^n einen Durchmesser

$$\leq \ a \cdot (\,\textit{Durchmesser von } \Sigma^n\,)$$

hat. — Denn per Induktion folgt ja hieraus, daß jedes Simplex der k–fachen baryzentrischen Unterteilung von ∇^n einen Durchmesser

$$\leq \; a^k \cdot (\, \textit{Durchmesser von } \nabla^n \,)$$

hat, und man braucht nun k nur noch so zu wählen, daß diese Zahl kleiner wird als die Lebesgue–Zahl der offenen Überdeckung $\{f^{-1}(\mathring{O}_j)\}_{j\in J}$ von ∇^n .

Wir werden zeigen, daß $\frac{n}{n+1}$ eine solche Zahl a ist. Zunächst ist klar, daß die maximale Distanz innerhalb von einem affinen Simplex immer von einem Paar von Ecken angenommen wird. Es wird also genügen, die maximale Distanz zweier Ecken des Unterteilungs-Simplexes zu untersuchen. Diese Ecken nun sind sämtlich Baryzenter von Seiten (inklusive der Ecken von Σ^n) . Wenn beide Ecken in $\partial\Sigma^n$ liegen, so ist man per Induktion fertig, weil

$$\frac{(n-1)}{(n-1)+1} \;<\; \frac{n}{n+1} \quad .$$

Es genügt also, den Fall zu betrachten, wo eine dieser Ecken der Baryzenter von Σ^n ist. Wiederum ist nun klar, daß die maximale Distanz zum Baryzenter innerhalb Σ^n von einer Ecke von Σ^n angenommen wird. Es genügt also, die Distanz vom Baryzenter zu einer Ecke von Σ^n abzuschätzen. Seien $v_0, \ldots, v_n$ die Ecken. Sei v_{i_0} die, von der die Distanz zum Baryzenter abzuschätzen ist, dann ist

$$\begin{aligned} \| \, v_{i_0} - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v_i \, \| \;&=\; \| \, \frac{1}{n+1} \sum_{i\neq i_0} (v_{i_0} - v_i) \, \| \\ &\leq\; \frac{n}{n+1} \; \sup \| \, v_{i_0} - v_i \, \| \quad . \end{aligned}$$

□

Wir können nun zeigen

Satz. *Die Inklusion* $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X)) \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$ *ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Dies ist eine zelluläre Inklusion von CW-Komplexen. Deshalb können wir folgendes Kriterium anwenden, das wir in Zusammenhang mit dem Whitehead-Satz kennengelernt haben (“Formulierung des Whitehead-Satzes ohne Homotopie-gruppen”): *Es genügt, zu zeigen, für jedes* m *und jede Abbildung*

$$g: \; D^m \longrightarrow \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$$

mit $g(\partial D^m) \subset \mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$ *existiert eine Homotopie, relativ* ∂D^m *, zu einer Abbildung mit Bild in dem Unterkomplex* $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$. Weil die Inklusion $\partial D^m \to D^m$ die HEE hat, können wir das Kriterium noch ein bißchen abschwächen. Nämlich *es genügt, eine Homotopie zu finden von* g *zu einer Abbildung mit Bild in* $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$ *derart, daß die auf* ∂D^m *eingeschränkte Homotopie ganz in dem Unterraum* $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$ *verläuft.*

Eine solche Homotopie erhalten wir aus dem vorstehenden Satz. Nämlich $g(D^m)$ ist kompakt und ist deshalb enthalten in einem *endlichen Unterkomplex* des CW-Komplexes $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$; das heißt, es ist enthalten in der Vereinigung der Bilder von *endlich vielen* singulären Simplizes in $\mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$, etwa $f_0, \ldots, f_p$. Nach dem vorstehenden Satz existiert deshalb eine Zahl

$$k \;=\; \max_{0 \le i \le p} k(f_i)$$

so daß

$$\mathrm{Unt}^k(g(D^m)) \;\subset\; \mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X)) \;.$$

Die Homotopie von Unt^k zur identischen Abbildung hat die Eigenschaft, daß ihre Einschränkung auf $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$ ganz in $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X))$ verläuft. Sie induziert deshalb eine Homotopie der gewünschten Art von g. □

Bemerkung. Eigentlich ist dieser Satz nicht genau das, was wir wollen. Wir möchten nämlich wissen, daß die Inklusion $|\,\mathrm{S}_O(X)\,| \longrightarrow |\,\mathrm{S}(X)\,|$ eine Homotopieäquivalenz ist. Das vorstehende Argument läßt sich auf diesen Fall nicht übertragen, weil die baryzentrische Unterteilung *nicht* mit den Ausartungs-Abbildungen verträglich ist (im Gegensatz zu ihrer Verträglichkeit mit Rand-Abbildungen). Wir behelfen uns bei dieser Kalamität mit einem indirekten Vorgehen. Wir werden nämlich später zeigen: Für jede simpliziale Menge Y ist die natürliche Abbildung $\mathrm{Real}(Y) \to |\,Y\,|$ eine Homotopieäquivalenz. Wenn wir dieses Resultat mit dem obigen Satz kombinieren, werden wir wissen, daß in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X)) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \\
{\scriptstyle\simeq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\simeq} \\
|\,\mathrm{S}_O(X)\,| & \longrightarrow & |\,\mathrm{S}(X)\,|
\end{array}$$

drei der Pfeile Homotopieäquivalenzen sind (wie angedeutet), und daß somit die restliche Abbildung, $|\,\mathrm{S}_O(X)\,| \longrightarrow |\,\mathrm{S}(X)\,|$, ebenfalls eine Homotopieäquivalenz sein muß. □

Ketten-Unterteilung

Sei X ein topologischer Raum, $\mathrm{S}(X)$ sein singulärer Komplex, und $C(X)$ der singuläre Kettenkomplex (mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe A),

$$C(X)_n \ := \ A[\mathrm{S}(X)_n] \ .$$

(Per linearer Fortsetzung sind die Rand-Abbildungen d_i zu $A[\mathrm{S}(X)_n] \to A[\mathrm{S}(X)_{n-1}]$ erweitert; der Rand-Operator ∂ ist definiert als die Wechselsumme $\partial \ = \ \sum(-1)^i \, d_i$.)

Die neulich diskutierte *baryzentrische Unterteilung* ordnet einem singulären Simplex $f : \nabla^n \to X$ andere singuläre Simplizes derselben Dimension zu, nämlich solche, wo die Abbildung sich schreiben läßt als eine Komposition

$$\nabla^n \xrightarrow{\text{Inkl.}} \mathrm{Real}\,(\text{U-}\nabla^n) \ \cong \ \nabla^n \xrightarrow{f} X \ ,$$

wobei "Inkl." die Inklusionsabbildung von einem der Simplizes in dem Simplizialkomplex $\text{U-}\nabla^n$ (baryzentrische Unterteilung) bezeichnet.

Satz. *Es gibt eine Unterteilungs-Abbildung* $u : C(X) \longrightarrow C(X)$ *und eine Kettenhomotopie* D *von der identischen Abbildung zu der Abbildung* u *,*

$$\partial D + D \partial \ = \ \mathrm{Id} - u \ , \quad D : C(X)_n \longrightarrow C(X)_{n+1} \ , \quad n = 0, 1, \dots \ ,$$

wobei folgendes gilt: Sei $x = (f : \nabla^n \to X\,)$ *ein erzeugendes Simplex in* $C(X)_n$ *. Dann ist* $u(x) \ = \ \sum \pm g_i$ *, wo* g_i *die endlich vielen Simplizes*

$$\nabla^n \xrightarrow{\text{Inkl.}} \mathrm{Real}\,(U\text{-}\nabla^n) \ \cong \ \nabla^n \xrightarrow{f} X$$

durchläuft. Ähnlich auch $D(x) \ = \ \sum \pm h_j$ *, wo* h_j *die endlich vielen Simplizes*

$$\nabla^{n+1} \xrightarrow{\text{Inkl.}} \mathrm{Real}\,(\widetilde{U}(\nabla^n \times [0,1]\,)) \ \cong \ \nabla^n \times [0,1] \xrightarrow{\mathrm{pr}} \nabla^n \xrightarrow{f} X$$

durchläuft.

Dabei ist $\widetilde{\mathrm{U}}(\nabla^n \times [0,1]\,)$ der ebenfalls neulich diskutierte Simplizialkomplex (eine Unterteilung von $\nabla^n \times [0,1]$), der zwischen der baryzentrischen Unterteilung von ∇^n einerseits und der "Unterteilung Nichts-Tun" andererseits interpoliert.

Beweis des Satzes. Die Konstruktion erfolgt induktiv; nämlich per Induktion über die Dimension n . Das induktive Vorgehen enthebt uns, teilweise, der Notwendigkeit, die Dinge im Detail benennen zu müssen; insbesondere, die vorkommenden Vorzeichen wirklich alle hinzuschreiben.

Es sei also induktiv angenommen, daß u und D auf den Ketten bis zur Dimension $n-1$ schon konstruiert sind und daß sie die beschriebenen Eigenschaften haben. Unter dieser Voraussetzung werden wir u und D nun für n-Ketten konstruieren.

Wegen der Linearität der Abbildungen wird es genügen, die Werte der Abbildungen u und D auf einem erzeugenden Simplex $(f : \nabla^n \to X)$ anzugeben; und in diesem Fall die behaupteten Identitäten dann auch nachzuprüfen.

Eine weitere Vereinfachung kommt dadurch zustande, daß wir die *Natürlichkeit* der Abbildungen u und D ausnutzen. Diese besagt (wie üblich), wenn $q : X \to Y$ eine Abbildung von topologischen Räumen ist, dann sind die entstehenden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} C(X)_n & \xrightarrow{u} & C(X)_n \\ \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \downarrow{\scriptstyle q_*} \\ C(Y)_n & \xrightarrow{u} & C(Y)_n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C(X)_n & \xrightarrow{D} & C(X)_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \downarrow{\scriptstyle q_*} \\ C(Y)_n & \xrightarrow{D} & C(Y)_{n+1} \end{array}$$

kommutativ. Nachträglich verschärfen wir die Aussage des Satzes nun so, daß sie die Natürlichkeit beinhaltet; diese ist somit auch Teil unserer Induktionsvoraussetzung, und die Konstruktion im Induktionsschritt wird so sein, daß sie die Natürlichkeit mitliefert.

Das erzeugende Simplex $(f : \nabla^n \to X)$ (auf dessen Behandlung wir uns ja schon zurückgezogen haben) liegt im Bild der Abbildung

$$f_* : C(\nabla^n) \longrightarrow C(X) ,$$

es ist das Bild des singulären Simplexes in $C(\nabla^n)_n$, das gegeben ist durch die identische Abbildung, $\mathrm{Id} : \nabla^n \to \nabla^n$.

Es wird deshalb nun genügen, die Werte der Abbildungen u und D *für dieses eine Simplex* $(\mathrm{Id} : \nabla^n \to \nabla^n)$ anzugeben. Denn per Natürlichkeit (die wir jetzt *fordern*) erzwingt das den Wert

$$u(f : \nabla^n \to X) \;=\; f_*(u(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \;;$$

und die Natürlichkeit, allgemein, ist eine automatische Konsequenz: für $q : X \to Y$ ist

$$\begin{aligned} q_*(u(f : \nabla^n \to X)) \;&=\; q_* f_*(u(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \\ &=\; u(q\, f : \nabla^n \to Y) \\ &=\; u(q_*(f : \nabla^n \to X)) \;\; . \end{aligned}$$

Für D argumentiert man entsprechend. Und schließlich wird auch (wiederum wegen der Natürlichkeit) die Beziehung $D\partial + \partial D \;=\; \mathrm{Id} - u$ schon ganz allgemein gelten, sobald sie in dem einen Fall von dem singulären Simplex $\mathrm{Id} : \nabla^n \to \nabla^n$ etabliert ist.

Innerhalb von einem euklidischen Raum, und speziell deshalb auch innerhalb von dem Standard-Simplex ∇^n, ist es sinnvoll, von einem *affinen singulären Simplex* zu reden. Affine singuläre Simplizes sind leicht zu beschreiben: man braucht nur anzugeben, was die Bilder der Ecken sind. Mit ihrer Hilfe werden wir die Abbildungen u und D in dem relevanten Spezialfall jetzt angeben.

Seien $w_0, \dots, w_m \in \nabla^n$. Wir schreiben $(w_0, \dots, w_m)$ für das affine singuläre Simplex $\sigma : \nabla^m \to \nabla^n$ mit $\sigma(v_i) = w_i$, wo v_i die i-te Ecke von ∇^m bezeichnet. Es ist z.B. in dieser Notation

$$\partial(w_0, \dots, w_m) \;=\; \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \;(w_0, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_m) \;,$$

wo, wie sonst auch, die Notation " $\widehat{w_i}$ " bedeutet, daß w_i weggelassen sein soll. Bezeichne β den Baryzenter von ∇^n . Wenn $C'(\nabla^n)$ den Unterkomplex der affinen singulären Simplizes in $C(\nabla^n)$ bezeichnet, so können wir, in jeder Dimension m , eine Abbildung

$$\beta : \; C'(\nabla^n)_m \;\longrightarrow\; C'(\nabla^n)_{m+1}$$

definieren ("Kegel mit Kegelpunkt β ") durch lineare Fortsetzung, ausgehend von

$$(w_0, \dots, w_m) \;\overset{\beta}{\longmapsto}\; (w_0, \dots, w_m, \beta) \;\; .$$

Es ist dann

$$\partial\beta \;\;=\;\; \beta\partial \;+\; (-1)^{m+1}\,\mathrm{Id}$$

wegen

$$\sum_i \;(-1)^i \;(w_0, \dots, \widehat{}, \dots, w_m, \beta) \qquad \text{(Lücke an der i-ten Stelle)}$$

$$= \; \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \,(w_0, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_m, \beta) \;+\; (-1)^{m+1}\,(w_0, \dots, w_m) \;.$$

Wir *definieren* nun

$$u(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;:=\; (-1)^n\,\beta(u\,\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})\,)$$

und

$$D(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;:=\; (-1)^{n+1}\,\beta(\,\mathrm{Id}_{\nabla^n} - D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})\,) \;\; .$$

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung handelt es sich bei $u(\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}))$ um eine Linearkombination (mit Vorzeichen) der $u(\delta_i(\nabla^{n-1}))$, und jedes von diesen wiederum ist eine Linearkombination (wieder mit Vorzeichen) der $(n{-}1)$-Simplizes in der baryzentrischen Unterteilung von ∇^{n-1} . Deshalb ist $u(\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}))$, bis auf geeignete Vorzeichen, gerade die Summe der $(n{-}1)$-Simplizes in der baryzentrischen Unterteilung von $\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$. Es folgt deshalb aus der Definition, daß $u(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$, bis auf geeignete Vorzeichen, die Summe der n-Simplizes der baryzentrischen Unterteilung von ∇^n ist.

Ähnlich klärt man auch, was es mit $D(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$ auf sich hat.

Wie oben festgestellt, ist

$$\partial\beta(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;\;=\;\; (-1)^{n+1}(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;+\; \beta\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$$

und

$$\partial\beta(D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \;=\; (-1)^{n+1}(D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \;+\; \beta\partial(D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \;.$$

Deshalb folgt

$$\begin{aligned}\partial D(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;&=\; (-1)^{n+1}\partial\beta(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;-\; (-1)^{n+1}\partial\beta(D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}))\\ &=\; (\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;+\; (-1)^{n+1}\beta\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;-\; D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;-\; (-1)^{n+1}\beta\partial D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})\end{aligned}$$

oder, was dasselbe besagt,

$$(\partial D + D\partial)(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;=\; (\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;+\; (-1)^{n+1}\beta\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;-\; (-1)^{n+1}\beta\partial D\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt nun (da $\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$ kleinere Dimension hat)

$$\partial D(\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \;=\; (\mathrm{Id} - u - D\partial)\;(\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})) \;.$$

Es folgt, daß $(\partial D + D\partial)(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$ gegeben ist durch

$$(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;+\; (-1)^{n+1}\beta\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;-\; (-1)^{n+1}\beta\,(\,\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;-\; u\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;-\; D\partial\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})\,)$$

oder, was nach Kürzen dasselbe ist,

$$(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;+\; (-1)^{n+1}\beta u\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;=\; (\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;-\; u(\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;.$$

Das heißt, wir haben die Beziehung $\partial D + D\partial \;=\; \mathrm{Id} - u$ für das spezielle Simplex (Id_{∇^n}) nun nachgeprüft — wie wir zu tun hatten.

Nachzuweisen ist auch, daß u eine Kettenabbildung ist, $\partial\, u = u\,\partial$. Wieder genügt es hier, diesen Nachweis für den ganz speziellen Fall der Kette (Id_{∇^n}) zu erbringen. Die obige Beziehung zwischen ∂ und β, angewandt auf die Definition von u, liefert

$$\begin{aligned}\partial u(\,\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;&=\; (-1)^n\,\partial\,\beta\,u\,\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})\\ &=\; (-1)^n\,\beta\,\partial\,u\,\partial(\,\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;+\; (-1)^n(-1)^{(n-1)+1}u\,\partial(\,\mathrm{Id}_{\nabla^n}) \;.\end{aligned}$$

Der zweite Term im letzten Ausdruck ist das, was wir wollen, $u\,\partial(\,\mathrm{Id}_{\nabla^n})$. Der erste Term ist null; denn nach Induktionsvoraussetzung ist u schon Kettenabbildung in der Dimension $n{-}1$, der Term ist also gleich $\beta\,u\,\partial\,\partial(\mathrm{Id}_{\nabla^n})$. □

Sei nun O eine zulässige Überdeckung von X. Bezeichne $C_O(X)$ den Unterkomplex der bezüglich O kleinen Simplizes in $C(X)$; also $C_O(X)_n \;=\; A[\mathrm{S}_O(X)_n]$.

Satz. *Zu jeder Kette $z \in C(X)$, existiert eine natürliche Zahl k mit $u^k(z) \in C_O(X)$.*

Beweis. z ist endliche Linearkombination von singulären Simplizes, etwa

$$z \;=\; \sum a_i\,x_i\,, \quad x_i \in \mathrm{S}(X)_n \;.$$

Für ein singuläres Simplex x ist $u^\ell(x)$ die Summe (mit geeigneten Vorzeichen) von den n-Simplizes in der ℓ-fachen baryzentrischen Unterteilung von x. Zu x_i existiert deshalb eine Zahl k_i mit

$$u^{k_i}(x_i) \in \mathrm{S}_O(X) \;.$$

Wir nehmen $k = \max\; k_i$. □

Satz. *Die Inklusion* $C_O(X) \to C(X)$ *induziert Isomorphismen der Homologiegruppen.*

Beweis. Wir haben eine Kettenhomotopie D von der identischen Abbildung zu der Unterteilungs-Abbildung u konstruiert. Hieraus erhalten wir eine Kettenhomotopie $D^{(k)}$ von der identischen Abbildung zu der k-fachen Iteration u^k. Denn es ist

$$\mathrm{Id} - u^k \;=\; \sum_{i=0}^{k-1} u^i\,(\mathrm{Id} - u) \;=\; \sum u^i\,(D\partial + \partial D) \;=\; \sum\,(u^i\,D\,\partial + \partial\,u^i\,D) \ ,$$

deshalb ist $D^{(k)} := \sum_{i=0}^{k-1} u^i\,D$ eine Kettenhomotopie von der Identität zu u^k,

$$\partial D^{(k)} + D^{(k)}\partial \;=\; \mathrm{Id} - u^k \ .$$

Wir zeigen nun, daß die Abbildung $H_n(C_O(X)) \to H_n(C(X))$ erstens surjektiv und zweitens injektiv ist.

(i) Sei $[z] \in H_n(C(X))$. Sei z eine repräsentierende Kette von $[z]$; die Kette z ist ein Zykel, $\partial(z) = 0$. Wie oben gesehen, existiert für die Kette z nun eine Zahl k mit

$$u^k(z) \in C_O(X)_n \ .$$

Es ist dann $[z] = [u^k(z)]$. Denn die Differenz der Zykel z und $u^k(z)$ ist ein Rand,

$$z - u^k(z) \;=\; (\partial D^{(k)} + D^{(k)}\partial\,)\,(z) \;=\; \partial D^{(k)}(z) \ .$$

(ii) Sei $[z] \in H_n(C_O(X))$. Wenn das Bild von $[z]$ in $H_n(C(X))$ gleich null ist, so existiert ein $y \in C(X)_{n+1}$ mit $\partial y = z$. In dieser Situation können wir, wie oben gesehen, ein ℓ finden, so daß $u^\ell(y) \in C_O(X)_{n+1}$. Es ist dann

$$z - \partial(u^\ell(y)) \;=\; \partial(y - u^\ell(y)) \;=\; \partial(D^{(\ell)}\partial + \partial D^{(\ell)}\,)(y) \;=\; \partial D^{(\ell)}\partial(y) \;=\; \partial D^{(\ell)}(z) \ .$$

Also

$$z \;=\; \partial\,D^{(\ell)}(z) \;+\; \partial\,u^\ell(y) \ .$$

Auf der rechten Seite ist nun der Term $u^\ell(y)$ *klein*, nach Konstruktion. Der Term $D^{(\ell)}(z)$ ist klein, weil die Abbildungen D und u kleine Ketten respektieren, und somit die Abbildung $D^{(\ell)}$ ebenfalls. Wir haben also eingesehen, daß z der Rand von einer *kleinen* Kette ist. Folglich ist das von z in $H_n(C_O(X))$ repräsentierte Element gleich null. □

Vergleich von Realisierungen

Sei Y simpliziale Menge. Es gibt zwei Möglichkeiten der geometrischen Realisierung:
— *ohne* Berücksichtigung von Ausartungen, $\mathrm{Real}(Y)$, und
— *mit* Berücksichtigung von Ausartungen, $|Y|$.

Satz. *Die kanonische Abbildung* $\mathrm{Real}(Y) \longrightarrow |Y|$ *ist eine Homotopieäquivalenz.*

Dies ist insofern für uns interessant, als es eine bisher offen gelassene Lücke füllt, nämlich

Satz. *Sei* X *topologischer Raum, und* O *zulässige Überdeckung. Die Inklusion*

$$|\,\mathrm{S}_O(X)\,| \longrightarrow |\,(\mathrm{S}(X))\,|$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X)) & \longrightarrow & \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X)) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
|\,\mathrm{S}_O(X)\,| & \longrightarrow & |\,\mathrm{S}(X)\,|
\end{array}$$

in dem die vertikalen Pfeile nach dem obigen Satz Homotopieäquivalenzen sind, und wir wissen schon, daß $\mathrm{Real}(\mathrm{S}_O(X)) \to \mathrm{Real}(\mathrm{S}(X))$ eine Homotopieäquivalenz ist. $\square$

Um den Satz über die Abbildung $\mathrm{Real}(Y) \to |Y|$ zu beweisen, betrachten wir drei Fälle in wachsender Allgemeinheit.

1) *Der Spezialfall* $Y = \Delta^n$ (= *Standard-n-Simplex*).

2) *Der Spezialfall eines endlich-dimensionalen* Y (*wir sagen:* Y *hat Dimension* $\leq n$, *wenn jedes Simplex der Dimension* $> n$ *ausgeartet ist*).

3) *Der allgemeine Fall.*

Wir behandeln diese Fälle in umgekehrter Reihenfolge in der Weise, daß wir zuerst den 3. Fall auf den 2. zurückführen, dann den 2. auf den 1.; zum Schluß behandeln wir den ersten Fall.

Reduktion von Fall 3 auf Fall 2. Bezeichne $\mathrm{Skel}_n(Y)$ die Unter-simpliziale-Menge *n-Skelett* von Y (ein Simplex von Y ist in $\mathrm{Skel}_n(Y)$ genau dann, wenn es Ausartung eines Simplexes der Dimension $\leq n$ ist).

Lemma. *Wenn* $\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_n(Y)) \xrightarrow{\simeq} |\mathrm{Skel}_n(Y)|$ *für alle* n, *dann* $\mathrm{Real}(Y) \xrightarrow{\simeq} |Y|$.

Das ist ein Spezialfall von der folgenden Bemerkung.

Bemerkung. Seien V und W CW-Komplexe mit $V = \bigcup_n V_n$, $W = \bigcup_n W_n$, wobei $V_0 \subset V_1 \subset \dots$, $W_0 \subset W_1 \subset \dots$, und wo V_n und W_n jeweils Unterkomplexe (nicht notwendig Skelette) sind. Sei $V \to W$ eine zelluläre Abbildung mit $V_n \to W_n$. Wenn $V_n \xrightarrow{\simeq} W_n$ für alle n, dann ist auch $V \to W$ eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Bezeichne Z den Abbildungs-Zylinder der Abbildung $V \to W$; dies ist ein CW-Komplex (da die Abbildung $V \to W$ als zellulär vorausgesetzt wurde). Bezeichne Z_n den Abbildungs-Zylinder der Abbildung $V_n \to W_n$; dies ist ein Unterkomplex von Z, die Z_n bilden eine aufsteigende Folge von Unterkomplexen, und ihre Vereinigung ist ganz Z.

Aufgrund der Hypothese wissen wir, daß jede der Inklusionen $V_n \to Z_n$ eine Homotopieäquivalenz ist. Wir wollen zeigen, daß die Inklusion $V \to Z$ ebenfalls eine Homotopieäquivalenz ist.

Wir benutzen: Eine Inklusion $X \to X'$ von CW-Komplexen ist Homotopieäquivalenz genau dann, wenn für jedes m und jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \partial D^m & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ D^m & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

eine Homotopie, relativ ∂D^m, von f zu einer Abbildung mit Bild in X existiert. Sei

$$\begin{array}{ccc} \partial D^m & \longrightarrow & V \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ D^m & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

ein solches Diagramm. Nun ist $f(D^m)$ kompakt und daher, wie wir wissen, schon enthalten in einem endlichen Unterkomplex von Z. Da Z die Vereinigung der aufsteigenden Folge von CW-Komplexen Z_n ist, folgt, daß ein k existiert mit $f(D^m) \subset Z_k$. Wir haben deshalb ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \partial D^m & \longrightarrow & V_k \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ D^m & \xrightarrow{f} & Z_k \end{array}$$

und die gewünschte Deformation von f existiert nach der Voraussetzung, daß $V_k \to Z_k$ eine Homotopieäquivalenz ist. $\square$

Reduktion von Fall 2 auf Fall 1. Diese ist gegeben durch

Lemma. *Wenn* $\mathrm{Real}(\Delta^m) \xrightarrow{\simeq} |\Delta^m|$ *für alle* m, *dann* $\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_n(Y)) \xrightarrow{\simeq} |\,\mathrm{Skel}_n(Y)\,|$ *für alle* n.

Beweis (durch Induktion nach n). Es ist

$$\mathrm{Skel}_n(Y) \;\cong\; \mathrm{Skel}_{n-1}(Y) \cup_{J_n \times \partial\Delta^n} J_n \times \Delta^n \ ,$$

wo J_n die Indexmenge für die nicht-ausgearteten n-Simplizes von Y^n bezeichnet. Nun ist sowohl $\mathrm{Real}(\dots)$ als auch $|\dots|$ verträglich mit Verklebung; d.h., es ist

$$\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_n(Y)) \;\cong\; \mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_{n-1}(Y)) \cup_{\mathrm{Real}(J_n \times \partial\Delta^n)} \mathrm{Real}(J_n \times \Delta^n)$$

und ähnlich für $|\,\mathrm{Skel}_n(Y)\,|$. Das zeigt, daß $\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_n(Y)) \to |\,\mathrm{Skel}_n(Y)\,|$ die Abbildung der verklebten Räume ist, die gegeben ist durch das Verklebediagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_{n-1}(Y)) \arrow[d] & \mathrm{Real}(J_n \times \partial\Delta^n) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Real}(J_n \times \Delta^n) \arrow[d] \\
|\,\mathrm{Skel}_{n-1}(Y)\,| & |\,J_n \times \partial\Delta^n\,| \arrow[l] \arrow[r] & |\,J_n \times \Delta^n\,|
\end{tikzcd}$$

Um einzusehen, daß $\mathrm{Real}(\mathrm{Skel}_n(Y)) \to |\,\mathrm{Skel}_n(Y)\,|$ Homotopieäquivalenz ist, genügt es demnach (wegen des Klebelemmas) sich zu überlegen, daß die drei vertikalen Pfeile in dem Diagramm Homotopieäquivalenzen sind.

Für den linken und den mittleren Pfeil gilt dies nach Induktionsvoraussetzung, weil $\mathrm{Skel}_{n-1}(Y)$ und $\partial\Delta^n$ die Dimension $\leq n{-}1$ haben (also gleich ihrem $(n{-}1)$-Skelett sind). Den rechten Pfeil betreffend merken wir an, daß sowohl $\mathrm{Real}(\dots)$ als auch $|\dots|$ mit disjunkten Vereinigungen verträglich sind. Deshalb ist der rechte Pfeil disjunkte Vereinigung von Abbildungen $\mathrm{Real}(\Delta^n) \to |\Delta^n|$, und die sind ja, nach der Voraussetzung dieses Falles, ebenfalls Homotopieäquivalenzen. $\square$

Behandlung von Fall 1. Um zu zeigen, daß $\mathrm{Real}(\Delta^n) \to |\Delta^n|$ Homotopieäquivalenz ist, genügt es, zu zeigen, daß beide Räume zusammenziehbar sind (d.h., den Homotopietyp von einem Punkt haben).

Lemma. $|\Delta^n| \;\simeq\; \mathrm{pt}$.
Beweis. $|\Delta^n| \;\cong\; \nabla^n$.

Lemma. $\mathrm{Real}(\Delta^n) \;\simeq\; \mathrm{pt}$.

Beweis. Dies ist etwas komplizierter. Es ist z.B. *nicht* richtig, daß $\mathrm{Real}(\Delta^0)$ ein Punkt wäre; $\mathrm{Real}(\Delta^0)$ ist im Gegenteil ein recht großer CW-Komplex (es gibt je eine Zelle in jeder Dimension). Im Fall von $\mathrm{Real}(\Delta^0)$ ist es noch möglich, den Homotopietyp gewissermaßen "auszurechnen" (dies war Gegenstand einiger Übungsaufgaben), im allgemeinen Fall ist dies Verfahren aber nicht sehr praktikabel. Wir benutzen stattdessen den folgenden Satz.

SATZ. *Sei* Z *eine* Δ*-Menge. Hinreichend dafür, daß* $\mathrm{Real}(Z) \simeq \mathrm{pt.}$, *ist folgendes:*

KRITERIUM. *Es gibt eine Folge von Abbildungen* $H_m : Z_m \to Z_{m+1}$ *mit*

$$d_i\,H_m \;=\; H_{m-1}\,d_i\;,\quad \text{für}\quad 0 \le i \le m\;,\quad \text{und}\quad d_{m+1}\,H_m \;=\; \mathrm{Id}_{Z_m}\;,$$

und es gibt eine Ecke $\widehat{z} \in Z_0$, *so daß für alle* m *und alle* $z \in Z_m$ *gilt*

$$\widehat{z} \;=\; (d_0)^{m+1}\,H_m(z) \quad (= \text{ letzte Ecke von } H_m(z))\;.$$

BEWEIS. Wir zeigen, es gibt eine Homotopie

$$F:\ \mathrm{Real}(Z) \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{Real}(Z)$$

von der identischen Abbildung auf $\mathrm{Real}(Z)$ zu der konstanten Abbildung mit Wert $\widehat{z}$. Nach der Definition von $\mathrm{Real}(Z)$,

$$\mathrm{Real}(Z) \;=\; \dot{\bigcup}_m\ Z_m \times \nabla^m \,/ \sim\;,$$

genügt es, zu zeigen, es gibt eine Abbildung

$$\overline{F}:\ \dot{\bigcup}_m\ Z_m \times \nabla^m \times [0,1] \;\longrightarrow\; \dot{\bigcup}_m\ Z_m \times \nabla^m\;,$$

die mit der induzierten Äquivalenzrelation verträglich ist, und die gewisse weitere Eigenschaften hat. Die Abbildung $\overline{F}$ wird definiert als die disjunkte Vereinigung von Abbildungen

$$\overline{F}_m:\ Z_m \times \nabla^m \times [0,1] \;\longrightarrow\; Z_{m+1} \times \nabla^{m+1}\;,$$

und zwar ist die Abbildung der Indexmenge $Z_m \to Z_{m+1}$ gegeben durch die Abbildung H_m des Kriteriums, und im übrigen ist

$$h_m:\ \nabla^m \times [0,1] \longrightarrow \nabla^{m+1}$$

eine (kanonische) Abbildung mit

$$\begin{array}{lcll} h_m\,|\,\nabla^m \times 0 & = & \delta_{m+1} & \text{(Seiteninklusion, die die letzte Ecke meidet)} \\ h_m\,|\,\nabla^m \times 1 & = & (\delta_0)^{m+1}\,(\nabla^0) & \text{(konstante Abbildung in die letzte Ecke)}\,; \end{array}$$

wobei diese Abbildung eindeutig festgelegt ist durch die Forderung, daß sie linear ist auf jedem der Simplizes der kanonischen Simplizialzerlegung von $\nabla^m \times [0,1]$. Für variables m sind die Abbildungen h_m verträglich mit Seiten-Inklusionen, es gilt nämlich

$$h_m \circ (\delta_i \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \;=\; \delta_i \circ h_{m-1}\;,\qquad \text{für}\quad 0 \le i \le m\;.$$

Zusammen mit der vorausgesetzten Beziehung $d_i\,H_m \;=\; H_{m-1}\,d_i$ (für $0 \le i \le m$) gibt das die geforderte Verträglichkeit der Abbildung $\overline{F}$ mit der induzierten Äquivalenzrelation. Denn sei $z \in Z_m$, $x \in \nabla^{m-1}$ und $t \in [0,1]$. Die Äquivalenzrelation auf $\dot{\bigcup}_m\ Z_m \times \nabla^m \times [0,1]$ sagt, daß

$$(\,d_i(z)\,,\,x\,,\,t\,) \quad\sim\quad (\,z\,,\,\delta_i(x)\,,\,t\,)\;\;,$$

wir müssen also nachprüfen, daß auch die Bilder dieser beiden unter der Abbildung $\overline{F}$ zueinander äquivalent sind. Das ist aber der Fall: diese Bilder sind gegeben durch

$$(\, H_{m-1}(d_i(z))\,,\ h_{m-1}(x,t)\,) \ = \ (\, d_i(H_m(z))\,,\ h_{m-1}(x,t)\,)$$

einerseits und

$$(\, H_m(z)\,,\, h_m(\delta_i(x),t)\,) \ = \ (\, H_m(z)\,,\, \delta_i(h_{m-1}(x,t))\,)$$

andererseits. $\overline{F}$ induziert also eine Homotopie F, wie gewünscht. Die Homotopie F geht von der identischen Abbildung, wegen

$$z \times \nabla^m \times 0 \ \longrightarrow \ H_m(z) \times \delta_{m+1}(\nabla^m) \ \sim \ d_{m+1}H_m(z) \times \nabla^m \quad (\, = \ z \times \nabla^m\,)\ ,$$

zur konstanten Abbildung mit Wert $\widehat{z}$, wegen

$$z \times \nabla^m \times 1 \ \longrightarrow \ H_m(z) \times (\delta_0)^{m+1}(\nabla^0) \ \sim \ (d_0)^{m+1}H_m(z) \times \nabla^0 \quad (\, = \ \widehat{z} \times \nabla^0\,)\ .$$

□

Aufgrund dieses Satzes ist $\mathrm{Real}(\Delta^n) \ \simeq \ \mathrm{pt.}$, denn

Behauptung. Δ^n *erfüllt das Kriterium.*

Beweis. Die Ecken von Δ^n sind $0,1,\ldots,n \in (\Delta^n)_0$. Als $\widehat{z}$ nehmen wir die letzte Ecke, n. Die Abbildung

$$\begin{aligned} H_m : \ \mathrm{Hom}_\Delta(\,[m]\,,\,[n]\,) \ &\longrightarrow \ \mathrm{Hom}_\Delta(\,[m{+}1]\,,\,[n]\,) \\ (f : [m] \to [n]\,) \ &\longmapsto \ (f' : [m{+}1] \to [n]\,) \end{aligned}$$

ist definiert als

$$f'(i) \ = \ f(i)\ , \quad \text{für } i \leq m\ , \quad \text{und} \quad f'(m{+}1) \ = \ n\ .$$

Daß das System $\{H_m\}$ die geforderten Bedingungen erfüllt, ist klar. □

Anhang: Klebelemma

Es soll das Klebelemma bewiesen werden. Es gibt dazu verschiedene Methoden. Wir gehen hier so vor, daß wir eine bestimmte Beziehung benutzen (der folgende Satz) zwischen *Homotopieäquivalenzen* einerseits und *Deformationsretrakten* andererseits.

Ein “Deformationsretrakt” (oder, wie es manchmal auch in der Literatur heißt, “starker Deformationsretrakt”) soll hier das folgende bedeuten. Sei X Unterraum von X'. Wir sagen, X ist *Deformationsretrakt* von X', wenn es eine Homotopie, *relativ zu* X, gibt, von der identischen Abbildung auf X' zu einer Abbildung von X' nach X (letztere Abbildung ist dabei notwendigerweise eine Retraktion).

Etwas detaillierter (und formaler) läuft dies auf das folgende hinaus. Bezeichne $i : X \to X'$ die Inklusionsabbildung. X ist Deformationsretrakt von X', wenn eine Abbildung $r : X' \to X$ existiert, mit $r \circ i = \mathrm{Id}_X$, und wenn ferner eine Homotopie zwischen der Abbildung $i \circ r$ und der identischen Abbildung auf X' existiert, wobei diese Homotopie auf dem Unterraum X konstant sein soll.

Unter dem Abbildungszylinder $Z(f)$ einer Abbildung $f : X \to Y$ soll, wie üblich, der Raum

$$Z(f) \;=\; X \times [0,1] \;\cup_{X\times 1} Y \;\; .$$

verstanden werden.

Satz. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $Z(f)$ ihr Abbildungszylinder. Es gilt:

(i) *Die Inklusion* $X \to Z(f)$ *hat die* HEE (*Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft*).

(ii) *Wenn* $f : X \to Y$ *Homotopieäquivalenz ist, dann ist* X *Deformationsretrakt von dem Abbildungszylinder* $Z(f)$ (*und*, natürlich, *umgekehrt*).

Den Beweis geben wir später. Wir benötigen auch einige einfache Tatsachen, die wir jetzt als Bemerkungen formulieren.

Bemerkung (1). *Sei* A *Deformationsretrakt von* X. *Sei* $A \to B$ *eine Abbildung. Dann ist* B *Deformationsretrakt von* $X \cup_A B$.

Beweis. Wir nehmen die induzierte Deformation

$$(X \cup_A B) \times I \;\cong\; X \times I \;\cup_{A \times I}\; B \times I \longrightarrow X \cup_A B$$

wo zur Abkürzung $I = [0,1]$. $\square$

Bemerkung (2). *Sei A abgeschlossener Unterraum von X, sei $A \to B$ eine Abbildung. Wenn $A \to X$ die HEE hat, dann auch die Inklusion $B \to B \cup_A X$.*

Beweis. Wie wir uns früher überlegt haben, so ist die HEE von $A \to X$ äquivalent dazu, daß eine Retraktion

$$X \times I \longrightarrow A \times I \cup_{A\times 0} X \times 0$$

existiert. Wir nehmen die induzierte Retraktion

$$\begin{aligned}
&(B \cup_A X) \times I \\
&\cong B \times I \cup_{A\times I} X \times I \longrightarrow B \times I \cup_{A\times I} (A \times I \cup_{A\times 0} X \times 0) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cong B \times I \cup_{A\times 0} X \times 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cong B \times I \cup_{B\times 0} (B \cup_A X) \times 0 \ .
\end{aligned}$$

□

Bemerkung (3). *Sei A abgeschlossen in X. Wenn $A \to X$ die HEE hat, dann ist $A \times I \cup_{A\times 0} X \times 0$ Deformationsretrakt von $X \times I$.*

Beweis. Sei $\rho : X \times I \to A \times I \cup_{A\times 0} X \times 0$ eine Retraktion. Indem wir ρ als Abbildung nach $X \times I$ auffassen, können wir schreiben $\rho = (\rho_1, \rho_2)$. In Abhängigkeit von dem Parameter $t \in [0,1]$ definieren wir eine Abbildung

$$\begin{aligned}
R_t : \ X \times I &\longrightarrow X \times I \\
(x, s) &\longmapsto (\rho_1(x, st), (1-t)s + t \cdot \rho_2(x,s)) \ .
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
R_0(x,s) &= (\rho_1(x,0), s) = (x,s) \ , \\
R_1(x,s) &= (\rho_1(x,s), \rho_2(x,s)) = \rho(x,s) \ , \\
R_t(x,0) &= (\rho_1(x,0), t\ \rho_2(x,0)) = (x,0) \ ,
\end{aligned}$$

und, für $a \in A$,

$$R_t(a,s) = (\rho_1(a,st), (1-t)s + t\,\rho_2(a,s)) = (a, (1-t)s + ts) = (a,s) \ .$$

Diese Beziehungen zeigen, daß $t \mapsto R_t$, $t \in [0,1]$, eine Deformationsretraktion von $X \times I$ in den Unterraum $A \times I \cup_{A\times 0} X \times 0$ ist. □

Ein Spezialfall des Klebelemmas. *Sei $A \subset X$ abgeschlossener Unterraum mit der HEE. Sei $\alpha : A \to A'$ eine Homotopieäquivalenz. Die induzierte Abbildung*

$$\chi : \ X \longrightarrow A' \cup_A X$$

ist ebenfalls eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Inklusion von X in den Abbildungszylinder $Z(\chi)$ eine Homotopieäquivalenz ist. Es ist

$$\begin{aligned}
Z(\chi) &= X \times I \cup_{X\times 1} A' \cup_A X \\
&\cong (X \times I \cup_{X\times 1} X) \cup_A A' \cong X \times I \cup_{A\times 1} A' \\
&\cong X \times I \cup_{A\times I} A \times I \cup_{A\times 1} A' \\
&\cong X \times I \cup_{A\times I} Z(\alpha) \quad .
\end{aligned}$$

Nach Bemerkung (3) ist $A \times I \cup_{A\times 0} X \times 0$ Deformationsretrakt von $X \times I$. Mit Bemerkung (1) folgt daher, daß

$$X \times 0 \cup_{A\times 0} Z(\alpha) \cong (X \times 0 \cup_{A\times 0} A \times I) \cup_{A\times I} Z(\alpha)$$

Deformationsretrakt ist von

$$X \times I \cup_{A\times I} Z(\alpha) \cong Z(\chi) .$$

Nach dem oben angegebenen Satz ist $A \times 0$ Deformationsretrakt von $Z(\alpha)$. Erneute Anwendung von Bemerkung (1) ergibt daher, daß $X \times 0$ Deformationsretrakt ist von $X \times 0 \cup_{A\times 0} Z(\alpha)$. Es folgt, daß $X \times 0$ Deformationsretrakt ist von $Z(\chi)$, und der Spezialfall des Klebelemmas ist beweisen. □

Der allgemeine Fall des Klebelemmas. *Seien $A \to X$ und $A' \to X'$ abgeschlossene Inklusionen mit der HEE. Sei*

$$\begin{array}{ccccc}
Y & \longleftarrow & A & \longrightarrow & X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Y' & \longleftarrow & A' & \longrightarrow & X'
\end{array}$$

ein kommutatives Diagramm, in dem alle vertikalen Pfeile Homotopieäquivalenzen sind. Die induzierte Abbildung

$$Y \cup_A X \longrightarrow Y' \cup_{A'} X'$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Nach Bemerkung (2) hat die Abbildung $Y \to Y \cup_A X$ die HEE. Nach dem Spezialfall ist also

$$Y \cup_A X \longrightarrow Y' \cup_Y (Y \cup_A X) \cong Y' \cup_A X$$

eine Homotopieäquivalenz, und es genügt deshalb, zu zeigen, daß die Abbildung

$$(*) \qquad Y' \cup_A X \cong Y' \cup_{A'} (A' \cup_A X) \longrightarrow Y' \cup_{A'} X'$$

ebenfalls eine Homotopieäquivalenz ist.

Nun ist $A' \cup_A X \longrightarrow X'$ eine Homotopieäquivalenz, denn nach dem Spezialfall ist die Inklusion $X \to A' \cup_A X$ Homotopieäquivalenz, und $X \to X'$ ist ja Homotopieäquivalenz nach Voraussetzung. Hätten wir zusätzlich vorausgesetzt, daß auch die Abbildung $A' \to Y'$ die HEE hat, so würde also nun folgen (wieder nach dem Spezialfall), daß auch die Abbildung (*) eine Homotopieäquivalenz ist, und wir wären fertig.

Da wir dies aber nicht vorausgesetzt haben, brauchen wir noch einen kleinen Trick. Nämlich wir definieren Y'' als den Abbildungszylinder der Abbildung $A' \to Y'$. Dann hat die Inklusion $A' \to Y''$ die HEE (wie im obigen Satz behauptet), deshalb ist nach dem Spezialfall wieder

$$Y'' \cup_{A'} (A' \cup_A X) \longrightarrow Y'' \cup_{A'} X'$$

eine Homotopieäquivalenz. Andererseits können wir diese Abbildung vergleichen mit der Abbildung (*) oben,

$$Y' \cup_{A'} (A' \cup_A X) \longrightarrow Y' \cup_{A'} X' \ .$$

Nämlich, mit der Abbildung $Y'' \to Y'$, und aufgrund der Tatsache, daß die Komposition von $A' \to Y''$ mit $Y'' \to Y'$ gleich der Abbildung $A' \to Y'$ ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y'' \cup_{A'} (A' \cup_A X) & \longrightarrow & Y'' \cup_{A'} X' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y' \cup_{A'} (A' \cup_A X) & \longrightarrow & Y' \cup_{A'} X' \ . \end{array}$$

Von der oberen horizontalen Abbildung in dem Diagramm wissen wir, daß sie eine Homotopieäquivalenz ist, und von der unteren horizontalen Abbildung wollen wir es wissen. Es wird also genügen, zu sehen, daß die beiden vertikalen Abbildungen Homotopieäquivalenzen sind. Das wissen wir aber eigentlich auch schon: die Abbildungen $A' \to X'$ und $A' \to A' \cup_A X$ haben die HEE und die Abbildung $Y'' \to Y'$ ist eine Homotopieäquivalenz. Nach dem Spezialfall ist es deshalb richtig, daß die Abbildungen

$$Y'' \cup_{A'} X' \longrightarrow Y' \cup_{A'} X' \quad \text{und} \quad Y'' \cup_{A'} (A' \cup_A X) \longrightarrow Y' \cup_{A'} (A' \cup_A X)$$

Homotopieäquivalenzen sind. □

Als Teil des obigen Satzes, und auch als zusätzliches Hilfsmittel, müssen wir zeigen, daß gewisse Inklusionen die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft haben. Wir erledigen das in einer eher ineffizienten Weise, durch direktes Hinschreiben der Dinge (mit Formeln).

Hilfssatz. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $Z(f)$ ihr Abbildungszylinder. Die beiden Inklusionen $X \longrightarrow Z(f)$ und*

$$Z(f) \times 0 \ \cup_{X\times 0} \ X \times [0,1] \ \cup_{X \times 1} \ Z(f) \times 1 \longrightarrow Z(f) \times [0,1]$$

haben die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft.

Beweis. Die Inklusion $X \to Z(f)$ hat dann (und nur dann) die HEE, wenn eine Retraktion

$$Z(f) \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1] \ \cup_{X\times 0} \ Z(f)$$

existiert. Um eine solche Retraktion anzugeben, genügt es, eine Retraktion

$$X \times I \times [0,1] \ \dot{\cup} \ Y \times [0,1] \ \cong \ (X \times I \ \dot{\cup} \ Y) \times [0,1] \ \longrightarrow \ X \times [0,1] \cup_{X \times 0} X \times I \ \dot{\cup} \ Y$$

anzugeben, die mit der Quotienten-Abbildung

$$X \times I \ \dot{\cup} \ Y \ \longrightarrow \ X \times I \cup_{X \times 1} Y \ = \ Z(f)$$

verträglich ist. Hier ist ein Beispiel für eine solche Retraktion: Auf dem ersten Summanden der disjunkten Vereinigung nehmen wir die Abbildung

$$X \times [0,1] \times [0,1] \ \longrightarrow \ X \times 0 \times [0,1] \cup_{X \times 0 \times 0} X \times [0,1] \times 0$$

die induziert ist von einer Retraktion des Quadrats $[0,1] \times [0,1]$ in seinen Unterraum $[0,1] \times 0 \cup 0 \times [0,1]$ (die Vereinigung der linken und der unteren Kante): die Retraktion des Quadrats ist gegeben durch die Projektion entlang einem Geradenbüschel durch den Punkt $(1,2)$ (ein Punkt oberhalb der rechten Kante des Quadrats). In Koordinaten ausgedrückt, ist die Retraktion gegeben durch $(x,s,t) \ \longmapsto \ (x,s',t')$, wo

$$\frac{s'-1}{s-1} \ = \ \frac{t'-2}{t-2}$$

und wo s' und t' so zu bestimmen sind, daß eines von ihnen 0 ist und das andere nicht negativ. Explizit hingeschrieben bedeutet dies

$$(x,s,t) \ \longmapsto \ \begin{cases} (\,x\,,\,0\,,\,\frac{t-2s}{1-s}\,) & \text{wenn } \ 2\,s \leq t \\ (\,x\,,\,\frac{2s-t}{2-t}\,,\,0\,) & \text{wenn } \ 2\,s \geq t\ . \end{cases}$$

Für $s = 1$ reduziert sich die Abbildung auf die Projektion $X \times [0,1] \to X \times 0$, sie ist also bezüglich der Verklebeabbildung $f \times \mathrm{Id} : X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ verträglich mit der Retraktion $Y \times [0,1] \to Y \times 0$, die (wie wir jetzt festsetzen) ebenfalls durch die Projektion gegeben sein soll. — Soweit zur ersten Abbildung.

Was die zweite Abbildung angeht, so ist zu zeigen, daß es eine Retraktion gibt von dem Raum $Z(f) \times [0,1] \times [0,1]$ in seinen Unterraum

$$Z(f) \times [0,1] \times 0 \ \cup_{(\,\dots)\times 0} \ \bigl(Z(f) \times 0 \cup_{X \times 0} X \times [0,1] \cup_{X \times 1} Z(f) \times 1\bigr) \times [0,1]\ .$$

Hierfür genügt es, eine Retraktion von

$$X \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$$

in den Unterraum

$$\begin{aligned} X \times [0,1] \times [0,1] \times 0 \ \cup \ X \times [0,1] \times 0 \times [0,1] \ \cup \ X \times 0 \times [0,1] \times [0,1] \\ \cup \ X \times [0,1] \times 1 \times [0,1] \end{aligned}$$

zu finden, sowie eine Retraktion von

$$Y \times [0,1] \times [0,1]$$

in den Unterraum

$$Y \times [0,1] \times 0 \ \cup \ Y \times 0 \times [0,1] \ \cup \ Y \times 1 \times [0,1]$$

derart, daß diese beiden Retraktionen verträglich sind bezüglich der Verklebeabbildung

$$X \times 1 \times ([0,1] \times [0,1]) \xrightarrow{f \times \mathrm{Id}} Y \times ([0,1] \times [0,1]) \ .$$

Ähnlich wie im vorigen Fall wird die Retraktion auf $X \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ auch hier wieder beschrieben durch eine Selbstabbildung des Kubus $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, die durch Projektion entlang einem Geradenbüschel gegeben ist; nämlich das Geradenbüschel durch den Punkt $(1\,,\,\frac{1}{2}\,,\,2)$. In Koordinaten ausgedrückt, ist die Retraktion gegeben durch

$$(x,s,t,u) \longmapsto (x,s',t',u')$$

wo

$$\frac{s'-1}{s-1} \ = \ \frac{t'-\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}} \ = \ \frac{u'-2}{u-2}$$

und wo (s',t',u') so zu bestimmen sind, daß alle drei zwischen 0 und 1 liegen, und so daß mindestens eine der vier folgenden Gleichungen erfüllt ist

$$s' = 0, \quad t' = 0, \quad t' = 1 \quad \text{oder} \quad u' = 0 \ .$$

Explizit hingeschrieben bedeutet dies

$$(s\,,\, t\,,\, u) \ \longmapsto \ \begin{cases} (0\,,\, \frac{2t-s}{2-2s}\,,\, \frac{u-2s}{1-s}) & \text{wenn} \quad 2t \geq s\,,\ u \geq 2s \\ (\frac{2t-s}{2t-1}\,,\, 0\,,\, \frac{4t-u}{2t-1}) & \text{wenn} \quad 2t \leq s\,,\ u \geq 4t \\ (\frac{s-2(1-t)}{2t-1}\,,\, 1\,,\, \frac{u-4(1-t)}{2t-1}) & \text{wenn} \quad s \geq 2(1-t)\,,\ u \geq 4(1-t) \\ (\frac{2s-u}{2-u}\,,\, \frac{4t-u}{4-2u}\,,\, 0) & \text{wenn} \quad 2s \geq u\,,\ u \leq 4t \ . \end{cases}$$

Die Äquivalenzrelation nun involviert diejenigen Punkte von $X \times \text{Kubus}$, wo die Koordinate s den Wert $s = 1$ annimmt. Die Retraktion wird deshalb kompatibel sein zu der Retraktion auf $Y \times [0,1] \times [0,1]$, wenn wir letztere durch die obigen Formeln definieren, aber spezialisiert auf den Wert $s = 1$. Die in den Formeln verfügbaren Koordinaten t und u werden demgemäß dann die beiden Intervall-Koordinaten in $Y \times [0,1] \times [0,1]$ bezeichnen. □

Wir kommen zum Beweis des Satzes. Der erste Teil wurde im Hilfssatz gerade gezeigt. Wir müssen noch zeigen

Satz. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist Homotopieäquivalenz genau dann, wenn X Deformationsretrakt des Abbildungszylinders $Z(f)$ ist.*

Beweis. Y ist Deformationsretrakt von $Z(f)$, die Deformationsretraktion ist induziert von derjenigen von $[0,1]$ zu $\{1\}$. Insbesondere ist die kanonische Projektion

$$p: \ Z(f) \longrightarrow Y$$

eine Homotopieäquivalenz. Bezeichne $j : X \to Z(f)$ die kanonische Inklusion. Dann ist $p\,j = f$. Folglich ist f genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn j es ist.

Es bleibt noch zu zeigen: Wenn j Homotopieäquivalenz ist, dann ist $X \cong j(X)$ sogar Deformationsretrakt von $Z(f)$. Wir zeigen dies in drei Schritten, die wir jetzt als Behauptungen formulieren.

Behauptung 1. *Die Inklusion j hat eine Links-Inverse r: $Z(f) \to X$.* Mit anderen Worten, *X ist Retrakt von $Z(f)$, mit Retraktion r.*

Beweis. Sei $g : Y \to X$ eine Homotopie-Inverse zu f, also

$$g\,f \;\simeq_F\; \mathrm{Id}_X \qquad , \qquad f\,g \;\simeq_G\; \mathrm{Id}_Y \;.$$

Da die Abbildung

$$F : \, X \times I \longrightarrow X$$

die Eigenschaft hat, daß $F \,|\, X \times 1 \;=\; g\,f$, existiert eine Faktorisierung r; also eine Abbildung $r : \, Z(f) \to X$, die das folgende Diagramm kommutativ macht,

$$\begin{array}{ccc}
X \times [0,1] \;\;\dot{\cup}\;\; Y & \xrightarrow{\;F \;\dot{\cup}\; g\;} & X \\
\Big\downarrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle r} \\
X \times [0,1] \;\cup_{X\times 1}\; Y & = & Z(f) \;.
\end{array}$$

r ist eine Retraktion, da $F \,|\, X \times 0 = \mathrm{Id}_X$.

Behauptung 2. *Diese Retraktion ist Homotopie-Inverse zu der Inklusion j.*

Beweis. Da $r\,j = \mathrm{Id}_X$, ist nur zu zeigen, daß $j\,r \simeq \mathrm{Id}_{Z(f)}$. Wie oben angemerkt, ist Y Deformationsretrakt von $Z(f)$, genauer, wenn $i : Y \to Z(f)$ die Inklusion bezeichnet und $p : Z(f) \to Y$ die Projektion, dann ist

$$i\,p \;\simeq\; \mathrm{Id}_{Z(f)} \;.$$

Es folgt

$$j\,r \;\simeq\; (i\,p)\,(j\,r) \;\simeq\; (i\,p)\,(j\,r)\,(i\,p) \;.$$

Nun ist

$$p\,j\,r\,i \;=\; f\,r\,i \;=\; f\,g \;.$$

Die Homotopie $f\,g \;\simeq_G\;$ Id induziert daher eine Homotopie

$$i(p\,j\,r\,i)p \;=\; i(f\,g)p \;\simeq\; i(\mathrm{Id}_Y)p \;=\; i\,p \;,$$

und es folgt

$$j\,r \;\simeq\; i\,p\,(j\,r)\,i\,p \;\simeq\; i\,p \;\simeq\; \mathrm{Id}_{Z(f)} \;.$$

Behauptung 3. *Es gibt eine Homotopie, relativ zu $j(X)$, von $\mathrm{Id}_{Z(f)}$ zu $j\,r$.*

Beweis. Bezeichne

$$H : \, Z(f) \times [0,1] \longrightarrow Z(f)$$

irgendeine Homotopie von $\mathrm{Id}_{Z(f)}$ zu $j\,r$, eine solche wurde gerade konstruiert. Wir zeigen, daß H abgeändert werden kann zu einer Homotopie, die auf $j(X)$ konstant ist. Die Änderung von H werden wir erzielen durch eine Homotopie von H. Das geht in zwei Schritten. Zuerst wird H auf dem "relevanten Teilraum" von $Z(f) \times [0,1]$ in ganz expliziter Weise deformiert, um die gewünschte Änderung zu erreichen. Den Rest erledigt eine Anwendung der HEE.

1. Schritt. Wir definieren eine Homotopie der eingeschränkten Abbildung

$$Z(f) \times 0 \;\cup_{j(X)\times 0}\; j(X) \times [0,1] \;\cup_{j(X)\times 1}\; Z(f) \times 1 \xrightarrow{\;H\;} Z(f)$$

d.h., eine Abbildung

$$K : \big(Z(f) \times 0 \;\cup_{j(X)\times 0}\; j(X) \times [0,1] \;\cup_{j(X)\times 1}\; Z(f) \times 1 \big) \times [0,1] \longrightarrow Z(f) \;,$$

durch die Festsetzung

$$\begin{aligned} K(\,(z,0)\,,\,u\,) &= z \\ K(\,(j(x),t)\,,\,u\,) &= H(\,j(x)\,,\,t(1-u)\,) \\ K(\,(z,1)\,,\,u\,) &= H(\,j\,r(z)\,,\,1-u\,) \;. \end{aligned}$$

Dann ist K wohldefiniert wegen

$$K(\,(j(x),0)\,,\,u\,) \;=\; H(\,j(x)\,,\,0\,) \;=\; j(x)$$

und, weil $r\,j = \mathrm{Id}_X$,

$$K(\,(j(x),1)\,,\,u\,) \;=\; H(\,j(x)\,,\,1-u\,) \;=\; H(\,j\,r(j(x))\,)\,,\,1-u\,) \;;$$

und K ist stetig, weil seine Einschränkung auf jeden der drei Teilräume der fraglichen abgeschlossenen Überdeckung stetig ist.

2. Schritt. Die Inklusion des Teilraumes $Z(f) \times 0 \;\cup_{j(X)\times 0}\; j(X) \times [0,1] \;\cup_{j(X)\times 1}\; Z(f) \times 1$ von $Z(f) \times [0,1]$ hat die HEE, wie in dem Hilfssatz oben gezeigt wurde. Deshalb gibt es eine Homotopie

$$K' : \big(Z(f) \times [0,1]\big) \times [0,1] \longrightarrow Z(f) \;,$$

die die Homotopie K erweitert. Wir definieren jetzt die abgeänderte Homotopie

$$H' : Z(f) \times [0,1] \longrightarrow Z(f)$$

durch

$$H'(\,z\,,\,t\,) \;:=\; K'(\,z\,,\,t\,,\,1\,) \;.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} H'(\,z\,,\,0\,) &= K'(\,z\,,\,0\,,\,1\,) &&= K(\,(\,z\,,\,0\,)\,,\,1) &&= z \\ H'(\,z\,,\,1\,) &= K(\,(\,z\,,\,1\,)\,,\,1\,) &&= H(\,j\,r(z)\,,\,0\,) &&= j\,r\,(z) \\ H'(\,j(x)\,,\,t\,) &= K(\,(\,j(x)\,,\,t\,)\,,\,1\,) &&= H(\,j(x)\,,\,0\,) &&= j(x) \end{aligned}$$

H' ist also eine Homotopie von $\mathrm{Id}_{Z(f)}$ zu $j\,r$, die auf dem Unterraum $j(X)$ konstant ist. □