Изотропные марковские полугруппы на ультраметрических пространствах*

Александр Бендиков[†] Александр Григорьян[‡] Кристоф Питтет[§]
Вольфганг Вёсс[¶]

Посвящается памяти В. С. Владимирова (1923–2012) и М. Х. Тайблсона (1929–2004)

Аннотация

Пусть (X, d) — сепарабельное ультраметрическое пространство с компактными шарами. Для заданных эталонной меры μ на X и функции распределения расстояний σ на $[0\,,\,\infty)$ строится симметричная марковская полугруппа $\{P^t\}_{t\geq 0}$, действующая в $L^2(X,\mu)$. Пусть $\{\mathcal{X}_t\}$ — соответствующий марковский процесс. Получены верхние и нижние оценки его плотности перехода и его функции Грина, дан критерий переходности, оценены его моменты и описаны марковский порождающий $\mathcal{L}$ и его спектр, который чисто точечный. В частном случае, когда $X = \mathbb{Q}_p^n$, где $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, наша конструкция восстанавливает лапласиан Тайблсона (спектральный множитель), и наша теория также применима к изучению лапласиана Владимирова. Даже в этой хорошо изученной постановке несколько наших результатов новые. Также изучается связь между нашими процессами и скачковыми процессами Кигами на границе дерева, которые индуцированы случайным блужданием. В заключение приводятся примеры, иллюстрирующие взаимосвязь между дробными производными и случайными блужданиями.

Содержание

*Version of May 09, 2014. Mathematics Subject Classification: 05C05, 47S10, 60J25, 81Q10

[†]При поддержке Научно-исследовательского фонда Польского Правительства, грант 2012/05/B/ST 1/00613

[‡]При поддержке Специального Исследовательского Отдела (SFB) 701 Немецкого Исследовательского Совета

[§]При поддержке Национального Совета Научных Исследований (CNRS), Франция

[¶]При поддержке проектов Австрийского Научного Фонда FWF W1230-N13 и FWF P24028-N18

1 Введение

В последние три десятилетия наблюдается возрастающий интерес к различным конструкциям марковских цепей на ультраметрических пространствах, таких как канторово множество или поле p-адических чисел. В этой работе мы вводим и изучаем класс симметричных марковских полугрупп и их порождающих на ультраметрических пространствах. Наша конструкция очень прозрачна и приводит к ряду новых результатов, а также к лучшему пониманию ранее известных результатов.

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Метрика d называется *ультраметрикой*, если она удовлетворяет ультраметрическому неравенству

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}, \tag{1.1}$$

которое, очевидно, сильнее обычного неравенства треугольника. В этом случае (X, d) называется ультраметрическим пространством.

Мы будем всегда дополнительно предполагать, что рассматриваемое ультраметрическое пространство (X, d) сепарабельно и что каждый замкнутый шар

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \tag{1.2}$$

компактен. Из последнего условия вытекает, что (X, d) полно.

Из свойства ультраметричности (1.1) следует, что шары в ультраметрическом пространстве (X, d) выглядят совсем не так, как знакомые евклидовы шары. В частности, любые два ультраметрических шара одного радиуса либо не пересекаются, либо совпадают. Следовательно, множество всех различных шаров одного и того же радиуса r образует разбиение пространства X.

Одним из наиболее хорошо известных примеров ультраметрического пространства является поле $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел, наделённое p-адической нормой $\|x\|_p$ и p-адической ультраметрикой $d(x, y) = \|x - y\|_p$. Более того, для любого целого $n \geq 1$ p-адическое n-пространство $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times ... \times \mathbb{Q}_p$ также является ультраметрическим пространством с ультраметрикой $d_n(x, y)$, определяемой равенством

$$d_n(x, y) = \max\{d(x_1, y_1), ..., d(x_n, y_n)\}.$$

Если группа изометрий ультраметрического пространства (X, d) действует транзитивно на X, то (X, d) на самом деле является локально компактной абелевой группой, что, в частности, имеет место для $\mathbb{Q}_p^n$.

В литературе различают следующие два подкласса ультраметрических пространств:

- (X, d) дискретно и бесконечно;
- (X, d) совершенно (т. е. X не содержит изолированных точек).

Различные конструкции марковских процессов на некомпактных совершенных локально компактных абелевых группах развивали Ст. Н. Эванс [22], С. Харан [30], [31], Р. С. Исмагилов [34], А. Н. Кочубей [39], [40], С. Албеверио и В. Карвовски [1], [2], С. Албеверио и Кс. Жао [3], М. Дель Муто и А. Фига-Таламанка [43], [44], Х. Х Родригес-Вега и В. А. Зунига-Галиндо [67], [51]. Они изучали X-значные бесконечно делимые случайные величины и процессы, используя средства анализа Фурье; ссылки общего характера см. в книгах Э. Хьюитта и К. А. Росса [32], М. Х. Тайблсона [56] и А. Н. Кочубея [40]. Действительно, спектральные множители Тайблсона на $\mathbb{Q}_p^n$ являются ранними предшественниками рассматриваемых здесь лапласианов.

Дж. Пирсон и Дж. Беллиссард [46] и Дж. Кигами [37], [38] рассматривали случайные блуждания на канторовом множестве и соответственно на канторовом множестве без одной точки. В [37], [38] основное внимание уделялось взаимосвязи между случайными блужданиями на деревьях и скачковыми процессами на их границах. В этом контексте упомянем также Д. Алдуса и Ст. Н. Эванса [4] и З.-К. Чена, М. Фукушиму и Дж. Йинга [15]. Мы вернёмся к работе Дж. Кигами в последних трёх разделах настоящей работы.

Совершенно другой подход развивался В. С. Владимировым, И. В. Воловичем и Е. И. Зеленовым [58], [60]. Они интересовались p-адическим анализом (распределения Брюа, преобразования Фурье и т. п.), связанным с понятием p-адической квантовой механики, и ввели класс псевдодифференциальных операторов на $\mathbb{Q}_p$ и на $\mathbb{Q}_p^n$. В частности, они рассматривали p-адический лапласиан, определяемый на $\mathbb{Q}_p^3$, и изучали соответствующее p-адическое уравнение Шрёдингера. Среди других результатов они в явном виде вычислили (в виде разложения в ряд) некоторые тепловые ядра, а также функцию Грина p-адического лапласиана. В связи с теорией псевдодифференциальных операторов на произвольных вполне несвязных группах упомянем здесь пионерскую работу Л. Салоффа-Косте [52].

Дискретные ультраметрические пространства (X, d) рассматривались в работе А. Бендикова, А. Григорьяна и К. Питтета [7], непосредственной предшественнице настоящей работы. Среди примеров таких пространств упомянем класс локально конечных групп: счётная группа G локально конечна, если любое её конечное подмножество порождает конечную подгруппу. Каждая локально конечная группа G является объединением возрастающей последовательности конечных подгрупп $\{G_n\}$. Ультраметрику d в G можно определить так: $d(x, y)$ — минимальное значение n, для которого x и y принадлежат одному и тому же смежному классу группы G_n.

Поскольку локально конечные группы не конечно порождены, основные понятия геометрической теории групп, такие, как словарная метрика, рост объёма, изопериметрические неравенства и т. п. (ср., например, с [16], [29], [53], [47], [48], [49], [57], [62]) в этой постановке не применимы. Вместо словарной метрики в этой постановке может быть использовано понятие ультраметрики (см. [5], [7], [6]).

Выбирая множество порождающих для каждой подгруппы G_n локально конечной группы G, тем самым мы определяем случайное блуждание, т. е. марковское ядро на G_n. Беря выпуклую комбинацию марковских ядер по всем G_n, получаем марковское ядро на G, которое определяет случайное блуждание на G. Такие случайные блуждания изучали Д. А. Дарлинг и П. Эрдёш [17], Х. Кестен и Ф. Спитцер [36], Л. Флатто и Дж. Питт [26], Н. Фериг и С. А. Молчанов [25], М. А. Касымджанова [35], Д. И. Картрайт [13], Г. А. Лоулер [41], С. Брофферио и В. Вёсс [11], см. также работу А. Бендикова и Л. Салоффа-Косте [9]. В частности, работа [41] содержит замечательный общий критерий возвратности таких случайных блужданий. Дальнейшие результаты о марковских процессах на ультраметрических пространствах можно найти в [18], [19], [23], [24], [42], [50].

Многие из результатов в вышеупомянутых работах поглощаются нашим подходом через ультраметрики. Мы развиваем средства для анализа одного класса очень естественных марковских процессов на ультраметрических пространствах, не предполагая наличия какой-либо групповой структуры. В частности, характер наших рассуждений позволяет внести в рассмотрение произвольную меру Радона μ на X (вместо меры Хаара в случае групп), которая используется как мера скорости для марковского процесса.

Итак, для заданного ультраметрического пространства (X, d) зафиксируем меру Радона μ на X с полным носителем и определим семейство $\{\mathrm{Q}_r\}_{r>0}$ усредняющих операторов, действующих на неотрицательных или ограниченных борелевских функциях $f : X \to \mathbb{R}$, полагая

$$\mathrm{Q}_r f(x) = \frac{1}{\mu\left(B_r(x)\right)} \int_{B_r(x)} f\, d\mu. \tag{1.3}$$

Заметим, что $0 < \mu\left(B_r\left(x\right)\right) < \infty$ для всех $x \in X$ и $r > 0$. Оператор Q_r имеет ядро

$$K_r(x, y) = \frac{1}{\mu\left(B_r(x)\right)} \mathbf{1}_{B_r(x)}(y). \tag{1.4}$$

Оно симметрично относительно x, y, потому что $B_r(x) = B_r(y)$ для любого $y \in B_r(x)$. Ясно, что Q_r является марковским оператором на пространстве $\mathcal{B}_b\left(X\right)$ ограниченных борелевских функций на X, т. е. $\mathrm{Q}_r f \geq 0$, если $f \geq 0$ и $\mathrm{Q}_r 1 = 1$. Отсюда следует, что Q_r продолжается до ограниченного самосопряжённого оператора в $L^2\left(X, \mu\right)$.

Выберем функцию σ, удовлетворяющую следующим предположениям:

$$\begin{gathered}\sigma : [0, \infty] \to [0, 1] \text{ — \textit{строго монотонно возрастающая непрерывная слева функция,}}\\ \text{\textit{для которой} } \sigma\left(0+\right) = 0 \text{ \textit{и} } \sigma\left(\infty\right) = 1.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Тогда оператор

$$Pf = \int_0^\infty \mathrm{Q}_r f\, d\sigma(r) \tag{1.6}$$

также является марковским оператором в $\mathcal{B}_b\left(X\right)$, а также ограниченным самосопряжённым оператором в $L^2\left(X, \mu\right)$.

Оператор P определяет марковскую цепь с дискретным временем $\{\mathcal{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на X со следующим правилом перехода: $\mathcal{X}_{n+1}$ является μ-однородно распределённой в $B_r(\mathcal{X}_n)$, где радиус r выбирается случайным образом в соответствии с вероятностным распределением σ. По этой причине мы называем σ *функцией распределения расстояний.*

Заметим, что P определяется тройкой (d, μ, σ). Мы называем P *изотропным марковским* оператором, связанным с (d, μ, σ). Изотропный марковский оператор P обладает некоторыми уникальными свойствами, проистекающими из ультраметрического свойства. Прежде всего имеется простое тождество

$$\mathrm{Q}_r\, \mathrm{Q}_s = \mathrm{Q}_s\, \mathrm{Q}_r = \mathrm{Q}_{\max\{r,s\}}. \tag{1.7}$$

Действительно, для любого шара B радиуса r *любая* точка $x \in B$ является центром B. Поскольку значение $\mathrm{Q}_r f\left(x\right)$ есть среднее значение функции f в B, видим, что $\mathrm{Q}_r f\left(x\right)$ не зависит от $x \in B$; т. е. $\mathrm{Q}_r f = \mathrm{const}$ на B. Теперь, если $s \leq r$, то применение Q_s к $\mathrm{Q}_r f$ не изменяет эту постоянную, откуда получаем $\mathrm{Q}_r \mathrm{Q}_s f = \mathrm{Q}_r f$. С другой стороны, если $s > r$, то любой шар B радиуса s есть объединение конечного числа непересекающихся шаров B_j радиуса r. Тогда $\mathrm{Q}_r f = \mathrm{const}_j$ на B_j, и вычислением в одну строчку получаем $\mathrm{Q}_r \mathrm{Q}_s f = \mathrm{Q}_s f$.

Поскольку $\mathrm{Q}_r^2 = \mathrm{Q}_r$ в силу (1.7), получаем, что Q_r — *ортопроектор*[1] в L^2. В частности, $\operatorname{spec} \mathrm{Q}_r \subset [0, 1]$.

[1]Для сравнения упомянем, что аналогичный усредняющий оператор в $\mathbb{R}^n$ также ограничен и самосопряжён, но имеет непустую отрицательную часть спектра. В частности, он не является ортопроектором.

Из (1.6) следует, что спектральные проекторы в спектральном разложении оператора P являются усредняющими операторами Q_r с точностью до замены переменных (ср. с (2.6)). Тот факт, что спектральные проекторы сами являются марковскими операторами, привносит новое понимание, новые технические возможности и результаты нового типа, которые не имеют аналога в других обычно используемых постановках.

В частности, марковский оператор P неотрицательно определён, что позволяет определить степени P^t для всех $t \geq 0$. Тогда $\{P^t\}_{t\geq 0}$ — симметричная сильно непрерывная марковская полугруппа. Из (1.6) следует, что P^t допускает при $t > 0$ следующее представление:

$$P^t f(x) = \int_0^\infty \mathrm{Q}_r f(x)\, d\sigma^t(r)\,. \tag{1.8}$$

Более элементарным образом можно также *определить* P^t формулой (1.8) и использовать формулу (1.7) для вывода того, что $P^s P^t = P^{s+t}$.

Полугруппа $\{P^t\}_{t\geq 0}$ определяет марковский процесс с непрерывным временем $\{\mathcal{X}_t\}_{t\geq 0}$. Поскольку n-й оператор перехода марковской цепи с дискретным временем $\{\mathcal{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть P^n, видим, что марковская цепь с дискретным временем совпадает с ограничением марковского процесса с непрерывным временем $\{\mathcal{X}_t\}$ на целые значения t. Это позволяет сосредоточиться только на изучении процесса с непрерывным временем $\{\mathcal{X}_t\}_{t\geq 0}$.

Мы называем марковскую полугруппу $\{P^t\}_{t\geq 0}$, определяемую формулами (1.3)-(1.8), *изотропной полугруппой*, а процесс $\{\mathcal{X}_t\}_{t\geq 0}$ *изотропным скачковым процессом*, связанным с тройкой (d, μ, σ).

Кратко опишем содержание настоящей работы, посвящённой изучению изотропных полугрупп.

В § 2 строится изотропная полугруппа, как сказано выше, и приводятся явные формулы для её теплового ядра $p\,(t, x, y)$ (т. е. плотности перехода процесса $\{\mathcal{X}_t\}$). Как указано выше, наш подход основан на наблюдении, что составляющие блоки оператора P, а именно, усредняющие операторы Q_r из (1.3) являются ортогональными проекторами в $L^2(X, \mu)$, что позволяет задействовать на ранней стадии методы спектральной теории и функционального исчисления.

Устанавливаются некоторые основные свойства теплового ядра, например, его непрерывность вне диагонали, и доказываются верхние и нижние оценки в терминах t и $d\,(x, y)$.

Например, в $\mathbb{Q}_p$ с p-адической ультраметрикой $\|x - y\|_p$ и мерой Хаара μ наиболее естественным выбором функции распределения расстояний является

$$\sigma\,(r) = \exp\left(-\left(\frac{p}{r}\right)^\alpha\right) \tag{1.9}$$

при $\alpha > 0$, когда соответствующее тепловое ядро допускает оценку

$$p_t\,(x, y) \simeq \frac{t}{(t^{1/\alpha} + \|x - y\|_p)^{1+\alpha}} \tag{1.10}$$

для всех $t > 0$ и $x, y \in \mathbb{Q}_p$. Заметим, что оценка (1.10) похожа на оценку теплового ядра для симметричного устойчивого процесса в $\mathbb{R}$ индекса α.

Также получены явное выражение для функции Грина изотропной полугруппы и критерий переходности в терминах роста объёма. В отличие от ранее известных критериев переходности (ср. с [41]) наш не предполагает никакой групповой структуры.

В § 3 рассматриваются спектральные свойства *изотропного лапласиана* $\mathcal{L}$, который является (положительно определённым) порождающим изотропной полугруппы. Даётся полное описание спектра, в частности, показывается, что спектр является чисто точечным, и все собственные функции явно перечисляются с помощью ультраметрических шаров. Также показывается, что спектры продолжений $\mathcal{L}$ в пространствах L^p, $1 \le p < \infty$, не зависят от p.

Поразительным свойством изотропного лапласиана $\mathcal{L}$ является то, что для любой возрастающей биекции $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ оператор $\psi(\mathcal{L})$ также является изотропным лапласианом (для другой функции распределения расстояний). В частности, $\mathcal{L}^\alpha$ — изотропный лапласиан для любого $\alpha > 0$. Напомним для сравнения, что для произвольного симметричного марковского порождающего $\mathcal{L}$ оператор $\mathcal{L}^\alpha$ порождает марковскую полугруппу только при $0 < \alpha \le 1$.

В § 4 получены двусторонние оценки моментов марковского процесса $\{\mathcal{X}_t\}$, который является чисто скачковым процессом.

В случае, когда X — локально компактная группа, наши результаты применимы с произвольной мерой Радона μ вместо меры Хаара. Некоторые из вышеупомянутых вопросов особенно чувствительны к выбору меры μ, например, оценки теплового ядра и функции Грина. С другой стороны, спектр лапласиана и оценки скорости отрыва не зависят от μ. Эти величины сильно зависят от выбора ультраметрики d, в то время как собственные функции зависят и от d, и от μ.

В § 5 мы сравниваем наш изотропный лапласиан с другими ранее известными "дифференциальными" операторами в $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_p^n$. Понятие дробной производной $\mathfrak{D}^\alpha$ на функциях на $\mathbb{Q}_p$ было введено В. С. Владимировым [58] с помощью преобразования Фурье в $\mathbb{Q}_p$, которое совпадает с оператором Тайблсона [56], введённым в совершенно другом контексте множителей Рисса на $\mathbb{Q}_p^n$. Мы показываем, что $\mathfrak{D}^\alpha$ совпадает с нашим изотропным лапласианом $\mathcal{L}_\alpha$, связанным с функцией распределения расстояний (1.9). В частности, отсюда следует, что тепловое ядро оператора $\mathfrak{D}^\alpha$ удовлетворяет оценке (1.10). Заметим, что ранее была известна только верхняя оценка для теплового ядра оператора $\mathfrak{D}^\alpha$ (ср. с [40, Ch.4.1, Lemma 4.1]). Мы также даём простое доказательство ранее известной явной формулы для фундаментального решения оператора $\mathfrak{D}^\alpha$.

Используя функциональное исчисление оператора $\mathfrak{D}^1$, мы даём полное описание класса всех инвариантных относительно вращений марковских порождающих на $\mathbb{Q}_p$, который включает изотропные лапласианы, но не исчерпывается ими. Как следствие, мы получаем, что класс всех инвариантных относительно вращений марковских процессов в $\mathbb{Q}_p$ совпадает с классом марковских процессов, построенным С. Албеверио и В. Карвовски [2] путём использования гораздо более сложных технических средств.

Далее мы рассматриваем "дифференциальные" операторы на $\mathbb{Q}_p^n$. p-Адический лапласов оператор Владимирова на $\mathbb{Q}_p^n$ определяется как прямая сумма операторов $\mathfrak{D}^\alpha$, действующих раздельно на каждой координате. Хотя этот оператор не является изотропным лапласианом, его можно изучать в рамках нашей постановки, что даёт простые прямые доказательства многих результатов из [60] без использования анализа Фурье и теории распределений Брюа.

Ещё одно многомерное обобщение оператора $\mathfrak{D}^\alpha$ — это оператор Тайблсона $\mathfrak{T}^\alpha$ в $\mathbb{Q}_p^n$, который определяется с помощью преобразования Фурье в $\mathbb{Q}_p^n$. Мы показываем, что оператор $\mathfrak{T}^{\alpha}$ является изотропным лапласианом, что позволяет получить весьма подробные аналитические результаты.

В § 6 мы используем тот факт, что каждое локально компактное ультраметрическое пространство возникает как граница локально конечного дерева. Используя этот факт, мы связываем случайные блуждания[2] на дереве с изотропными скачковыми процессами на его границе. В недавней работе [37] Дж. Кигами начинает с переходного случайного блуждания типа ближайшего соседа на дереве и строит естественно связанный с ним скачковый процесс на границе дерева: для данной формы Дирихле случайного блуждания на множестве вершин дерева граничный процесс индуцирован формой Дирихле, которая воспроизводит мощность ("энергию") гармонической функции на дереве через её граничные значения. Это аналогично известному интегралу Дугласа [21] на единичном диске. Используя этот подход, Дж. Кигами [37] предпринимает подробный анализ процесса на границе.

Сначала ограничивая наше внимание на компактный случай, в § 7 мы отвечаем на очевидный вопрос о том, как связаны подходы Дж. Кигами и настоящей работы. Связь в основном взаимно-однозначна: каждый граничный процесс, индуцированный случайным блужданием, является изотропным процессом в нашей постановке. Обратно, мы показываем, что с точностью до единственной линейной замены времени каждый изотропный скачковый процесс на границе дерева возникает из однозначно определённого случайного блуждания как процесс из [37]. Дополнительно мы объясняем, как граничный процесс на дереве преобразуется в изотропный скачковый процесс на некомпактном ультраметрическом пространстве, заданном проколотой границей дерева. Это следует сравнить с очень недавней работой [38].

Наконец, в § 8 мы излагаем конкретные примеры p-адической дробной производной на (компактной) группе p-адических целых чисел и соответствующее случайное блуждание на связанном с ней укоренённом дереве, а также случайное блуждание, соответствующее дробной производной на всём $\mathbb{Q}_p$.

Благодарности. Эта работа была начата и закончена в Университете Билифельда при поддержке Специального Исследовательского Отдела (SFB) 701 Немецкого Исследовательского Совета. Авторы благодарят С. Албеверио, Дж. Беллиссарда, П. Диакониса, В. Херфорта, А. Н. Кочубея, С. А. Молчанова, Л. Салоффа-Косте, И. В. Воловича и Е. И. Зеленова за плодотворные обсуждения и ценные замечания.

2 Тепловая полугруппа и тепловое ядро

Повсюду в этой работе (X, d) — ультраметрическое пространство, которое сепарабельно и таково, что все d-шары $B_r(x)$ компактны.

2.1 Усредняющий оператор

Напомним, что для любого $r > 0$

$$\mathrm{Q}_r f(x) = \frac{1}{\mu\left(B_r(x)\right)} \int_{B_r(x)} f \, d\mu$$

[2] Случайные блуждания с дискретным временем типа ближайшего соседа на дереве очень хорошо изучены — см. книгу В. Вёсса [64, Ch. 9]

— ортопроектор в $L^2 \equiv L^2(X,\mu)$ (ср. с (1.3)), и образ оператора Q_r является подпространством $\mathcal{V}_r$ пространства L^2, состоящим из всех функций, принимающих постоянные значения на каждом шаре радиуса r.

Ясно, что семейство $\{\mathcal{V}_r\}_{r>0}$ монотонно убывает относительно включений множеств. Следовательно, существует предел

$$\mathrm{Q}_\infty := s\text{-}\lim_{r\to\infty} \mathrm{Q}_r$$

в сильной операторной топологии, который является ортопроектором на $\mathcal{V}_\infty = \bigcap_{r>0} \mathcal{V}_r$. Значит, $\mathcal{V}_\infty$ состоит из постоянных функций. Если $\mu(X) = \infty$, то $\mathcal{V}_\infty = \{0\}$ и $\mathrm{Q}_\infty = 0$, в то время как в случае $\mu(X) < \infty$ имеем $\dim \mathcal{V}_\infty = 1$ и

$$\mathrm{Q}_\infty f = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu. \tag{2.1}$$

Положим также $\mathrm{Q}_0 := \mathrm{id}$.

Лемма 2.1. *Семейство $\{\mathrm{Q}_r\}_{r\in[0,\infty)}$ ортопроекторов сильно непрерывно справа по r.*

Доказательство. Сначала покажем, что $r \mapsto \mathrm{Q}_r$ сильно непрерывно в $r = 0$, т. е.

$$s\text{-}\lim_{s\to 0+} \mathrm{Q}_s = \mathrm{id}\,. \tag{2.2}$$

Пусть f — непрерывная функция на X с компактным носителем. Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$\mathrm{Q}_s f(x) \to f(x) \quad \text{при } s \to 0.$$

Поскольку семейство $\{\mathrm{Q}_s f\}_{s\in(0,1)}$ равномерно ограничено величиной $\sup|f|$ и имеет равномерно компактные носители, по теореме о мажорируемой сходимости следует, что

$$\|\mathrm{Q}_s f - f\|_{L^2} \to 0 \ \text{ при } s \to 0. \tag{2.3}$$

Поскольку пространство непрерывных функций с компактным носителем всюду плотно в L^2, в силу стандартных рассуждений о приближении соотношение (2.3) распространяется на все $f \in L^2$, откуда следует (2.2).

Далее, докажем, что $r \mapsto \mathrm{Q}_r$ сильно непрерывно справа при любом $r > 0$, т. е.

$$s\text{-}\lim_{s\to r+} \mathrm{Q}_s = \mathrm{Q}_r. \tag{2.4}$$

Достаточно показать, что

$$\|\mathrm{Q}_s f - \mathrm{Q}_r f\|_{L^2} \to 0 \ \text{ при } s \to r+ \tag{2.5}$$

для любой непрерывной функции f с компактным носителем. Действительно, для любого $x \in X$ функция $r \mapsto \mathrm{Q}_r f(x)$ непрерывна справа в силу (1.3), так как шары замкнуты, откуда (2.5) следует по теореме о мажорируемой сходимости. □

Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ положим

$$E_\lambda = \begin{cases} \mathrm{Q}_{1/\lambda}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda \le 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Заметим, что $E_{0+} = \mathrm{Q}_\infty$. Из вышеупомянутых свойств оператора Q_r следует, что семейство $\{E_\lambda\}$ ортопроекторов в L^2 является непрерывной слева спектральной резольвентой. Следовательно, для любой борелевской функции $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ интеграл

$$\int_{[0,\infty)} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda$$

определяет самосопряжённый неотрицательно определённый оператор, который ограничен тогда и только тогда, когда φ ограничена.

2.2 Основные свойства тепловых полугрупп

Теперь рассмотрим оператор P, определённый равенством (1.6) с функцией σ как в (1.5). Заметим, что интеграл в (1.6) сходится в сильной операторной топологии, так как

$$\int_0^\infty \|Q_r f\|_{L^2}\, d\sigma(r) < \infty$$

для любого $f \in L^2$. С другой стороны, для любой $f \in \mathcal{B}_b(X)$ интеграл (1.6) сходится поточечно. Более того, в этом случае функция Pf непрерывна, потому что функция $x \mapsto \int_\varepsilon^\infty \mathrm{Q}_r f(x)\, d\sigma(r)$ для любого $\varepsilon > 0$ локально постоянна и, значит, она непрерывна и равномерно сходится к $Pf(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

Как уже замечалось, P — самосопряжённый оператор в L^2 и $\operatorname{spec} P \subset [0, 1]$. В частности, для любого $t > 0$ корректно определена степень P^t. Положим также $P^0 := \mathrm{id}$. В следующем утверждении собраны основные свойства оператора P^t.

Теорема 2.2. (*a*) *Семейство $\{P^t\}_{t\geq 0}$ является сильно непрерывной симметричной марковской полугруппой на $L^2(X, \mu)$.*

(*b*) *Для любого $t > 0$ оператор P^t имеет представление* (1.8), *т. е.*

$$P^t f = \int_{[0,\infty)} \mathrm{Q}_r f\, d\sigma^t(r)\,.$$

(*c*) *Для любого $t > 0$ оператор P^t допускает интегральное ядро $p(t, x, y)$, т. е. для всех $f \in \mathcal{B}_b$ и $f \in L^2$ выполняется*

$$P^t f(x) = \int_X p(t, x, y) f(y) d\mu(y), \tag{2.7}$$

где $p(t, x, y)$ задаётся равенством

$$p(t, x, y) = \int_{[d(x,y),\infty)} \frac{d\sigma^t(r)}{\mu(B_r(x))}. \tag{2.8}$$

Функция $p(t, x, y)$ называется *тепловым ядром* полугруппы $\{P^t\}$. Из (2.8) ясно, что $p(t, x, y) < \infty$ для всех $t > 0$ и $x \neq y$, в то время как при определённых условиях $p(t, x, x)$ может быть равно ∞.

Для $f \in \mathcal{B}_b$ тождество (2.7) выполняется поточечно, т. е. для всех $x \in X$, в то время как для $f \in L^2$ (2.7) оно является тождеством двух L^2-функций, т. е. оно выполняется для μ-почти всех x.

Доказательство. Интегрированиями по частям из (1.6) получаем, что

$$Pf = \int_{[0,\infty)} \mathrm{Q}_r f \; d\sigma(r) = Q_\infty f - \int_{(0,\infty)} \sigma\,(r)\, d\mathrm{Q}_r f \tag{2.9}$$

для любой $f \in L^2$. Делая замену $\lambda = 1/r$ и используя (2.6), получаем

$$Pf = (E_{0+})\, f + \int_{(0,\infty)} \sigma\,(1/\lambda)\, dE_\lambda f = \int_{[0,\infty)} \sigma\,(1/\lambda)\, dE_\lambda f,$$

используя соглашение $\sigma\,(\infty) = 1$. Отсюда получаем спектральную резольвенту оператора P в следующем виде:

$$P = \int_{[0,\infty)} \sigma\,(1/\lambda)\, dE_\lambda. \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$P^t = \int_{[0,\infty)} \sigma^t\,(1/\lambda)\, dE_\lambda. \tag{2.11}$$

(a) Как замечено во введении, полугрупповое тождество $P^t P^s = P^{t+s}$ является непосредственным следствием из (1.7). Остаётся показать, что

$$s\text{-}\lim_{t\to 0+} P^t = \mathrm{id},$$

что легко следует из (2.11), потому что $\sigma\,(1/\lambda) > 0$ при $\lambda \in [0,\infty)$.

(b) Обращая рассуждение в выводе (2.11) из (2.9), получаем, что (2.11) влечёт

$$P^t f = \int_{[0,\infty)} \mathrm{Q}_r f \; d\sigma^t(r).$$

(c) Из (b), (1.3) и теоремы Фубини следует, что для любой $f \in \mathcal{B}_b$ выполняется

$$\begin{aligned} P^t f\,(x) &= \int_{[0,\infty)} \left(\frac{1}{\mu\,(B_r(x))} \int_X \mathbf{1}_{B_r(x)}\,(y)\, f(y) d\mu(y) \right) d\sigma^t(r) \\ &= \int_X \left(\int_{[d(x,y),\infty)} \frac{1}{\mu\,(B_r(x))} d\sigma^t(r) \right) f(y) d\mu(y) \\ &= \int_X p\,(t,x,y)\, f\,(y)\, d\mu\,(y)\,. \end{aligned}$$

Для $f \in L^2$ это вытекает в силу рассуждения о приближении. □

Замечание 2.3. В доказательстве теоремы 2.2 имеем не использованный в полную силу факт, что σ является *строго* монотонно возрастающей функцией (ср. с (1.5)). Для этой теоремы достаточно предполагать, что σ монотонно возрастает и $\sigma\,(r) > 0$ при $r > 0$.

Замечание 2.4. Если взять (1.8) в качестве определения оператора P^t, то полугрупповое тождество $P^t P^s = P^{t+s}$ можно доказать с помощью (1.7). Действительно, для любых заданных $s, t > 0$ и $f \in L^2$ имеем

$$\begin{aligned} P^s P^t f(x) &= \int_0^\infty d\sigma^s(r) \int_0^\infty d\sigma^t(r')\, \mathrm{Q}_r \mathrm{Q}_{r'} f(x) = \\ &= \int_0^\infty d\sigma^s(r) \int_0^\infty d\sigma^t(r')\, \mathrm{Q}_{\max\{r,r'\}} f(x). \end{aligned}$$

Пусть ξ_1 и ξ_2 — две независимые случайные величины с распределениями σ^s и σ^t соответственно. Тогда распределением случайной величины $\xi = \max\{\xi_1, \xi_2\}$ является σ^{t+s}. Следовательно,

$$P^s P^t f(x) = \mathbb{E}\left(\mathrm{Q}_{\max\{\xi_1,\xi_2\}} f(x)\right) = \int_0^\infty \mathrm{Q}_r f(x)\, d\sigma^{t+s}(r) = P^{t+s} f(x).$$

Следствие 2.5. *Для всех $x, y \in X$ и $t > 0$ имеем $p\,(t,x,y) > 0$,*

$$p\,(t,x,y) = p\,(t,y,x)$$

и

$$p(t,x,y) \le \min\{p(t,x,x), p(t,y,y)\}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Строгая положительность $p\,(t,x,y)$ следует из (2.8) и строгой монотонности σ.

В интеграле в (2.8) имеем $r \ge d\,(x,y)$, откуда следует, что $B_r\,(x) = B_r\,(y)$ и $p\,(t,x,y) = p\,(t,y,x)$. По-другому симметрия теплового ядра также следует из того, что P^t самосопряжён.

В силу (2.8) имеем

$$p(t,x,y) = \int_{[d(x,y),\infty)} \frac{d\sigma^t(r)}{\mu\,(B_r(x))} \le \int_{[0,\infty)} \frac{d\sigma^t(r)}{\mu\,(B_r(x))} = p(t,x,x),$$

откуда следует (2.12). □

Заметим, что в общем случае тепловые ядра лишь удовлетворяют оценке

$$p\,(t,x,y) \le \sqrt{p\,(t,x,x)\, p\,(t,y,y)}.$$

Оценка (2.12), очевидно, сильнее, что отражает особое свойство ультраметрики.

Следствие 2.6. *Для любого $t > 0$ функция*

$$x, y \mapsto \begin{cases} \frac{1}{p(t,x,y)}, & x \ne y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \tag{2.13}$$

является ультраметрикой.

Доказательство. Положим

$$F\,(x,r) = \left(\int_{[r,+\infty)} \frac{d\sigma^t(s)}{\mu\,(B_s(x))}\right)^{-1} \quad \text{при } r > 0,$$

$F\,(x,0) = 0$ и отметим следующие два свойства функции F:

(*a*) $r \mapsto F\,(x,r)$ монотонно возрастает по r;

(*b*) $F\,(x,r) = F\,(y,r)$, как только $r \ge d\,(x,y)$, так как в этом случае $B_s\,(x) = B_s\,(y)$ для всех $s \ge r$.

Для любой функции F с этими свойствами $\rho\,(x,y) := F\,(x, d\,(x,y))$ является ультраметрикой, так как симметрия следует из (*b*), а ультраметрическое неравенство (1.1) следует из (*a*) и (*b*): если $d\,(x,y) \le d\,(x,z)$, то

$$\rho\,(x,y) = F\,(x, d\,(x,y)) \le F\,(x, d\,(x,z)) = \rho\,(x,z)\,,$$

а если $d\,(x,y) \le d\,(y,z)$, то

$$\rho\,(x,y) = F\,(y, d\,(x,y)) \le F\,(y, d\,(y,z)) = \rho\,(y,z)\,.$$

□

2.3 Функция спектрального распределения

Для марковской полугруппы P, связанной с тройкой (d, μ, σ), определим *внутреннюю ультраметрику* d_* равенством

$$\frac{1}{d_*(x,y)} = \log \frac{1}{\sigma(d\,(x,y))}. \tag{2.14}$$

Поскольку d_* выражается в виде строго монотонно возрастающей функции от d, обращающейся в нуль в 0, получаем, что d_* является ультраметрикой на X. Обозначим через $B_r^*(x)$ метрические шары ультраметрики d_*.

Лемма 2.7. *Для любого $r \geq 0$ положим*

$$s = \frac{1}{\log \frac{1}{\sigma(r)}}.$$

Тогда следующее тождество выполняется для всех $x \in X$:

$$B_s^*(x) = B_r(x).$$

Следовательно, метрики d и d_* определяют одно и то же множество шаров и одну и ту же топологию.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} B_s^*(x) &= \{y \in X : d_*(x,y) \leq s\} \\ &= \{y \in X : \sigma\,(d\,(x,y)) \leq \sigma\,(r)\} \\ &= \{y \in X : d\,(x,y) \leq r\} \\ &= B_r\,(x)\,, \end{aligned}$$

где мы использовали тот факт, что σ строго монотонно возрастает. □

Определение 2.8. Для любого $x \in X$ определим *функцию спектрального распределения* $N\,(x, \cdot) : [0\,,\,\infty) \to [0\,,\,\infty)$ как

$$N(x,\tau) = \frac{1}{\mu\left(B_{1/\tau}^*(x)\right)}. \tag{2.15}$$

См. качественные свойства графиков функции $N\,(x, \cdot)$ на рис. 1, 2 и 3.

Рис. 1: График функции $\tau \mapsto N\,(x,\tau)$ в случае, когда $\mu\,(X) < \infty$

Рис. 2: График функции $\tau \mapsto N\,(x,\tau)$ в случае, когда $\mu\,(x) > 0$

Рис. 3: График функции $\tau \mapsto N(x, \tau)$ в случае, когда $\mu(x) = 0$ и $\mu(X) = \infty$

Определим $\sigma_*(r)$ как функцию распределения “обратного экспоненциального распределения”, т. е. положим

$$\sigma_*(r) = \exp\left(-\frac{1}{r}\right), \quad r > 0. \tag{2.16}$$

Как функция распределения расстояний, в дальнейшем σ_* будет играть важную роль.

Определение 2.9. Изотропный марковский оператор P, связанный с тройкой (d, μ, σ_*), будем называть *стандартным* марковским оператором, связанным с (d, μ).

Теорема 2.10. *Пусть d_* и σ_* определены равенствами* (2.14) *и* (2.16).

(*a*) *Тройки (d, μ, σ) и (d_*, μ, σ_*) индуцируют одинаковые изотропные марковские операторы.*

(*b*) *Тепловое ядро $p(t, x, y)$, связанное с тройкой (d, μ, σ), для всех $x, y \in X$ и $t > 0$ удовлетворяет следующим тождествам:*

$$p(t, x, y) = \int_0^{t/d_*(x,y)} N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds \tag{2.17}$$

и

$$p(t, x, y) = t \int_0^{1/d_*(x,y)} N(x, \tau) \exp(-\tau t)\, d\tau. \tag{2.18}$$

Следовательно, $p(t, x, y)$ — конечная непрерывная функция от t, x, y для всех $t > 0$ и $x \neq y$.

Как следует из (*a*), любой изотропный марковский оператор является в то же время стандартным марковским оператором, связанным с (d_*, μ).

Доказательство. (*a*) Достаточно показать, что

$$p(t, x, y) = \int_{[d_*(x,y),\infty)} \frac{d\sigma_*^t(u)}{\mu(B_u^*(x))}, \tag{2.19}$$

где по теореме 2.2 правая часть представляет собой тепловое ядро, связанное с тройкой (d_*, μ, σ_*). Рассмотрим функцию

$$u(r) = \frac{1}{\log \frac{1}{\sigma(r)}}, \quad r \in [0, \infty)$$

и заметим, что

1. $u(d(x, y)) = d_*(x, y), \quad u(\infty) = \infty;$

2. $\sigma_*\left(u\left(r\right)\right)=\exp\left(-\frac{1}{u(r)}\right)=\sigma\left(r\right);$

3. $B^*_{u(r)}\left(x\right)=B_r\left(x\right)$ в силу леммы 2.7.

Делая замену $u=u\left(r\right)$ в интеграле в (2.19), получаем

$$\int_{[d_*(x,y),\infty)}\frac{d\sigma^t_*\left(u\right)}{\mu\left(B^*_u\left(x\right)\right)}=\int_{[d(x,y),\infty)}\frac{d\sigma^t\left(r\right)}{\mu\left(B_r\left(x\right)\right)},$$

что вместе с (2.8) влечёт (2.19). Ясно, что (2.20) следует из (2.17), так как $d_*\left(x,x\right)=0$.

(b) Замена $s=t/u$ в (2.19) даёт

$$\begin{aligned}p\left(t,x,y\right) &= \int_{[d_*(x,y),\infty)}\frac{d\exp\left(-\frac{t}{u}\right)}{\mu\left(B^*_u\left(x\right)\right)}\\ &= \int_{t/d_*(x,y)}^{0}\frac{de^{-s}}{\mu\left(B^*_{t/s}\left(x\right)\right)}\\ &= \int_0^{t/d_*(x,y)}N\left(x,\frac{s}{t}\right)e^{-s}ds\end{aligned}$$

что доказывает (2.17). Ещё одна замена $s=t\tau$ преобразует (2.17) в (2.18). □

В случае $x=y$ из (2.17) и (2.18) получаем

$$p(t,x,x)=\int_0^\infty N\left(x,\frac{s}{t}\right)e^{-s}ds=t\int_0^\infty N(x,\tau)\exp(-\tau t)\,d\tau. \tag{2.20}$$

В зависимости от функции $N\left(x,\tau\right)$ диагональное значение $p\left(t,x,x\right)$ может быть равно ∞. Для любого $x\in X$ положим

$$T\left(x\right):=\limsup_{\tau\to\infty}\frac{\log N(x,\tau)}{\tau}\,. \tag{2.21}$$

Следствие 2.11. *Функция $t\mapsto p\left(t,x,x\right)$ монотонно убывает и $p(t,x,x)<\infty$ для всех $t>T\left(x\right)$.*

Доказательство. Монотонность функции $p\left(t,x,x\right)$ следует из первого тождества в (2.20), в то время как второе утверждение следует из второго тождества в (2.20). Заметим также, что если $\lim_{\tau\to\infty}\frac{\log N(x,\tau)}{\tau}$ существует и потому равен $T\left(x\right)$, то $p\left(t,x,x\right)=\infty$ при $t<T\left(x\right)$. □

Предложение 2.12. *Предположим, что $T(x)<\infty$ для некоторого $x\in X$.*

(a) *Для всех $y\in X$*

$$\lim_{t\to\infty}p(t,x,y)=\frac{1}{\mu(X)},$$

где сходимость локально равномерна по $y\in X$.

(*b*) *Для всех* $y \in X$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t,x,y)}{p(t,x,x)} = 1,$$

где сходимость локально равномерна по $y \in X$.

Доказательство. (a) При $t \to \infty$ имеем

$$N\left(x, \frac{s}{t}\right) \to N(x,0) = \frac{1}{\mu(X)}$$

и $t/d_*(x,y) \to \infty$. Отсюда и из (2.17) получим

$$\lim_{t\to\infty} p(t,x,y) = \int_0^\infty \frac{1}{\mu(X)} e^{-s} ds = \frac{1}{\mu(X)},$$

как только покажем, что интеграл и предел перестановочны. Последнее следует из теоремы о мажорируемой сходимости, потому что условие $T(x) < \infty$ влечёт, что для некоторых $A, a > 0$ и всех $\tau > 0$

$$N(x,\tau) \le A\exp(a\tau), \tag{2.22}$$

откуда

$$N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} \le A\exp\left(\left(\frac{a}{t} - 1\right)s\right) \le A\exp\left(-\frac{1}{2}s\right) \tag{2.23}$$

при $t > 2a$, так что условие мажорирования выполнено.

(b) Положим $r = d_*(x,y)$. Из (2.17) и (2.20) следует, что

$$p(t,x,x) - p(t,x,y) = \int_{t/r}^\infty N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds.$$

Считая, что $t > 2a$ и применяя (2.23), получаем

$$p(t,x,x) - p(t,x,y) \le A\int_{t/r}^\infty e^{-\frac{1}{2}s} ds = 2A\exp\left(-\frac{t}{2r}\right),$$

в то время как

$$p(t,x,x) \ge \int_{\frac{t}{4r}}^\infty N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds \ge N\left(x, \frac{1}{4r}\right)\exp\left(-\frac{t}{4r}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{p(t,x,x) - p(t,x,y)}{p(t,x,x)} \le \frac{2A\exp\left(-\frac{t}{4r}\right)}{N\left(x, \frac{1}{4r}\right)} \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

$\square$

2.4 Оценки теплового ядра

Целью этого пункта является получение некоторых оценок изотропного теплового ядра. Напомним, что

$$p(t,x,y) = \int_0^{t/d_*(x,y)} N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} ds \tag{2.24}$$

по теореме 2.10.

Определение 2.13. Будем говорить, что монотонно возрастающая функция $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют *удваивающему свойству*, если существует такая постоянная $D > 0$, что

$$\Phi(2s) \leq D\Phi(s) \quad \text{для всех } s > 0.$$

Известно (теорема Поттера), что если Φ удваивающая, то

$$\Phi(s_2) \leq D\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^{\gamma} \Phi(s_1) \quad \text{для всех } 0 < s_1 < s_2\,, \text{ где } \gamma = \log_2 D. \tag{2.25}$$

Теорема 2.14. *Предположим, что для некоторого $x \in X$ функция $\tau \mapsto N(x,\tau)$ удваивающая. Тогда*

$$\frac{c\,t}{t + d_*(x,y)}\, N\left(x, \frac{1}{t + d_*(x,y)}\right) \leq p(t,x,y) \leq \frac{C\,t}{t + d_*(x,y)}\, N\left(x, \frac{1}{t + d_*(x,y)}\right) \tag{2.26}$$

для всех $t > 0$, $y \in X$ и некоторых постоянных $C, c > 0$, зависящих от постоянной удваивания.

В дальнейшем мы будем использовать отношение $f \simeq g$ между двумя положительными функциями f, g, которое означает, что дробь f/g ограничена сверху и снизу положительными постоянными для указанной области значений переменных. В частности, мы можем коротко записать (2.26) в виде

$$p\,(t,x,y) \simeq \frac{t}{t + d_*(x,y)}\, N\left(x, \frac{1}{t + d_*(x,y)}\right) \tag{2.27}$$

для фиксированного x и всех $y \in X$ и $t > 0$.

Пример 2.15. Предположим, что для некоторых $x \in X$ и $\alpha > 0$ выполняется

$$N\,(x,\tau) \simeq \tau^{\alpha} \quad \text{для всех } \tau > 0.$$

Тогда в силу (2.27) имеем

$$p(t,x,y) \simeq \frac{t}{(t + d_*(x,y))^{1+\alpha}} \simeq \frac{t}{(t^2 + d_*(x,y)^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}},$$

т. е. $p\,(t,x,y)$ ведёт себя как распределение Коши в “α-мерном” пространстве.

Пример 2.16. Более общо, предположим, что для некоторых $\alpha, \beta \geq 0$ выполняется

$$N(x,\tau) \simeq \begin{cases} \tau^{\alpha}, & 0<\tau\leq 1, \\ \tau^{\beta}, & \tau>1. \end{cases} \tag{2.28}$$

Тогда в силу (2.27) получаем

$$p(t,x,y) \simeq \begin{cases} \dfrac{t}{(t+d_*(x,y))^{1+\beta}}, & t+d_*(x,y)\leq 1, \\ \dfrac{t}{(t+d_*(x,y))^{1+\alpha}}, & t+d_*(x,y)>1. \end{cases} \tag{2.29}$$

Например, пусть X — дискретная локально конечная группа, например, $X=\bigoplus_{k=1}^{\infty}\mathbb{Z}\,(n_k)$, а μ — мера Хаара, нормированная к $\mu\,(x)=1$. С дискретной ультраметрикой получаем в силу (2.15), что $N\,(x,\tau)\simeq 1$ для достаточно больших τ. Дополнительно предполагая, что

$$N\,(x,\tau)\simeq\tau^{\alpha} \text{ для малых } \tau,$$

видим, что (2.28), а потому и (2.29) выполняются с $\beta=0$ (ср. с [13]).

Пример 2.17. Предположим, что функция $\tau\mapsto N\,(x,\tau)$ удваивающая и для некоторого $\alpha>0$ выполняется

$$N\,(x,\tau)\simeq\left(\log\frac{1}{\tau}\right)^{-\alpha} \quad \text{при } \tau<\frac{1}{2}.$$

Тогда в силу (2.27) имеем

$$p\,(t,x,y)\simeq\frac{t}{(t+d_*(x,y))\log^{\alpha}(t+d_*\,(x,y))},$$

как только $t+d_*\,(x,y)>2$.

Пример 2.18. Предположим, что для некоторого $\alpha>0$ выполняется

$$N\,(x,\tau)\simeq\exp\left(-\tau^{-\alpha}\right).$$

В этом случае теорема 2.14 не применима. Непосредственная оценка интеграла в (2.24) даёт в этом случае

$$p\,(t,x,y)\leq\frac{C_3 t}{t+d_*\,(x,y)}\exp\left(-c_3\left(t^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}+d_*\,(x,y)^{\alpha}\right)\right)$$

и

$$p\,(t,x,y)\geq\frac{C_4 t}{t+d_*\,(x,y)}\exp\left(-c_4\left(t^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}+d_*\,(x,y)^{\alpha}\right)\right),$$

для всех $x,y\in X$, $t>0$ и некоторых положительных постоянных C_3,C_4,c_3,c_4.

Для доказательства теоремы 2.14 нам нужна серия лемм.

Лемма 2.19. *Для всех $x,y\in X$ и $t>0$ выполняются следующие оценки:*

(a)
$$p(t,x,y) \le \frac{t}{d_*(x,y)}\, N\left(x, \frac{1}{d_*(x,y)}\right); \tag{2.30}$$

(b)
$$p(t,x,y) \ge \frac{1}{2e}\begin{cases} \dfrac{t}{d_*(x,y)}\, N\left(x, \dfrac{1}{2d_*(x,y)}\right), & t \le d_*(x,y)\,, \\ N\left(x, \dfrac{1}{2t}\right), & t \ge d_*(x,y)\,; \end{cases} \tag{2.31}$$

(c)
$$p(t,x,x) \ge \frac{1}{e} N\left(x, \frac{1}{t}\right). \tag{2.32}$$

Доказательство. (a) Неравенство (2.30) следует из (2.24) в силу монотонности функции $\tau \mapsto N(x,\tau)$, которая даёт
$$N\left(x, \frac{s}{t}\right) e^{-s} \le N\left(x, \frac{1}{d_*(x,y)}\right).$$

(b) Положим $a = \min\left(1, \frac{t}{d_*(x,y)}\right)$. Из (2.24) следует, что
$$p(t,x,y) \ge \int_{a/2}^{a} N(x, \frac{s}{t}) e^{-s}\, ds \ge N\left(x, \frac{a}{2t}\right)\frac{a}{2e},$$
что равносильно (2.31).

(c) В силу (2.20) имеем
$$p(t,x,x) \ge \int_1^\infty N(x, \frac{s}{t}) e^{-s} ds \ge N\left(x, \frac{1}{t}\right)\int_1^\infty e^{-s} ds,$$
откуда следует (2.32). □

Лемма 2.20. *Следующие неравенства выполняются для всех $x, y \in X$ и $t > 0$:*
$$p(t,x,y) \ge \frac{1}{2e}\,\frac{t}{t + d_*(x,y)}\, N\left(x, \frac{1}{2\,(t + d_*(x,y))}\right), \tag{2.33}$$
и
$$p(t,x,y) \le 2e\,\frac{t}{t + d_*(x,y)}\, p\left(\frac{t + d_*(x,y)}{2}, x, x\right). \tag{2.34}$$

Доказательство. Нижняя оценка (2.33) сразу следует из (2.31). Чтобы доказать (2.34), заметим, что в силу (2.30) и (2.32) выполняется
$$p\,(t,x,y) \le e\,\frac{t}{d_*(x,y)}\, p\,(d_*(x,y), x, x)\,,$$
что даёт (2.34) в случае $t \le d_*(x,y)$, так как функция $p(\cdot, x, x)$ монотонно убывает. В случае $t > d_*(x,y)$ неравенство (2.34) тривиально следует из (2.12), т. е. из
$$p\,(t,x,y) \le p\,(t,x,x)\,,$$
снова с использованием монотонности $p(\cdot, x, x)$. □

Лемма 2.21. *Для любого заданного $x \in X$ следующие два свойства равносильны.*

(i) *Для некоторой постоянной C и всех $t > 0$ выполняется*

$$p(t,x,x) \le CN\left(x, \frac{1}{t}\right). \tag{2.35}$$

(ii) *Функция $\tau \mapsto N(x,\tau)$ удваивающая, т. е. для некоторой постоянной D выполняется*

$$N(x, 2\tau) \le DN(x, \tau.)$$

Доказательство. $(ii) \Rightarrow (i)$. Оценка (2.35) вытекает из (2.20) и (2.25) следующим образом:

$$\begin{aligned} p(t,x,x) &= N\left(x,\frac{1}{t}\right)\int_0^\infty \frac{N\left(x,\frac{s}{t}\right)}{N\left(x,\frac{1}{t}\right)} e^{-s}ds \\ &\le DN\left(x,\frac{1}{t}\right)\int_0^\infty \max\{1, s^\gamma\} e^{-s}ds \\ &= CN\left(x,\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Из верхней оценки (2.35) следует, что для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} CN\left(x,\frac{1}{t}\right) &\ge p(t,x,x) \ge \int_2^\infty N(x,\frac{s}{t})e^{-s}ds \\ &\ge e^{-2}N\left(x,\frac{2}{t}\right), \end{aligned}$$

откуда вытекает удваивающее свойство функции $N(x,\cdot)$. $\square$

Доказательство теоремы 2.14. Нижняя оценка в (2.26) следует из (2.33), верхняя оценка следует из (2.34) и (2.35). $\square$

В заключение этого параграфа дадим практические условия для справедливости удваивающего свойства функции $N(x,\cdot)$.

Определение 2.22. Будем говорить, что монотонно возрастающая функция $\Psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют *обратному удваивающему свойству*, если имеется такая постоянная $\delta \in (0,1)$, что для всех $r > 0$ выполняется

$$\Psi(r) \ge 2\Psi(\delta r).$$

Предложение 2.23. *Зафиксируем некоторое $x \in X$. Функция $\tau \mapsto N(x,\tau)$ удваивающая, если выполняются следующие два условия:*

(i) *Функция $\Psi(r) = -1/\log\sigma(r)$ удовлетворяет обратному удваивающему свойству.*

(ii) *Функция объёма $r \mapsto \mu(B_r(x))$ удовлетворяет удваивающему свойству.*

Доказательство. Мы используем следующие сокращённые обозначения для шаров с центром в x: $B_r = B_r(x)$ и $B_r^* = B_r^*(x)$. Из определения 2.8 функции спектрального распределения следует, что функция $\tau \mapsto N(x,\tau)$ удваивающая тогда и только тогда, когда функция $s \mapsto \mu(B_s^*)$ удваивающая. Положим $\Phi = \Psi^{-1}$ и заметим, что обратное удваивающее свойство для Ψ равносильно удваивающему свойству для Φ. В силу леммы 2.7 имеем $B^*_{\Psi(r)} = B_r$, откуда следует, что $B_s^* = B_{\Phi(s)}$. Используя условия (ii) и (2.25) для функции $\mu(B_r)$, получаем

$$\mu\left(B_{2s}^*\right) = \mu\left(B_{\Phi(2s)}\right) \le D\left(\frac{\Phi(2s)}{\Phi(s)}\right)^{\gamma} \mu\left(B_{\Phi(s)}\right) \le \mathrm{const}\,\mu\left(B_s^*\right),$$

что и требовалось доказать. □

2.5 Тепловые ядра в $\mathbb{Q}_p$

Для данного простого числа p, p-адическая норма на $\mathbb{Q}$ определяется так: если $x = p^n \frac{a}{b}$, где a, b — целые числа, не делящиеся на p, то

$$\|x\|_p := p^{-n}.$$

Если $x = 0$, то $\|x\|_p := 0$. p-Адическая норма на $\mathbb{Q}$ удовлетворяет ультраметрическому неравенству. Действительно, если $y = p^m \frac{c}{d}$ и $m \le n$, то

$$x + y = p^m\left(\frac{p^{n-m}a}{b} + \frac{c}{d}\right),$$

откуда

$$\|x+y\|_p \le p^{-m} = \max\left\{\|x\|_p, \|y\|_p\right\}.$$

Отсюда следует, что $\mathbb{Q}$ с метрикой $d(x,y) = \|x-y\|_p$ является ультраметрическим пространством, и таковым же является его пополнение $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел.

Каждое p-адическое число x имеет представление

$$x = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k p^k = ...a_k...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}...a_{-N}, \tag{2.36}$$

где $N \in \mathbb{N}$, а $a_k \in \{0, \dots, p-1\}$ — p-адические цифры. Рациональное число $0.a_{-1}...a_{-N} = \sum_{k=-N}^{k=-1} a_k p^k$ называется дробной частью x, а остальное, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$, — целой частью x.

Для любого $n \in \mathbb{Z}$ d-шар $B_{p^{-n}}(x)$ состоит из всех таких чисел

$$y = \sum_{k=-N}^{\infty} b_k p^k = ...b_k...b_2b_1b_0.b_{-1}b_{-2}...b_{-N},$$

что b_k произвольны при $k \ge n$ и $b_k = a_k$ при $k < n$. Следовательно, $B_{p^{-n}}(x)$ разлагается в объединение p непересекающихся шаров радиусов $p^{-(n+1)}$ в зависимости от выбора b_n.

Например, $B_1(0)$ совпадает с множеством $\mathbb{Z}_p$ всех целых p-адических чисел, т. е. любое $y \in B_1(0)$ имеет вид

$$y = ...b_k...b_2b_1b_0$$

с произвольными p-адическими цифрами b_k. Для любого фиксированного $c = 0, 1, ..., p-1$ дополнительное ограничение $b_0 = c$ определяет шар радиуса $1/p$ с центром в c, так что $B_1(0)$ является объединением p таких непересекающихся шаров, как на следующей диаграмме, где каждая клетка изображает один из шаров $B_{1/p}(c)$:

$...b_k...b_2b_1 0$	$...b_k...b_2b_1 1$	...	$...b_k...b_2b_1 (p-1)$

Пусть μ — аддитивная мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$ нормированная так, что $\mu(B_1(0)) = 1$. Поскольку

$$B_r(x) = x + B_r(0)$$

и μ инвариантна относительно сдвигов, получаем, что $\mu(B_r(x))$ не зависит от x. Вышеприведённое рассуждение с разложением шара $B_{p^{-n}}(x)$ показывает, что

$$\mu(B_{p^{-n}}(x)) = p\mu\left(B_{p^{-(n+1)}}(x)\right),$$

откуда следует, что

$$\mu(B_{p^{-n}}(x)) = p^{-n}. \tag{2.37}$$

Для любого $r > 0$ шар $B_r(x)$ совпадает с $B_{p^{-n}}(x)$, где $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $p^{-n} \le r < p^{-(n-1)}$, откуда следует, что для всех $r > 0$ выполняется

$$r/p < \mu(B_r(x)) \le r. \tag{2.38}$$

Пример 2.24. Пусть (X, d, μ) будет $\mathbb{Q}_p$ с p-адическим расстоянием и мерой Хаара μ. Рассмотрим функцию распределения расстояний

$$\sigma(r) = \exp\left(-(b/r)^\alpha\right),$$

где $\alpha, b > 0$. Поскольку

$$\Psi(r) := \frac{1}{\log\frac{1}{\sigma(r)}} = (r/b)^\alpha,$$

в силу (2.14) получаем

$$d_*(x,y) = \Psi(d(x,y)) = \left(\frac{\|x-y\|_p}{b}\right)^\alpha. \tag{2.39}$$

В силу леммы 2.7 имеем

$$B_s^*(x) = B_{\Psi^{-1}(s)}(x),$$

что вместе с (2.38) даёт

$$\mu(B_s^*(x)) \simeq s^{1/\alpha}. \tag{2.40}$$

Следовательно, получаем

$$N(x,\tau) \simeq \tau^{1/\alpha}.$$

Поскольку эта функция удваивающая, теорема 2.14 (ср. также с примером 2.15) даёт оценку

$$p(t,x,y) \simeq \frac{t}{(t + d_*(x,y))^{1+1/\alpha}} \simeq \frac{t}{(t^{1/\alpha} + \|x-y\|_p)^{1+\alpha}}.$$

В частности, для всех $t > 0$ и $x \in X$ имеем

$$p(t,x,x) \simeq t^{1/\alpha}.$$

Пример 2.25. Пусть $X = \mathbb{Z}_p$, т. е. X — единичный шар $B_1(0)$ в $\mathbb{Q}_p$ с p-адическим расстоянием и мерой Хаара μ. Рассмотрим функцию распределения расстояний

$$\sigma(r) = \exp\left(1 - \exp r^{-\alpha}\right)$$

для некоторого $\alpha > 0$. Поскольку при $r \leq 1$ имеем

$$\Psi(r) := \frac{1}{\log \frac{1}{\sigma(r)}} = \frac{1}{\exp r^{-\alpha} - 1} \simeq \exp\left(-r^{-\alpha}\right),$$

получаем, что

$$d_*(x,y) = \Psi\left(d(x,y)\right) \simeq \exp\left(-\|x-y\|_p^{-\alpha}\right).$$

В силу (2.38) и леммы 2.7 для всех $s \leq \frac{1}{2}$ имеем

$$\mu\left(B_s^*(x)\right) = \mu\left(B_{\Psi^{-1}(s)}(x)\right) \simeq \Psi^{-1}(s) \simeq \frac{1}{\log^{1/\alpha} \frac{1}{s}},$$

в то время как при $s > \frac{1}{2}$ имеем $\mu\left(B_s^*(x)\right) \simeq 1$. Поэтому получаем для всех $\tau > 0$

$$N(x,\tau) = \frac{1}{\mu\left(B_{1/\tau}^*(x)\right)} \simeq \log^{1/\alpha}(2+\tau).$$

Отсюда следует, что функция $N(x,\tau)$ удваивающая, и мы получаем в силу (2.27), что

$$p(t,x,y) \simeq \frac{t}{t + \exp\left(-\|x-y\|_p^{-\alpha}\right)} \log^{1/\alpha}\left(2 + \frac{1}{t + \exp\left(-\|x-y\|_p^{-\alpha}\right)}\right).$$

Пример 2.26. Пусть X — подмножество из $\mathbb{Q}_p$, состоящее из всех p-адических дробей, т. е. чисел вида $x = 0.a_{-1} \ldots a_{-N}$. Тогда p-адическое расстояние d на X принимает только целые значения, так что (X,d) — дискретное пространство. Пусть μ — считающая мера на X, т. е. $\mu(x) = 1$ для любого $x \in X$. Рассмотрим следующую функцию распределения расстояний:

$$\sigma(r) = \exp\left(-\frac{1}{\log^{\alpha}(2r)}\right) \quad \text{при } r \geq 1, \tag{2.41}$$

которая произвольным образом продолжена на $r < 1$ так, чтобы быть строго монотонно возрастающей и удовлетворять $\sigma(0) = 0$. Поскольку

$$\Psi(r) := \frac{1}{\log \frac{1}{\sigma(r)}} = \log^{\alpha}(2r) \quad \text{при } r \geq 1,$$

при $x \neq y$ получаем

$$d_*(x,y) = \Psi\left(d(x,y)\right) = \log^{\alpha}\left(2\|x-y\|_p\right). \tag{2.42}$$

При $s \geq s_0 := \log^{\alpha} 2$ имеем

$$\mu\left(B_s^*(x)\right) = \mu\left(B_{\Psi^{-1}(s)}(x)\right) \simeq \Psi^{-1}(s) = \frac{1}{2}\exp\left(s^{1/\alpha}\right), \tag{2.43}$$

в то время как при $s < s_0$ имеем $\mu\left(B_s^*(x)\right) \simeq \mu(x) = 1$. Видим, что (2.43) выполняется для всех $s > 0$. Следовательно, для всех $\tau > 0$ выполняется

$$N(x,\tau) = \frac{1}{\mu\left(B_{1/\tau}^*(x)\right)} \simeq \exp\left(-\tau^{-1/\alpha}\right). \tag{2.44}$$

В силу примера 2.18 получаем

$$p(t,x,y) \le \frac{Ct}{t + \log_+^\alpha\left(2\|x-y\|_p\right)} \exp\left(-c\left(t^{\frac{1}{\alpha+1}} + \log_+\left(2\|x-y\|_p\right)\right)\right),$$

а также аналогичную нижнюю оценку.

2.6 Функция Грина и переходность

Для заданной изотропной тепловой полугруппы $\{P_t\}$ определим оператор Грина G на неотрицательных борелевских функциях f на X формулой

$$Gf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\,dt.$$

Конечно, значение $Gf(x)$ может быть равна ∞. По теореме Фубини получаем

$$Gf(x) = \int_X g(x,y) f(y)\,d\mu(y)$$

где

$$g(x,y) = \int_0^\infty p(t,x,y)\,dt.$$

Подставляя тепловое ядро из (2.18) и снова используя теорему Фубини, получаем

$$g(x,y) = \int_0^{1/d_*(x,y)} \frac{N(x,\tau)\,d\tau}{\tau^2} = \int_{d_*(x,y)}^\infty \frac{ds}{\mu\left(B_s^*(x)\right)}, \tag{2.45}$$

где второе тождество следует из (2.15). Функция $g(x,y)$ называется *функцией Грина* полугруппы $\{P_t\}$. Заметим, что функция Грина может быть тождественно равна ∞. Например, это так, когда $\mu(X) < \infty$ (ср. с рис. 1) и второй интеграл в (2.45) расходится на ∞.

Определение 2.27. Процесс $\{X_t\}$ и полугруппа $\{P^t\}$ называются *переходными*, если Gf — ограниченная функция, как только f ограничена и имеет компактный носитель, и *возвратными* в противном случае.

Теорема 2.28. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *полугруппа $\{P^t\}$ является переходной;*

(ii) $g(x,y) < \infty$ *для некоторых/всех различных $x, y \in X$;*

(iii) *для некоторого/всех* $x \in X$ *выполняется*

$$\int^{\infty} \frac{ds}{\mu\left(B_s^*\left(x\right)\right)} < \infty. \tag{2.46}$$

Неравенство (2.46) равносильно неравенству

$$\int_0 \frac{N(x,\tau)\,d\tau}{\tau^2} < \infty\,. \tag{2.47}$$

Заметим, что в переходном случае функция $x, y \mapsto \frac{1}{g(x,y)}$ определяет ультраметрику на X, что доказывается аналогично следствию 2.6.

Доказательство. Справедливость условия (2.46) не зависит от выбора x, потому что для любых двух $x, x' \in X$ шары $B_s^*\left(x\right)$ и $B_s^*\left(x'\right)$ совпадают, как только $s \geq d\left(x, x'\right)$. Ясно, что конечность второго интеграла в (2.45) при $x \neq y$ равносильна (2.46), откуда следует эквивалентность $(ii) \Leftrightarrow (iii)$, причём со всеми комбинациями вариантов некоторых/всех.

Ясно, что из конечности Gf для любой ограниченной функции f с компактным носителем вытекает, что $g\left(x,y\right) \not\equiv \infty$, т. е. $(i) \Rightarrow (ii)$. Итак, остаётся доказать импликацию $(iii) \Rightarrow (i)$. Достаточно показать, что Gf ограничена для $f = \mathbf{1}_A$, где A — ограниченное борелевское подмножество из X. Пусть R — диаметр множества A относительно расстояния d^*. Тогда имеем $A \subset B_R^*\left(x\right)$ для любого $x \in A$, откуда в силу (2.45) получаем

$$\begin{aligned}
Gf\left(x\right) &= \int_A g\left(x,y\right)d\mu\left(y\right) \leq \int_{B_R^*(x)} g\left(x,y\right)d\mu\left(y\right) \\
&= \int_{B_R^*(x)} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[d_*(x,y),\infty)}\left(s\right) \frac{ds}{\mu\left(B_s^*\left(x\right)\right)} d\mu\left(y\right) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu\left(B_s^*\left(x\right)\right)} \left(\int_{B_R^*(x)} \mathbf{1}_{[0,s]}\left(d_*\left(x,y\right)\right) d\mu\left(y\right) \right) ds \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu\left(B_s^*\left(x\right)\right)} \mu\left(B_R^*\left(x\right) \cap B_s^*\left(x\right)\right) ds.
\end{aligned}$$

Для $s \geq R$ подынтегральная функция равна $\frac{1}{\mu(B_s^*(x))}\mu\left(B_R^*\left(x\right)\right)$, так что сходимость на ∞ следует из (2.46). Ясно, что сходимость равномерна по $x \in A$, потому что $\mu\left(B_R^*\left(x\right)\right)$ и $\mu\left(B_s^*\left(x\right)\right)$ не зависят от $x \in A$ при $s \geq R$. Для $s \leq R$ подынтегральная функция равна

$$\frac{1}{\mu\left(B_s^*\left(x\right)\right)} \mu\left(B_s^*\left(x\right)\right) = 1,$$

откуда следует равномерная сходимость в 0. Отсюда следует, что $\sup_A Gf\left(x\right) < \infty$. То, что $\sup_X Gf\left(x\right) < \infty$, следует из затухания $g\left(x,y\right)$ относительно $d_*\left(x,y\right)$. $\square$

Отметим, что если X — локально конечная группа с мерой Хаара μ, то критерий переходности (iii) теоремы 2.28 совпадает с общим достаточным условием переходности из [41].

Теперь дадим некоторые оценки функции Грина. Положим

$$V(x,r) = \mu\left(B_r^*(x)\right). \tag{2.48}$$

Теорема 2.29. *Предположим, что существуют такие постоянные* $1 < c < c' < c''$, *что для всех* $r > r_0 \geq 0$ *и некоторого* $x \in X$ *выполняется*

$$c' \leq \frac{V(x, cr)}{V(x, r)} \leq c''. \tag{2.49}$$

Тогда полугруппа $\{P_t\}$ *переходная, и для всех* $y \in X$, *для которых* $r := d^* (x, y) > r_0$, *имеем*

$$g(x, y) \simeq \frac{r}{V(x, r)}.$$

Заметим, что условие $\frac{V(x,cr)}{V(x,r)} \leq c''$ равносильно удваивающему свойству функции $r \mapsto V(x, r)$ (ср. с определением 2.13), в то время как условие $\frac{V(x,cr)}{V(x,r)} \geq c'$ при $c' > c$ несколько сильнее обратного удваивающего свойства (ср. с определением 2.22). Например, (2.49) выполняется при $V(x, r) \simeq r^\alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Доказательство. Для простоты обозначений положим $V(s) := V(x, s)$. При $r > r_0$ имеем

$$g(x, y) = \int_r^\infty \frac{ds}{V(s)} = \sum_{k=0}^\infty \int_{c^k r}^{c^{k+1} r} \frac{ds}{V(s)} = \sum_{k=0}^\infty c^k \int_r^{cr} \frac{ds}{V(c^k s)}.$$

Используя нижнюю оценку в (2.49), получаем

$$\int_r^\infty \frac{ds}{V(s)} \leq \sum_{k=0}^\infty c^k \int_r^{cr} \frac{(c')^{-k} ds}{V(s)} \leq \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{c}{c'}\right)^k \frac{cr}{V(r)} \leq \text{const} \frac{r}{V(r)},$$

где ряд сходится благодаря условию $c' > c$. Аналогично, используя верхнюю оценку в (2.49), получаем

$$\int_r^\infty \frac{ds}{V(s)} \geq \int_r^{cr} \frac{ds}{V(s)} \geq \frac{(c-1) r}{V(cr)} \geq \text{const} \frac{r}{V(r)},$$

что завершает доказательство. □

Пример 2.30. Пусть (X, d, μ) и σ — такие, как в примере 2.24, т. е. $X = \mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел с ультраметрикой $d(x, y) = \|x - y\|_p$, а $\sigma(r) = \exp(-(b/r)^\alpha)$. Тогда в силу (2.39) имеем

$$d_* (x, y) = \text{const} \|x - y\|_p^\alpha,$$

а в силу (2.40) имеем

$$V(x, r) \simeq r^{1/\alpha}.$$

Поэтому по теореме 2.28 полугруппа $\{P^t\}$ будет переходной тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$. Более того, условие (2.49) также выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$, и в этом случае мы получаем по теореме 2.29, что для всех x, y выполняется

$$g(x, y) \simeq d_* (x, y)^{1 - \frac{1}{\alpha}} \simeq \|x - y\|_p^{\alpha - 1}.$$

Пример 2.31. Пусть (X, d, μ) и σ — такие, как в примере 2.26, т. е. X — множество дробных p-адических чисел, а σ задана равенством (2.41). В силу (2.42) при $x \neq y$ имеем

$$d_*(x,y) = \log^{\alpha}\left(2\left\|x-y\right\|_p\right),$$

а в силу (2.43) имеем

$$V\left(x,r\right) \simeq \exp\left(r^{1/\alpha}\right).$$

По теореме 2.28 заключаем, что полугруппа $\{P_t\}$ является переходной. Теорема 2.29 в этом случае не применима. Прямая оценка интеграла в (2.45) даёт для $r := d^*\left(x,y\right)$ соотношение

$$g\left(x,y\right) = \int_r^{\infty} \frac{ds}{V\left(x,s\right)} \simeq \int_r^{\infty} \exp\left(-s^{1/\alpha}\right) ds \simeq r^{1-1/\alpha} \exp\left(-r^{1/\alpha}\right),$$

откуда при $x \neq y$ следует

$$g\left(x,y\right) \simeq \left\|x-y\right\|_p^{-1} \log^{\alpha-1}\left(2\left\|x-y\right\|_p\right).$$

3 Лапласиан и его спектр

В этом параграфе мы рассматриваем свойства порождающего изотропной полугруппы $\{P^t\}$. По определению порождающий $\mathcal{L}$ сильно непрерывной полугруппы $\{P_t\}_{t\geq 0}$ в банаховом пространстве определяется равенством

$$\mathcal{L}f = s\text{-}\lim_{t\to 0}\frac{f-P_tf}{t},$$

причём область определения $\mathrm{dom}_{\mathcal{L}}$ состоит из тех f, для которых этот предел существует. Поскольку изотропная полугруппа $\{P^t\}$ симметрична и действует в гильбертовом пространстве $L^2\left(X,\mu\right)$, определение, приведённое выше, равносильно следующему: $\mathcal{L}$ — самосопряжённый (неограниченный) оператор в $L^2\left(X,\mu\right)$ такой, что

$$P^t = \exp\left(-t\mathcal{L}\right) \text{ для всех } t>0.$$

Очевидно, что это равносильно равенству $P = \exp\left(-\mathcal{L}\right)$, что приводит к тождеству

$$\mathcal{L} = \log\frac{1}{P},$$

где правая часть понимается в смысле функционального исчисления самосопряжённых операторов. Мы называем $\mathcal{L}$ *изотропным оператором Лапласа*, связанным с (d,μ,σ).

3.1 Подчинение

Используя спектральное разложение (2.10) оператора P, получаем, что

$$\mathcal{L} = \int_{[0,+\infty)} \log\frac{1}{\sigma\left(1/\lambda\right)} dE_\lambda$$

где $\{E_\lambda\}$ — спектральная резольвента, определяемая формулой (2.6). Для простоты обозначим

$$\varphi(\lambda) := \log \frac{1}{\sigma(1/\lambda)}, \tag{3.1}$$

так что

$$\mathcal{L} = \int_{[0,+\infty)} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda \,. \tag{3.2}$$

Область определения $\mathrm{dom}_{\mathcal{L}}$ тогда задаётся равенством

$$\mathrm{dom}_{\mathcal{L}} = \left\{ f \in L^2 : \int_0^\infty \varphi(\lambda)^2 \, d(E_\lambda f, f) < \infty \right\}.$$

Заметим, что функция φ обладает следующими свойствами, которые следуют из предположений (1.5) о σ:

$\varphi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *является строго монотонно возрастающей непрерывной справа функцией такой, что* $\varphi(0) = 0$ *и* $\varphi(\infty-) = \infty$. (3.3)

Обратно, любая функция φ, удовлетворяющая (3.3), определяет функцию

$$\sigma(\lambda) = \exp(-\varphi(1/\lambda)),$$

которая удовлетворяет (1.5). Это наблюдение приводит к следующему интересному свойству подчинения изотропных лапласианов.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathcal{L}$ *— изотропный лапласиан, связанный с* (d, μ, σ). *Пусть* ψ *— любая функция, удовлетворяющая* (3.3). *Тогда* $\psi(\mathcal{L})$ *также является изотропным лапласианом, связанным с* $(d, \mu, \widetilde{\sigma})$, *для некоторой другой функции распределения расстояний* $\widetilde{\sigma}$.

Доказательство. Из (3.2) следует, что

$$\psi(\mathcal{L}) = \int_{[0,+\infty)} \psi \circ \varphi(\lambda)\, dE_\lambda.$$

Поскольку композиция $\psi \circ \varphi$ также удовлетворяет (3.3), получаем, что $\psi(\mathcal{L})$ является изотропным лапласианом. Более того, используя (3.1), мы получаем следующую формулу для $\widetilde{\sigma}$:

$$\widetilde{\sigma}(r) = \exp\left(-\psi\left(\log \frac{1}{\sigma(r)}\right)\right).$$

□

Замечание 3.2. Любой неотрицательно определённый самосопряжённый оператор $\mathcal{L}$ в L^2 порождает полугруппу $\left\{e^{-t\mathcal{L}}\right\}_{t\geq 0}$. Мы называем $\mathcal{L}$ лапласианом, если полугруппа $\left\{e^{-t\mathcal{L}}\right\}$ марковская. В общем случае по теореме Бохнера для любого лапласиана $\mathcal{L}$ оператор $\psi(\mathcal{L})$ снова является лапласианом, как только ψ является функцией Бернштейна (см., например, книгу Р. Л. Шиллинга, Р. Сонга и З. Вондрачека [54]). Известно, что $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$ является функцией Бернштейна тогда и только тогда, когда $0 < \alpha \leq 1$. Таким образом, для лапласиана общего вида $\mathcal{L}$ степень $\mathcal{L}^\alpha$ гарантированно является лапласианом только при $\alpha \leq 1$. Например, для классического оператора Лапласа $\mathcal{L} = -\Delta$ в $\mathbb{R}^n$ степень $(-\Delta)^\alpha$ при $\alpha > 1$ не является лапласианом. В поразительном контрасте с этим фактом, по теореме 3.1 степени $\mathcal{L}^\alpha$ изотропного лапласиана снова являются лапласианами для всех $\alpha > 0$.

3.2 L^2-Спектр лапласиана

Нашей следующей целью в этом пункте является вывод явного выражения для $\mathcal{L}f$ и описание спектра оператора $\mathcal{L}$. Напомним, что по теореме 2.10 тройки (d, μ, σ) и (d_*, μ, σ_*) индуцируют один и тот же марковский оператор P и потому один и тот же оператор Лапласа $\mathcal{L}$, где d_* — внутренняя ультраметрика, определённая равенствами (2.14), а

$$\sigma_*(r) = \exp\left(-\frac{1}{r}\right)$$

С этого момента мы будем использовать только метрику d_* и σ_*. Пусть спектральная резольвента $\{E_\lambda\}$ также определена с использованием метрики d_*; это означает, что в определении (2.6) оператора E_λ мы теперь используем усредняющий оператор Q_r относительно метрики d_*. Функция φ_*, связанная с σ_* с помощью (3.1), имеет особенно простой вид: $\varphi_*(\lambda) = \lambda$. Поэтому мы получаем из (3.2) спектральное разложение оператора $\mathcal{L}$ в классическом виде

$$\mathcal{L} = \int_{[0,+\infty)} \lambda dE_\lambda = \int_{(0,\infty)} \lambda dE_\lambda. \tag{3.4}$$

Замена $s = \frac{1}{\lambda}$ даёт

$$\mathcal{L} = -\int_{(0,\infty)} \frac{1}{s} d\mathrm{Q}_s.$$

Для любого $x \in X$ обозначим через $\Lambda(x)$ множество значений $d_*(x, y)$ для всех $y \in X$, $y \neq x$, т. е.

$$\Lambda(x) = \{d(x, y) : y \in X \setminus \{x\}\}. \tag{3.5}$$

Лемма 3.3. *Множество $\Lambda(x)$ не имеет точек сгущения в $(0, \infty)$. Следовательно, $\Lambda(x)$ не более чем счётно.*

Доказательство. Пусть $r \in (0, \infty)$ — точка сгущения множества $\Lambda(x)$, т. е. имеется последовательность $\{r_k\}$ точек из $\Lambda(x) \setminus \{r\}$, для которой $r_k \to r$ при $k \to \infty$. Тогда $r_k = d_*(x, y_k)$ для некоторого $y_k \in X$. Поскольку последовательность $\{y_k\}$ ограничена, в силу компактности всех шаров в X она обладает сходящейся подпоследовательностью. Без ограничения общности можно считать, что $\{y_k\}$ сходится, скажем, к $y \in X$. Тогда имеем $r = d(x, y)$. Поскольку $r > 0$, для достаточно большого k имеем $r_k > r/2$ и $d(y, y_k) < r/2$. Тогда в силу ультраметрического неравенства получаем, что

$$r_k \le \max(r, d(y, y_k)) = r$$

и аналогично

$$r \le \max(r_k, d(y, y_k)) = r_k,$$

откуда $r_k = r$, что противоречит нашим предположениям. □

Определение 3.4. Для любого шара B в X обозначим через $\rho(B)$ его минимальный d_*-радиус.

Заметим, что $\rho(B)$ существует, потому что все шары определяются как замкнутые шары.

Лемма 3.5. *Если $\rho(B) > 0$, то $\rho(B) \in \Lambda(x)$ для любого $x \in B$. Обратно, любое число в $\Lambda(x)$ равно $\rho(B)$ для некоторого шара B, содержащего x.*

Доказательство. Положим $r = \rho(B)$, так что $B = B_r^*(x)$. Для любого $y \in B$ имеем $d_*(x, y) \le r$, и нам нужно показать, что $d_*(x, y) = r$ для некоторого y. Предположим, что $d_*(x, y) < r$ для всех $y \in B$. Тогда множество $\{d_*(x, y) : y \in B \setminus \{x\}\}$ является подмножеством из $(0, r) \cap \Lambda(x)$. В силу леммы 3.3 последнее множество обладает максимальным элементом, скажем, r'. Тогда $B \subset B_{r'}^*(x)$, что противоречит минимальности радиуса r. Обратно, если $r \in \Lambda(x)$, то шар $B = B_r(x)$ имеет $\rho(B) = r$, поскольку существует $y \in X$ с $d(x, y) = r$. $\square$

Определение 3.6. Пусть B, C — два шара в X такие, что $C \subset B$. Будем говорить, что C — *ребёнок* или *последователь* шара B (а B — *родитель* или *предшественник* шара C), если $C \ne B$ и для любого шара A такого, что $C \subset A \subset B$, имеем $A = C$ или $A = B$. Другими словами, B — минимальный шар, содержащий C как собственное подмножество. Если C — ребёнок шара B, будем писать $C \prec B$.

Обозначим через $\mathcal{K}$ семейство всех шаров C в X с положительными радиусами. Если $C = B_r^*(x)$ — шар из $\mathcal{K}$ с $r > 0$, то для минимального радиуса $\rho(C)$ имеется две возможности:

1. или $\rho(C) > 0$,
2. или $\rho(C) = 0$ и центр шара C является изолированной точкой пространства X.

Лемма 3.7. *Для любого шара $C \in \mathcal{K}$ такого, что $C \ne X$, есть единственный шар-родитель B. Для любого шара B с $\rho(B) > 0$ число $\deg(B)$ его детей удовлетворяет неравенствам $2 \le \deg(B) < \infty$. Более того, все дети шара B не пересекаются и их объединение равно B.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое $x \in C$. Из леммы 3.3 и определения $\mathcal{K}$ следует, что множество $(\rho(C), \infty) \cap \Lambda(x)$ имеет минимум, который мы обозначим через r. Тогда шар $B_r^*(x)$ является родителем C. Единственность родителя следует из определения.

Если C_1 и C_2 — два различных ребёнка шара B, то C_1 и C_2 не пересекаются. Действительно, если они пересекаются, то одни из них содержит другой, скажем, $C_1 \subset C_2$. По определению родителя/ребёнка тогда должно выполняться $C_2 = C_1$ или $C_2 = B$, откуда следует $C_1 = C_2$.

Покажем, что для любого $x \in B$ есть шар C такой, что $x \in C \prec B$. Действительно, если множество $(0, \rho(B)) \cap \Lambda(x)$ пусто, то $C = B_0^*(x) = \{x\}$ — ребёнок шара B. Если множество $(0, \rho(B)) \cap \Lambda(x)$ непусто, то по лемме 3.3 у него есть максимум, скажем, r. Тогда $C = B_r^*(x)$ — ребёнок шара B. Отсюда следует, что множество всех детей шара B является покрытием шара B.

Каждый ребёнок C шара B является открытым множеством (будучи также замкнутым шаром), потому что C совпадает с открытым шаром радиуса $\rho(B)$. Поскольку шар B компактен, множество его детей конечно, т. е. $\deg(B) < \infty$. Наконец, $\deg(B)$ не может быть равно 1, так как тогда B совпадал бы со своим единственным ребёнком. Отсюда следует, что $\deg(B) \ge 2$. $\square$

Для любого $C \in \mathcal{K}$ определим функцию f_C на X следующим образом. Если C — собственное подмножество пространства X, то, обозначая через B родителя шара C, положим

$$f_C = \frac{1}{\mu(C)}\mathbf{1}_C - \frac{1}{\mu(B)}\mathbf{1}_B \tag{3.6}$$

(заметим, что всегда $\mu(C) > 0$). Положим также $\lambda(C) := 1/\rho(B)$. Если $C = X$ (что может быть только в случае, когда X компактно), то положим $f_C \equiv 1$ и $\lambda(C) = 0$.

Теорема 3.8. *Для любого $C \in \mathcal{K}$ функция f_C является собственной функцией оператора $\mathcal{L}$ с собственным значением $\lambda(C)$. Семейство $\{f_C : C \in \mathcal{K}\}$ полно (его линейная оболочка всюду плотна) в $L^2(X, \mu)$. Следовательно, оператор $\mathcal{L}$ обладает полной системой собственных функций с компактными носителями.*

Доказательство. Зафиксируем шар $C \in \mathcal{K}$ или радиус $r = \rho(C)$, и пусть B — родитель радиуса $r' = \rho(B)$. Любой шар радиуса $s < r'$ либо не пересекается с C, либо содержится в C, откуда следует, что $\mathbf{1}_C$ постоянна в любом таком шаре. Следовательно, для любого $s < r'$ имеем $\mathrm{Q}_s\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_C$ и аналогично $\mathrm{Q}_s\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_B$, откуда

$$\mathrm{Q}_s f_C = f_C.$$

Для $s \geq r'$ любой шар радиуса s либо содержит оба шара C, B, либо не пересекается с B. Поскольку средние двух функций $\frac{1}{\mu(C)}\mathbf{1}_C$ и $\frac{1}{\mu(B)}\mathbf{1}_B$ по любому шару, содержащему C и B, равны, получаем, что в этом случае $\mathrm{Q}_s f_C = 0$. Следовательно,

$$\mathcal{L}f_C = -\int_{(0,\infty)} \frac{1}{s}\mathrm{Q}_s f_C \, ds = \frac{1}{r'} f_C = \lambda(C) f_C.$$

Это доказывает, что f_C — собственная функция оператора $\mathcal{L}$ с собственным значением $\lambda(C)$. В случае компактного X имеем $\mathrm{Q}_s f_X = f_X$ для всех $s > 0$, откуда $\mathcal{L}f_X = 0 = \lambda(X)$.

Покажем, что система $\{f_C : C \in \mathcal{K}\}$ полна. Предположим, что некоторая функция $f \in L^2$ ортогональна всем функциям f_C и докажем, что $f \equiv \mathrm{const}$. Для любого $r > 0$ имеем

$$(\mathrm{Q}_r f, f_C)_{L^2} = (f, \mathrm{Q}_r f_C)_{L^2} = \mathrm{const}\,(f, f_C)_{L^2} = 0,$$

где мы использовали то, что любая собственная функция оператора $\mathcal{L}$ является также собственной функцией оператора Q_r с собственным значением, которые мы обозначили через const. Отсюда следует, что $\mathrm{Q}_r f$ также ортогональна всем f_C. Ниже мы докажем, что $\mathrm{Q}_r f = 0$, из чего в силу (2.2) будет следовать, что $f = 0$.

Поскольку $\mathrm{Q}_r f$ постоянна в любом шаре радиуса r, переименовывая $\mathrm{Q}_r f$ обратно в f, мы можем с этого момента считать, что f постоянна в любом шаре радиуса r. Зафиксируем некоторый шар $C \in \mathcal{K}$ и его родителя B. Из (3.6) следует, что равенство $(f, f_C)_{L^2} = 0$ равносильно равенству

$$\frac{1}{\mu(C)}\int_C f \, d\mu = \frac{1}{\mu(B)}\int_B f \, d\mu,$$

т. е. среднее значение функции f по шару сохраняется, когда мы переключаемся на его родителя. Начиная с двух шаров C_1 и C_2 радиусов r, можно построить последовательности их предшественников, которые закончатся одним и тем же (достаточно большим) шаром. Отсюда следует, что средние значения функции f в C_1 и C_2 одни и те же. Поскольку f постоянна в C_1 и C_2, значения этих постоянных одинаковы. Следовательно, $f \equiv \mathrm{const}$ на X. Если $\mu(X) = \infty$, то получим $f \equiv 0$. Если $\mu(X) < \infty$, то используя ортогональность f к $f_X \equiv 1$, снова получим, что $f \equiv 0$. $\square$

Для любого шара B с $\rho(B) > 0$ определим подпространство $\mathcal{H}_B$ пространства L^2 следующим образом:

$$\mathcal{H}_B = \operatorname{span}\{f_C : C \prec B\}. \tag{3.7}$$

По теореме 3.8 все ненулевые функции в $\mathcal{H}_B$ являются собственными функциями оператора $\mathcal{L}$ с собственным значением $\frac{1}{\rho(B)}$.

Из леммы 3.7 следует, что функции $\{\mathbf{1}_C : C \prec B\}$ линейно независимы и

$$\sum_{C \prec B} \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_B.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{C \prec B} \mu(C) f_C = 0 \tag{3.8}$$

и что это единственная зависимость между функциями f_C. Отсюда получаем, что

$$\dim \mathcal{H}_B = \deg(B) - 1. \tag{3.9}$$

Ясно, что пространства $\mathcal{H}_B$ и $\mathcal{H}_{B'}$ ортогональны, как только шары B, B' не пересекаются.

Определим множество

$$\Lambda := \{d_*(x,y) : x, y \in X,\ x \neq y\} = \bigcup_{x \in X} \Lambda(x). \tag{3.10}$$

Из теоремы 3.8 вытекает следующее.

Следствие 3.9. *Спектр* $\operatorname{spec}\mathcal{L}$ *лапласиана* $\mathcal{L}$ *чисто точечный и*

$$\operatorname{spec}\mathcal{L} = \overline{\left\{\frac{1}{r} : r \in \Lambda\right\} \cup \{0\}}.$$

Пространство $L^2(X,\mu)$ *разлагается в ортогональную сумму конечномерных (подпространств) собственных пространств следующим образом: если* $\mu(X) = \infty$, *то*

$$L^2(X,\mu) = \bigoplus_{\rho(B)>0} \mathcal{H}_B,$$

а если $\mu(X) < \infty$, *то*

$$L^2(X,\mu) = \{\mathrm{const}\} \oplus \bigoplus_{\rho(B)>0} \mathcal{H}_B\ .$$

Пример 3.10. Пусть (X, d, μ) будет как в примере 2.24, т. е. $X = \mathbb{Q}_p$, $d(x,y) = \|x-y\|_p$ — p-адическое расстояние, а μ — мера Хаара. Для некоторого $\alpha > 0$ положим

$$\sigma(r) = \exp\left(-\left(\frac{p}{r}\right)^{\alpha}\right),$$

так что в силу (2.39)

$$d_*(x,y) = \left(\frac{\|x-y\|_p}{p}\right)^{\alpha}.$$

Поскольку множество ненулевых значений расстояния $\|x-y\|_p$ есть $\left\{p^k\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, множество Λ всех ненулевых значений расстояния $d_*(x,y)$ есть

$$\Lambda = \left\{p^{\alpha k} : k \in \mathbb{Z}\right\} .$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{spec}\mathcal{L} = \left\{p^{\alpha k} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}.$$

Следствие 3.11. *Пусть (X, d) — некомпактное собственное ультраметрическое пространство. Пусть $M \subset [0,\infty)$ — любое замкнутое множество (неограниченное, если X содержит хотя бы одну неизолированную точку), для которого 0 — точка сгущения. Тогда верно следующее.*

(a) Существует собственная ультраметрика d' на X, которая порождает ту же топологию, что и d, причём изотропный лапласиан $\mathcal{L}'$ тройки (d', μ, σ_*) имеет спектр $\operatorname{spec}\mathcal{L}' = M$.

(b) Предположим вдобавок, что существует разбиение X на d-шары, которое состоит из бесконечного числа неодноэлементных множеств. Тогда ультраметрику d' из пункта (a) можно выбрать так, что семейства d-шаров и d'-шаров совпадают.

Доказательство. Множество

$$D = \{x \in (0,\infty) : x^{-1} \in M\} \cup \{0\}$$

является замкнутым неограниченным подмножеством из $[0\,,\,\infty)$, содержащим 0. Утверждение (a) равносильно существованию собственной ультраметрики d' на X, которая порождает ту же топологию, что и d, и для которой замыкание множества значений $\{d'(x,y)\}_{x,y\in X}$ этой метрики совпадает с D. Это метрическое свойство доказано А. Бендиковым и П. Крупски [8, §2]. Для заданного μ лапласиан, связанный с тройкой (d', μ, σ_*), обладает требуемым свойством в силу следствия 3.9. Доказательство утверждения (b) следует таким же образом из результата в [8, §2]. □

3.3 Форма Дирихле и скачковое ядро

Построим форму Дирихле $(\mathcal{E}, \mathrm{dom}_{\mathcal{E}})$, связанную с изотропной полугруппой $\{P^t\}$. Хорошо известно, что если $P^t 1 = 1$, как в нашем случае, то

$$\mathcal{E}(f,f) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_X\int_X p_t(x,y)\left(f(x)-f(y)\right)^2 d\mu(x)\, d\mu(y)$$

и

$$\mathrm{dom}_{\mathcal{E}} = \left\{f \in L^2 : \mathcal{E}(f,f) < \infty\right\}$$

(см. [27]). Используя тождество (2.18), получаем, что

$$\frac{p\left(t,x,y\right)}{t}\nearrow\int_0^{1/d_*(x,y)}N(x,\tau)\,d\tau\quad\text{при } t\searrow 0.$$

Полагая

$$J(x,y):=\int_0^{1/d_*(x,y)}N(x,\tau)\,d\tau=\int_{d_*(x,y)}^{\infty}\frac{1}{V\left(x,s\right)}\frac{ds}{s^2}, \tag{3.11}$$

по теореме о монотонной сходимости получаем, что для всех $f\in L^2$ выполняется

$$\mathcal{E}\left(f,f\right)=\frac{1}{2}\int_X\int_X\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)^2J\left(x,y\right)\,d\mu\left(x\right)\,d\mu\left(y\right).$$

Заметим, что $0<J\left(x,y\right)=J\left(y,x\right)<\infty$ для всех $x\neq y$, в то время как $J\left(x,x\right)=\infty$.

Из тождества поляризации тогда следует, что для всех $f,g\in\mathrm{dom}_{\mathcal{E}}$ выполняется

$$\mathcal{E}\left(f,g\right)=\frac{1}{2}\int_X\int_X\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)J\left(x,y\right)d\mu\left(x\right)d\mu\left(y\right). \tag{3.12}$$

Функция J называется *скачковым ядром* формы Дирихле $\mathcal{E}$. Здесь мы покажем, что её можно использовать также для описания порождающего $\mathcal{L}$ полугруппы $\{P^t\}$. Напомним, что в силу теории форм Дирихле порождающий $\mathcal{L}$ имеет следующее равносильное определение: это самосопряжённый оператор в L^2 с $\mathrm{dom}_{\mathcal{L}}\subset\mathrm{dom}_{\mathcal{E}}$ такой, что

$$\left(\mathcal{L}f,g\right)=\mathcal{E}\left(f,g\right)$$

для всех $f\in\mathrm{dom}_{\mathcal{L}}$ и $g\in\mathrm{dom}_{\mathcal{E}}$.

Обозначим через $\mathcal{V}_r$ образ оператора Q_r (определённого относительно d_*), т. е. пространство всех L^2-функций, постоянных на каждом шаре радиуса r. Положим также

$$\mathcal{V}:=\bigcup_{r>0}\mathcal{V}_r$$

и заметим, что $\mathcal{V}$ — линейное подпространство в L^2. Заметим также, что пространство $\mathcal{V}_c$ всех локально постоянных функций с компактным носителем содержится в $\mathcal{V}$.

Теорема 3.12. *Пространство $\mathcal{V}$ всюду плотно в L^2, является подмножеством в $\mathrm{dom}_{\mathcal{L}}$ и для любого $f\in\mathcal{V}$ выполняется*

$$\mathcal{L}f\left(x\right)=\int_X\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)J\left(x,y\right)d\mu\left(y\right). \tag{3.13}$$

Доказательство. Тот факт, что $\mathcal{V}$ всюду плотно в L^2, следует из (2.2). На самом деле, $\mathcal{V}_c$ также всюду плотно в L^2, что следует из того, что все собственные функции оператора $\mathcal{L}$ лежат в $\mathcal{V}_c$.

В силу (2.6) и (3.4) имеем $\mathrm{Q}_r=\mathbf{1}_{[0,1/r)}\left(\mathcal{L}\right)$. Значит, $\mathcal{L}\mathrm{Q}_r$ — ограниченный оператор, откуда следует, что $\mathrm{dom}_{\mathcal{L}}\supset\mathcal{V}_r$ и потому $\mathrm{dom}_{\mathcal{L}}\supset\mathcal{V}$.

Зафиксируем функцию $f\in\mathcal{V}_r$ с $r>0$ и положим

$$u\left(x\right)=\int_X\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|J\left(x,y\right)\,d\mu\left(y\right).$$

Покажем, что $u \in L^2$. Заметим, что $f(x) = f(y)$, как только $d_*(x,y) \le r$. Отсюда следует, что можно ограничить интегрирование на область $\{d_*(x,y) > r\}$. В силу неравенства Коши–Шварца имеем

$$u^2(x) \le \left(\int_X |f(x) - f(y)|^2 J(x,y)\, d\mu(y)\right)\left(\int_{\{y: d_*(x,y)>r\}} J(x,y)\, d\mu(y)\right). \tag{3.14}$$

Покажем, что

$$\int_{\{y: d_*(x,y)>r\}} J(x,y)\, d\mu(y) \le \frac{1}{r}.$$

Действительно, в силу (3.11) и теоремы Фубини последний интеграл равен

$$\begin{aligned}
\int_{\{y: d_*(x,y)>r\}} \int_{\{s: s\ge d_*(x,y)\}}^{\infty} \frac{1}{V(x,s)} \frac{ds}{s^2}\, d\mu(y) &= \int_r^\infty \frac{ds}{s^2 V(x,s)} \int_{\{y: r<d_*(x,y)\le s\}} d\mu(y) \\
&= \int_r^\infty \frac{V(x,s) - V(x,r)}{s^2 V(x,s)}\, ds \\
&\le \int_r^\infty \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

Из (3.14) следует, что

$$\int_X u^2\, d\mu \le \frac{1}{r} \mathcal{E}(f,f).$$

Поскольку $f \in \mathrm{dom}_{\mathcal{L}} \subset \mathrm{dom}_{\mathcal{E}}$, получаем, что $u \in L^2$. В частности, $u(x) < \infty$ для почти всех $x \in X$. Следовательно, для почти всех $x \in X$ функция

$$y \mapsto (f(x) - f(y))\, J(x,y)$$

лежит в L^1, и её интеграл

$$v(x) = \int_X (f(x) - f(y))\, J(x,y)\, d\mu(y)$$

является L^2-функцией. Нам нужно проверить, что $\mathcal{L}f = v$. Для этого достаточно проверить, что для любого $g \in \mathrm{dom}_{\mathcal{E}}$ выполняется

$$(v,g)_{L^2} = \mathcal{E}(f,g).$$

Действительно, используя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned}
(v,g)_{L^2} &= \int_X \int_X (f(x) - f(y))\, g(x)\, J(x,y)\, d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&= \int_X \int_X (f(y) - f(x))\, g(y)\, J(y,x)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \\
&= \frac{1}{2} \int_X \int_X (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\, J(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \\
&= \mathcal{E}(f,g),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

3.4 L^p-Спектр лапласиана

Известно, что любую непрерывную симметричную марковскую полугруппу можно продолжить на все пространства L^p, $1 \le p < \infty$, как непрерывную сжимающую полугруппу. В частности, это верно для полугруппы $\{P^t\}$. Мы используем те же обозначения для продолженной полугруппы и обозначаем через $\mathcal{L}_p$ её инфинитезимальный порождающий, а через $\mathrm{dom}_{\mathcal{L}_p}$ её область определения в L^p.

Теорема 3.13. *Для всех* $1 \le p < \infty$ *имеем*

$$\operatorname{spec} \mathcal{L}_p = \operatorname{spec} \mathcal{L}_2 \,.$$

Доказательство. Поскольку по теореме 3.8 все собственные функции оператора $\mathcal{L}_2$ имеют компактные носители, они принадлежат также L^p, откуда следует, что

$$\operatorname{spec} \mathcal{L}_2 \subset \operatorname{spec} \mathcal{L}_p.$$

Чтобы доказать обратное включение, выберем $\lambda_0 \notin \operatorname{spec} \mathcal{L}_2$ и покажем, что $\lambda_0 \notin \operatorname{spec} \mathcal{L}_p$. Для этого достаточно показать, что оператор резольвенты

$$R := (\mathcal{L}_2 - \lambda_0 \,\mathrm{id})^{-1} \,,$$

будучи ограниченным оператором в L^2, продолжается до ограниченного оператора в L^p. Последнее сводится к тому, чтобы показать, что для любых функций $f \in L^2 \cap L^p$ и $g \in L^2 \cap L^q$, где $q = \frac{p}{p-1}$ — гёльдеров сопряжённый показателя p, выполняется неравенство

$$\left|(Rf, g)_{L^2}\right| \le C \left\|f\right\|_{L^p} \left\|g\right\|_{L^q}$$

с постоянной C, не зависящей от f, g.

Ограничимся случаем $\lambda_0 > 0$ (случай $\lambda_0 < 0$ проще). Выберем $a, b > 0$ такие, что $a < \lambda_0 < b$ и $[a, b]$ не пересекается с $\operatorname{spec} \mathcal{L}_2$. Используя спектральное разложение (3.4), получим

$$R = \int_{\operatorname{spec} \mathcal{L}_2} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0} = \int_{[0,a)} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0} + \int_{[b,\infty)} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0},$$

откуда

$$(Rf, g) = \int_{[0,a)} \frac{d\,(E_\lambda f, g)}{\lambda - \lambda_0} + \int_{[b,\infty)} \frac{d\,(E_\lambda f, g)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Интегрирование по частям даёт

$$\begin{aligned}(Rf, g) \quad = \quad & \frac{(E_a f, g)}{a - \lambda_0} + \int_{[0,a)} \frac{(E_\lambda f, g)}{(\lambda - \lambda_0)^2}\, d\lambda \\ & - \frac{(E_b f, g)}{b - \lambda_0} + \int_{[b,\infty)} \frac{(E_\lambda f, g)}{(\lambda - \lambda_0)^2}\, d\lambda.\end{aligned}$$

Поскольку $E_\lambda = \mathrm{Q}_{1/\lambda}$ — марковский оператор, он стандартным образом продолжается до ограниченного оператора в L^p с оценкой нормы 1, так что

$$\left|(E_\lambda f, g)\right| \le \left\|f\right\|_{L^p} \left\|g\right\|_{L^q} .$$

Следовательно,

$$|(Rf,g)| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\left(\frac{1}{\lambda_0-a}+\frac{1}{b-\lambda_0}+\int_{[0,a)\cup[b,\infty)}\frac{d\lambda}{(\lambda-\lambda_0)^2}\right),$$

что завершает доказательство, поскольку величина в больших скобках конечна. $\square$

Последняя теорема этого параграфа относится к свойству Лиувилля. Заметим, что полугруппа $\{P^t\}$, определённая равенством (1.6), действует на пространстве $\mathcal{B}_b$ ограниченных борелевских функций как сжимающая полугруппа, но она не непрерывна, если только X не дискретно. Определим сходимость последовательности в $\mathcal{B}_b$ как ограниченную поточечную сходимость, т. е. последовательность $\{f_k\} \subset \mathcal{B}_b$ сходится в $\mathcal{B}_b$ к функции f, если вся последовательность $\{f_k\}$ равномерно ограничена и $f_k(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ для всех $x \in X$. Определим слабый инфинитезимальный порождающий $\mathcal{L}_\infty$ полугруппы $\{P^t\}$ в $\mathcal{B}_b$ следующим образом: область определения $\mathrm{dom}_{\mathcal{L}_\infty}$ состоит из функций $f \in \mathcal{B}_b$ таких, что предел

$$\mathcal{L}_\infty f := \lim_{t\to 0}\frac{f-P^t f}{t}$$

существует в смысле сходимости в $\mathcal{B}_b$. Это даёт $\mathcal{L}_\infty f \in \mathcal{B}_b$ для любого $f \in \mathrm{dom}_{\mathcal{L}_\infty}$.

Теорема 3.14 (Сильное свойство Лиувилля)**.** *Любая борелевская функция $f : X \to [0, \infty)$, удовлетворяющая $Pf = f$, должна быть постоянной.*

Следовательно, 0 — собственное значение оператора $\mathcal{L}_\infty$ кратности 1.

Доказательство. Поскольку P и Q_r перестановочны, из $f = Pf$ и

$$Pf = \int_0^\infty \mathrm{Q}_s f\, d\sigma_*(s) \tag{3.15}$$

получаем, что для всех $r \geq 0$ выполняется

$$\mathrm{Q}_r f = P\mathrm{Q}_r f = \int_{[0,\infty)} \mathrm{Q}_s \mathrm{Q}_r f\, d\sigma_*(s).$$

Замечая, что

$$\mathrm{Q}_s \mathrm{Q}_r = \mathrm{Q}_{\max(r,s)},$$

получаем

$$\mathrm{Q}_r f = \int_{[0,r)} \mathrm{Q}_r f\; d\sigma_*(s) + \int_{[r,\infty)} \mathrm{Q}_s f\, d\sigma_*(s).$$

Первый интеграл здесь равен $\sigma_*(r)\,\mathrm{Q}_r f$, откуда следует равенство

$$(1-\sigma_*(r))\,\mathrm{Q}_r f = \int_{[r,\infty)} \mathrm{Q}_s f\, d\sigma_*(s). \tag{3.16}$$

Зафиксируем некоторый $x \in X$. В силу леммы 3.3 множество $\Lambda(x)$ всех значений $d_*(x,y)$ при $y \neq x$ не имеет точек сгущения в $(0, +\infty)$. Выберем r_0 следующим образом: если $\Lambda(x)$ не имеет точки сгущения в 0, то $r_0 = 0$, а если $\Lambda(x)$ имеет точку сгущения в 0, то r_0 — любое значение из $\Lambda(x)$. В обоих случаях множество $\Lambda(x) \cap (r, \infty)$

состоит из (конечной или бесконечной) последовательности $r_1 < r_2 < ...$, которая сходится к ∞ в случае, когда она бесконечна. Применяя (3.16) к $r = r_k$ и $r = r_{k+1}$ вместо r, где $k \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned}(1-\sigma_*(r_k))\,\mathrm{Q}_{r_k}f(x) - (1-\sigma_*(r_{k+1}))\,\mathrm{Q}_{r_{k+1}}f(x) &= \int_{[r_k,r_{k+1})} \mathrm{Q}_s f(x)\; d\sigma_*(s) \\ &= \mathrm{Q}_{r_k}f(x)\,(\sigma_*(r_{k+1}) - \sigma_*(r_k))\,,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$(1-\sigma_*(r_{k+1}))\,\mathrm{Q}_{r_k}f(x) = (1-\sigma_*(r_{k+1}))\,\mathrm{Q}_{r_{k+1}}f(x)$$

и потому

$$\mathrm{Q}_{r_k}f(x) = \mathrm{Q}_{r_{k+1}}f(x)\,.$$

Следовательно, получаем, что

$$\mathrm{Q}_{r_k}f(x) = \mathrm{Q}_{r_0}f(x) \quad \text{для всех } k \geq 1.$$

Поскольку r_0 можно выбрать произвольно близким к 0, получаем, что $\mathrm{Q}_r f(x)$ не зависит от r. Для любых двух точек $x, y \in X$ имеем $\mathrm{Q}_r f(x) = \mathrm{Q}_r f(y)$ при $r \geq d_*(x,y)$. Поэтому функция $\mathrm{Q}_r f(x)$ постоянна и по r, и по x. Из (3.15) следует, что $f = Pf$ также постоянна.

Для второго утверждения теоремы заметим, что 0 является собственным значением оператора $\mathcal{L}_\infty$, потому что $\mathcal{L}_\infty 1 = 0$. Предположим, что $\mathcal{L}_\infty f = 0$, и докажем, что $f \equiv \mathrm{const}$, откуда будет следовать, что кратность собственного значения 0 равна 1. По предположению имеем $f \in \mathcal{B}_b$ и

$$\frac{f - P^t f}{t} \xrightarrow{\mathcal{B}_b} 0 \;\text{ при } t \to 0.$$

Поскольку семейство $\left\{\frac{f-P_t f}{t}\right\}_{t>0}$ равномерно ограничено, по теореме о мажорируемой сходимости получаем, что для любого $r \geq 0$ выполняется

$$\mathrm{Q}_r\left(\frac{f - P^t f}{t}\right) \xrightarrow{\mathcal{B}_b} 0 \;\text{ при } t \to 0,$$

что в свою очередь влечёт, что для всех $s \geq 0$ выполняется

$$\frac{P^s f - P^{s+t} f}{t} = P^s\left(\frac{f - P^t f}{t}\right) \xrightarrow{\mathcal{B}_b} 0 \;\text{ при } t \to 0.$$

Следовательно, для любого $x \in X$ функция $s \mapsto P^s f(x)$ имеет производную, равную 0, и потому постоянна. Следовательно, $f = Pf$ и в силу первого утверждения теоремы мы заключаем, что $f = \mathrm{const}$. □

4 Моменты марковского процесса

Пусть $\{\mathcal{X}_t\}$ — марковский процесс, связанный с полугруппой $\{P_t\}$. Для любого $\gamma > 0$ момент процесса порядка γ определяется как

$$M_\gamma(x,t) = \mathbb{E}_x\left(d_*(x,\mathcal{X}_t)^\gamma\right),$$

где $\mathbb{E}_x$ — математическое ожидание относительно вероятностной меры на пространстве траекторий процесса $\{\mathcal{X}_t\}$, управляющей процессом, начиная с x. В терминах теплового ядра $p(t,x,y)$ момент задаётся равенством

$$M_\gamma(x,t) = \int_X d_*(x,y)^\gamma p(t,x,y)\, d\mu(y). \tag{4.1}$$

Целью этого параграфа является оценка $M_\gamma(x,t)$ как функции от t и γ.

Начнём с двух лемм. Мы используем внутреннюю функцию объёма (2.48), т. е.

$$V(x,r) = \mu\left(B_r^*(x)\right)$$

и её среднюю функцию момента порядка γ, т. е.

$$R_\gamma(x,\tau) = \frac{1}{V(x,\tau)} \int_{(0,\tau]} r^\gamma\, dV(x,r).$$

Лемма 4.1. *Для всех $x \in X$, $t > 0$ и $\gamma > 0$ выполняется*

$$M_\gamma(x,t) = t\int_0^\infty R_\gamma\left(x, \frac{1}{\tau}\right) e^{-\tau t}\, d\tau = \int_0^\infty R_\gamma\left(x, \frac{t}{s}\right) e^{-s}\, ds.$$

Доказательство. Используя равенства (4.1) и (2.24), а также определение 2.8 функции спектрального распределения в терминах функции объёма, получаем

$$\begin{aligned}
M_\gamma(x,t) &= \int_X d_*(x,y)^\gamma\, p(t,x,y)\, d\mu(y) \\
&= \int_{(0,\infty)} r^\gamma \left(t\int_0^{1/r} N(x,\tau)\, e^{-\tau t}\, d\tau\right) dV(x,r) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{(0,1/\tau)} \frac{r^\gamma}{V(x,1/\tau)}\, dV(x,r)\right) t\, e^{-\tau t}\, d\tau = \int_0^\infty R_\gamma\left(x,\frac{1}{\tau}\right) t\, e^{-\tau t}\, d\tau.
\end{aligned}$$

В третьем тождестве мы использовали теорему Фубини. □

Функция объёма $r \mapsto V(x,r)$ неубывающая. Ввиду её связи с функцией спектрального распределения (см. определение 2.8) она является ступенчатой функцией, о виде которой можно получить представление из рис. 1–3. Функция изменяется от 0 до $\mu(X)$. В компактном случае $V(x,r) = \mu(X)$ для всех $r \geq r^*_{\max} = r^*_{\max}(x)$, где $r^*_{\max}(x)$ — наибольшее значение в $\Lambda(x)$ (см. (3.5)). Когда точка x изолирована, $V(x,r) = \mu\{x\}$ для всех $0 \leq r < r_0^* = r_0^*(x)$, где $r_0^*(x)$ — наименьшее положительное значение в $\Lambda(x)$.

Лемма 4.2. *Для любых заданных $x \in X$ и $\gamma > 0$ выполняются следующие свойства.*

(a) *Функция $\tau \mapsto R_\gamma(x,\tau)$ неубывающая.*

Если X компактно, то $R_\gamma(x,\tau) = R_\gamma\left(x, r^*_{\max}(x)\right)$ для всех $\tau \geq r^*_{\max}(x)$.

Если X дискретно и бесконечно, то $R_\gamma(x,\tau) = R_\gamma\left(x, r_0^*(x)\right)$ для всех $0 < \tau \leq r_0^*(x)$.

(b) *Для всех $\tau > 0$ выполняется неравенство*

$$R_\gamma(x,\tau) \le \tau^\gamma,$$

и если функция объёма $r \mapsto V(x,r)$ удовлетворяет обратному удваивающему свойству, то существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$R_\gamma(x,\tau) \ge c\,\tau^\gamma \tag{4.2}$$

для всех $\tau > 0$. В недискретном компактном случае, если функция объёма всего лишь удовлетворяет обратному удваивающему свойству в нуле, то (4.2) выполняется для всех $0 < \tau < r^*_{\max}(x)$. В дискретном бесконечном случае, если функция объёма всего лишь удовлетворяет обратному удваивающему свойству на бесконечности, то (4.2) выполняется для всех $\tau > r^*_0(x)$.

Доказательство. Для первой части пункта (a) проинтегрируем по частям:

$$R_\gamma(x,\tau) = \frac{1}{V(x,\tau)}\left(\tau^\gamma\, V(x,\tau) - \int_{(0\,,\,\tau]} V(x,s)\, ds^\gamma\right) = \int_{(0\,,\,\tau]}\left(1 - \frac{V(x,s)}{V(x,\tau)}\right) ds^\gamma,$$

откуда следует, что функция $\tau \mapsto \mathcal{R}_\gamma\,(x,\tau)$ неубывающая.

Вторая часть пункта (a) несложна.

Что касается пункта (b), общая верхняя оценка на $R_\gamma(x,\tau)$ очевидна. Если функция объёма удовлетворяет обратному удваивающему свойству, то в соответствующей области значений имеем

$$\begin{aligned} R_\gamma(x,\tau) &\ge \frac{1}{V(x,\tau)}(\delta\tau)^\gamma\,(V(x,\tau) - V(x,\delta\tau)) \\ &= (\delta\tau)^\gamma\left(1 - \frac{V(x,\delta\tau)}{V(x,\tau)}\right) \ge \delta^\gamma(1-\kappa)\tau^\gamma = c\,\tau^\gamma \end{aligned}$$

для подходящих постоянных $0 < \kappa, c < 1$. □

Теперь, чтобы оценить функцию момента $t \mapsto M_\gamma(x,t)$, нам нужно оценить интеграл типа Лапласа, заданный формулой из леммы 4.1. Мы займёмся такими оценками в двух технических предложениях 4.6 и 4.7 в конце этого параграфа. Перед этим, в следующих трёх теоремах, мы сформулируем результаты, касающиеся функции момента.

Теорема 4.3. *Предположим, что (X,d) не компактно и не имеет изолированных точек. Тогда выполняются следующие свойства.*

(1) *Для всех $x \in X$, $t > 0$ и $0 < \gamma < 1$*

$$M_\gamma(x,t) \le \frac{t^\gamma}{1-\gamma}.$$

(2) *Если для некоторого $x \in X$ функция объёма удовлетворяет обратному удваивающему свойству, то для любого $0 < \gamma < 1$*

$$M_\gamma(x,t) \ge \frac{c}{1-\gamma}t^\gamma,$$

для всех $x, t > 0$ и некоторого $c > 0$. Более того,

$$M_\gamma(z,t) = \infty,$$

для всех z, $t > 0$ и $\gamma \geq 1$.

Теорема 4.4. *Предположим, что (X,d) дискретно и бесконечно. Тогда выполняются следующие свойства.*

(a) *Для всех x, $t > 0$ и $0 < \gamma < 1$*

$$M_\gamma(x,t) \leq \frac{C}{1-\gamma} \min\{t, t^\gamma\}$$

для некоторого $C > 0$.

(b) *Если для некоторого (равносильно, для всех) $x \in X$ функция объёма удовлетворяет обратному удваивающему свойству на бесконечности, то для любого $0 < \gamma < 1$*

$$M_\gamma(z,t) \geq \frac{c}{1-\gamma} \min\{t, t^\gamma\}$$

для всех z, $t > 0$ и для некоторого $c > 0$. Более того,

$$M_\gamma(z,t) = \infty$$

для всех z, $t > 0$ и всех $\gamma \geq 1$.

Предположим теперь, что (X,d) компактно, и пусть D — его d_*-диаметр. В силу лемм 4.1 и 4.2 для всех $x \in X$, $\gamma > 0$ и $t > 0$ имеем

$$M_\gamma(x,t) \leq R_\gamma(x,D) \leq D^\gamma,$$

откуда мы получаем информацию о поведении функции момента $t \mapsto M_\gamma(x,t)$ в нуле.

Теорема 4.5. *Предположим, что (X,d) не дискретно и компактно. Тогда выполняются следующие свойства.*

(1) *Существует такая постоянная $C > 0$, что для всех x и всех $0 < t \leq 1$ выполняется неравенство*

$$M_\gamma(x,t) \leq C \begin{cases} t, & \text{если} \quad \gamma > 1, \\ t\left(\log\frac{1}{t} + 1\right), & \text{если} \quad \gamma = 1, \\ t^\gamma, & \text{если} \quad \gamma < 1. \end{cases}$$

(2) *Если для некоторого $x \in X$ функция объёма удовлетворяет обратному удваивающему свойству в нуле, то существует такая постоянная $c > 0$, что для всех z и всех $0 < t \leq 1$ выполняется неравенство*

$$M_\gamma(z,t) \geq c \begin{cases} t, & \text{если} \quad \gamma > 1, \\ t\left(\log\frac{1}{t} + 1\right), & \text{если} \quad \gamma = 1, \\ t^\gamma, & \text{если} \quad \gamma < 1. \end{cases}$$

Теперь мы приведём технические подробности относительно оценок типа Лапласа, из которых следуют теоремы 4.3, 4.4 и 4.5. В следующих двух предложениях M и R всегда будут две неотрицательные неубывающие функции, связанные интегралом типа Лапласа

$$M(t) = \int_0^\infty R\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-\tau}\, d\tau\,.$$

Предложение 4.6. *Пусть задано $\gamma > 0$.*

(1) *Предположим, что*

$$As^\gamma \geq R(s) \quad \text{или соответственно} \quad R(s) \geq B\, s^\gamma \tag{4.3}$$

для некоторого $A > 0$ (соответственно $B > 0$) и всех $s > 0$. Тогда для всех $0 < \gamma < 1$ и всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{A\, t^\gamma}{1-\gamma} \geq M(t)\,, \quad \text{соответственно} \quad M(t) \geq \frac{B\, t^\gamma}{(1-\gamma)\, e}.$$

.

(2) *Предположим, что имеется $t_0 > 0$ такое, что $R(s) = 0$ для всех $0 < s < t_0$. Предположим также, что одно из неравенств из (4.3) соответственно выполняется для всех $s > t_0$. Тогда*

$$M(t) \leq \frac{c}{1-\gamma} \min\left\{\frac{t}{t_0}, \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma\right\}, \quad \text{соответственно} \quad M(t) \geq \frac{c'}{1-\gamma} \min\left\{\frac{t}{t_0}, \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma\right\},$$

для всех $0 < \gamma < 1$, всех $t > 0$ и некоторых постоянных $c, c' > 0$.

(3) *Из предположения $\gamma \geq 1$ и нижней оценки $R(s) \geq B\, s^\gamma$ следует, что $M(t) = \infty$ для всех $t > 0$.*

Доказательство. Известно, что для $0 < \gamma < 1$ гамма-функция удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{(1-\gamma)\, e} < \Gamma(1-\gamma) < \frac{1}{1-\gamma},$$

откуда в силу монотонности интеграла типа Лапласа вытекает первое утверждение.

Чтобы доказать второе утверждение, запишем

$$M(t) = \int_{\{t/s \geq t_0\}} R\left(\frac{t}{s}\right) e^{-s}\, ds.$$

Во-первых, предположим, что $R(\tau) \leq A\, s^\gamma$ для всех $0 < s < \infty$. Тогда получим

$$\begin{aligned} M(t) &\leq A \int_{\{t/s \geq t_0\}} \left(\frac{t}{s}\right)^\gamma e^{-s}\, ds = A\, t^\gamma \int_{\{s \leq t/t_0\}} s^{-\gamma} e^{-s}\, ds \\ &\leq A\, t^\gamma \int_0^{t/t_0} s^{-\gamma}\, ds = \left(\frac{t}{t_0}\right) \frac{A t_0^{-\gamma}}{1-\gamma} \qquad \text{и} \end{aligned}$$

$$M(t) \leq A\, t^\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma} e^{-s}\, ds \leq \frac{A\, t^\gamma}{1-\gamma} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma \frac{A\, t_0^\gamma}{1-\gamma}.$$

Следовательно,

$$M(t) \le \frac{A\,\max\left\{t_0, t_0^{-1}\right\}}{1-\gamma}\min\left\{\frac{t}{t_0}, \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\gamma}\right\}.$$

Во-вторых, предположим, что $R(s) \ge B\,s^{\gamma}$ для всех $s \ge t_0$. Тогда при $t/t_0 \ge 1$ имеем

$$M(t) \ge B\,t^{\gamma}\int_0^{t/t_0} s^{-\gamma}e^{-s}\,ds \ge \frac{B\,t^{\gamma}}{e}\int_0^1 s^{-\gamma}\,ds = \frac{B\,t^{\gamma}}{(1-\gamma)e} = \frac{B\,t_0^{\gamma}}{(1-\gamma)\,e}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\gamma}.$$

Когда $t/t_0 \le 1$, получаем

$$M(t) \ge B\,t^{\gamma}\int_0^{t/t_0} s^{-\gamma}e^{-s}\,ds \ge \frac{B\,t^{\gamma}}{e}\int_0^{t/t_0} s^{-\gamma}\,ds = \frac{B\,t^{\gamma}}{(1-\gamma)\,e}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-\gamma} = \frac{B\,t_0^{\gamma}}{(1-\gamma)\,e}\left(\frac{t}{t_0}\right).$$

Следовательно,

$$M(t) \ge \frac{B\,t_0^{\gamma}}{(1-\gamma)\,e}\min\left\{\frac{t}{t_0}, \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\gamma}\right\} \ge \frac{B\min\{t_0, 1\}}{(1-\gamma)\,e}\min\left\{\frac{t}{t_0}, \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\gamma}\right\}.$$

Это доказывает второе утверждение. Для третьего утверждения заметим, что если $R(s) \ge B\,s^{\gamma}$ для всех $s \ge t_0$ и $\gamma \ge 1$, то

$$M(t) \ge B\,t^{\gamma}\int_0^{t/t_0} s^{-\gamma}e^{-s}\,ds = \infty$$

для всех $t > 0$. □

Предложение 4.7. *Предположим, что имеется $t_0 > 0$ такое, что $R(s) = R(t_0)$ для всех $s \ge t_0$. Предположим также, что одно из неравенств в (4.3) соответственно выполняется для всех $0 < s \le t_0$. Тогда*

$$M(t) \;\le\; \begin{cases} c_1\,\frac{t}{t_0}, & \text{если}\quad \gamma > 1,\\ c_2\,t\left(\log\frac{t_0}{t}+1\right), & \text{если}\quad \gamma = 1,\\ c_3\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\gamma}, & \text{если}\quad \gamma < 1,\end{cases}$$

$$\text{соответственно}\quad M(t) \;\ge\; \begin{cases} c_1'\,\frac{t}{t_0}, & \text{если}\quad \gamma > 1,\\ c_2'\,t\left(\log\frac{t_0}{t}+1\right), & \text{если}\quad \gamma = 1,\\ c_3'\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\gamma}, & \text{если}\quad \gamma < 1,\end{cases}$$

для всех $0 < t \le t_0$ и некоторой положительной постоянной $c_1, c_1', c_2, c_2', c_3, c_3'$.

Доказательство. Пусть $\gamma > 1$ и $0 < t < t_0$. В соответствии с нашим предположением имеем

$$M(t) = \int_{\{t/s \le t_0\}} R\left(\frac{t}{s}\right)e^{-s}\,ds + R(t_0)\left(1 - e^{-t/t_0}\right).$$

Заметим, что при $0 < t < t_0$ выполняется

$$\frac{t}{2t_0} \le \left(1 - e^{-t/t_0}\right) \le \frac{t}{t_0}.$$

Во-первых, если $R(s) \le A\,s^\gamma$ для всех $0 < s < t_0$, то

$$\begin{aligned}
M(t) &\le A\,t^\gamma \int_{t/t_0}^{\infty} s^{-\gamma} e^{-s}\,ds + \frac{R(t_0)t}{t_0} \le A\,s^\gamma \int_{t/t_0}^{\infty} s^{-\gamma}\,ds + \frac{R(t_0)t}{t_0} \\
&\le \frac{A\,t^\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-\gamma} + \frac{R(t_0)t}{t_0} = \frac{t}{t_0}\left(R(t_0) + \frac{A\,t_0^\gamma}{\gamma-1}\right).
\end{aligned}$$

Во-вторых, если $R(s) \ge B\,s^\gamma$ для всех $0 < s < t_0$, то

$$M(t) \ge \frac{R(t_0)}{2}\frac{t}{t_0}.$$

Предположим, что $0 < \gamma < 1$ и $0 < t < t_0$. Снова, во-первых, если $R(s) \le A\,s^\gamma$ для всех $0 < \tau < t_0$, то

$$\begin{aligned}
M(t) &\le At^\gamma \int_{t/t_0}^{\infty} s^{-\gamma} e^{-s}\,ds + \frac{R(t_0)t}{t_0} \le A\,t^\gamma\,\Gamma(1-\gamma) + R(t_0)\frac{t}{t_0} \\
&\le \frac{A\,t^\gamma}{1-\gamma} + R(t_0)\frac{t}{t_0} = \frac{A\,t_0^\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma + R(t_0)\frac{t}{t_0} \\
&\le \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma \left(\frac{A\,T^\gamma}{1-\gamma} + R(t_0)\right).
\end{aligned}$$

Во-вторых, ещё раз, когда $R(s) \ge B\,s^\gamma$ для всех $0 < s < T$, то

$$M(t) \ge B\,t^\gamma \int_{t/t_0}^{\infty} s^{-\gamma} e^{-s}\,ds \ge B\,t^\gamma \int_{1}^{\infty} s^{-\gamma} e^{-s}\,ds \ge \left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma \left(\frac{B\,\min\{t_0, 1\}}{e^2}\right).$$

Наконец, предположим, что $\gamma = 1$ и $0 < t < t_0$. Во-первых, если $R(s) \le A\,s^\gamma$ для всех $0 < \tau < t_0$, то

$$\begin{aligned}
M(t) &\le At \int_{t/T}^{\infty} s^{-1} e^{-s} ds + \frac{R(T)t}{T} \\
&= At\left(\int_{1}^{\infty} s^{-1} e^{-s}\,ds + \int_{t/t_0}^{1} s^{-1} e^{-s}\,ds\right) + \frac{R(t_0)t}{t_0} \\
&\le A\,t\left(\int_{1}^{\infty} \frac{ds}{s^2} + \int_{t/t_0}^{1} \frac{ds}{s}\right) + \frac{R(t_0)t}{t_0} = \left(A + \frac{R(t_0)}{t_0}\right) t \left(\log\frac{t_0}{t} + 1\right).
\end{aligned}$$

И наконец, если $R(s) \ge B\,s^\gamma$ для всех $0 < \tau < t_0$, то

$$\begin{aligned}
M(t) &\ge B\,t \int_{t/t_0}^{\infty} s^{-1} e^{-s}\,ds + \frac{R(t_0)t}{2t_0} \\
&\ge \frac{B\,t}{e} \int_{t/t_0}^{1} \frac{ds}{s} + \frac{R(t_0)t}{2t_0} = \frac{B\,t}{e}\log\frac{t_0}{t} + \frac{R(t_0)t}{2t_0} \\
&= \frac{B\,t}{e}\left(\log\frac{t_0}{t} + \frac{R(t_o)e}{2B\,t_0}\right) \ge \min\left\{\frac{R(t_0)}{2t_0}, \frac{B}{e}\right\} t \left(\log\frac{t_0}{t} + 1\right).
\end{aligned}$$

Доказательство закончено. □

Из доказанных предложений вытекают доказательства теорем 4.3, 4.4 и 4.5.

5 Анализ в $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_p^n$

5.1 p-Адическая дробная производная

Рассмотрим поле $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел, наделённое p-адической нормой $\|x\|_p$ и p-адической ультраметрикой $d_p(x,y) = \|x-y\|_p$. Пусть μ_p — мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$, нормированная так, что $\mu_p(\mathbb{Z}_p) = 1$. Пусть $\mathcal{V}_c$ — пространство локально постоянных функций на $\mathbb{Q}_p$ с компактным носителем, которые будут рассматриваться как пробные функции на $\mathbb{Q}_p$.

Понятие p-адической дробной производной, тесно связанное с концепцией p-адической квантовой механики, было введено в нескольких работах В. С. Владимирова [58], В. С. Владимирова и И. В. Воловича [59] и В. С. Владимирова, И. В. Воловича и Е. И. Зеленова [60]. В частности, однопараметрическое семейство $\{\mathfrak{D}^\alpha\}_{\alpha>0}$ операторов, называемых операторами дробной производной порядка α, было введено в [58].

Напомним, что преобразование Фурье $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ функции f на самодвойственной локально компактной абелевой группе $\mathbb{Q}_p$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\theta) = \int_{\mathbb{Q}_p} \langle x, \theta\rangle\, f(x) d\mu_p(x),$$

где $x, \theta \in \mathbb{Q}_p$,

$$\langle x, \theta\rangle = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\{x\theta\}\right)$$

и $\{x\theta\}$ — дробная часть p-адического числа $x\theta$ (ср. с (2.36)). Известно, что $\mathcal{F}$ — линейный изоморфизм пространства $\mathcal{V}_c$ на себя.

Определение 5.1. Оператор $(\mathfrak{D}^\alpha, \mathcal{V}_c)$, $\alpha > 0$, определяется через преобразование Фурье на локально компактной абелевой группе $\mathbb{Q}_p$ равенством

$$\widehat{\mathfrak{D}^\alpha f}(\xi) = \|\xi\|_p^\alpha\, \widehat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Вышеупомянутыми авторами было показано, что каждый оператор $(\mathfrak{D}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ можно записать в виде сингулярного интегрального оператора типа Римана–Лиувилля

$$\mathfrak{D}^\alpha f(x) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x) - f(y)}{\|x-y\|_p^{1+\alpha}}\, d\mu_p(y). \tag{5.1}$$

Цель этого пункта, в частности, состоит в том, чтобы показать, что оператор $(\mathfrak{D}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ в действительности является ограничением на $\mathcal{V}_c$ подходящего изотропного лапласиана. Мы используем следующую функцию распределения расстояний:

$$\sigma_\alpha(r) = \exp\left(-\left(\frac{p}{r}\right)^\alpha\right).$$

Обозначим через $\{P_\alpha^t\}$ изотропную полугруппу, связанную с тройкой $(d_p, \mu_p, \sigma_\alpha)$, и пусть $\mathcal{L}_\alpha$ — соответствующий лапласиан.

Теорема 5.2. *Для любого $\alpha > 0$ имеем*

$$(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{V}_c) = (\mathfrak{D}^\alpha\,, \mathcal{V}_c). \tag{5.2}$$

Доказательство. По теореме 3.12 для любого $f \in \mathcal{V}_c$ имеем

$$\mathcal{L}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} (f(x) - f(y))\, J_\alpha(x,y)\, d\mu_p(y),$$

где

$$J_\alpha(x,y) = \int_{d_*(x,y)}^{\infty} \frac{s^{-2} ds}{\mu_p\left(B_s^*(x)\right)}.$$

Как в примере (2.24), имеем

$$d_*(x,y) = \left(\frac{\|x-y\|_p}{p}\right)^\alpha, \tag{5.3}$$

откуда

$$B_s^*(x) = B_{ps^{1/\alpha}}(x).$$

Замена $r = ps^{1/\alpha}$ даёт

$$J_\alpha(x,y) = p^\alpha \int_{\|x-y\|_p}^{\infty} \frac{\alpha r^{-\alpha-1}\, dr}{\mu_p\left(B_r(x)\right)}.$$

Поскольку множество значений метрики $\|x-y\|_p$ есть $\{p^n\}_{k\in\mathbb{Z}}$, из (2.37) получаем, что

$$\mu_p\left(B_r\left(x\right)\right) = p^n, \quad \text{если} \quad p^n \le r < p^{n+1}, \tag{5.4}$$

откуда следует, что при $\|x-y\|_p = p^k$ выполняется

$$\begin{aligned}
\int_{p^k}^{\infty} \frac{\alpha\, r^{-\alpha-1}\, dr}{\mu_p\left(B_r(x)\right)} &= \sum_{n\ge k} \int_{p^n}^{p^{n+1}} \frac{\alpha\, r^{-\alpha-1}\, dr}{\mu_p\left(B_r(x)\right)} \\
&= \sum_{n\ge k} \int_{p^n}^{p^{n+1}} \frac{-dr^{-\alpha}}{p^n} = \sum_{n\ge k} \frac{1}{p^n}\left(\frac{1}{p^{n\alpha}} - \frac{1}{p^{(n+1)\alpha}}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right) \sum_{n\ge k} \frac{1}{p^{n(\alpha+1)}} = \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right) \frac{p^{-k(\alpha+1)}}{1 - p^{-(\alpha+1)}} \\
&= \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{-(\alpha+1)}} \left(\frac{1}{p^k}\right)^{\alpha+1} = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{-(\alpha+1)}} \left(\frac{1}{\|x-y\|_p}\right)^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем тождество

$$J_\alpha(x,y) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \frac{1}{\|x-y\|_p^{\alpha+1}}, \tag{5.5}$$

которое ввиду (5.1) завершает доказательство. □

Тепловое ядро для полугруппы $\{P_\alpha^t\}$ было оценено в примере 2.24. Мы переформулируем эту оценку здесь в виде теоремы.

Теорема 5.3. *Полугруппа $\{P_\alpha^t\}$ допускает непрерывную плотность перехода $p_\alpha(t,x,y)$ относительно меры Хаара μ_p, которая удовлетворяет для всех $t > 0$ и $x, y \in \mathbb{Q}_p$ оценке*

$$p_\alpha(t,x,y) \simeq \frac{t}{\left(t^{1/\alpha} + \|x-y\|_p\right)^{1+\alpha}}. \tag{5.6}$$

Верхняя оценка в (5.6) была также получена другим методом А. Н. Кочубеем [40, Ch. 4.1, Lemma 4.1].

Теорема 5.4. *Полугруппа $\{P_\alpha^t\}$ является переходной тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$. В переходном случае её функция Грина g_α явно задаётся равенством*

$$g_\alpha(x,y) = \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \left\|x-y\right\|_p^{\alpha-1}. \tag{5.7}$$

Формула (5.7) для фундаментального решения оператора $\mathfrak{D}_\alpha$, действующего в пространстве $\mathcal{V}_c'$ распределения, была получена В. С. Владимировым [58, Теорема 1] и А. Н. Кочубеем [40, Ch. 2.2].

Доказательство. Тот факт, что неравенство $\alpha < 1$ равносильно переходности, был показан в примере 2.30. Предполагая, что $\alpha < 1$, в силу (2.45) получаем

$$g_\alpha(x,y) = \int_{d_*(x,y)}^\infty \frac{ds}{\mu_p(B_s^*(x))} = \frac{1}{p^\alpha}\int_{\left\|x-y\right\|_p}^\infty \frac{\alpha r^{\alpha-1}\,dr}{\mu_p\left(B_r(x)\right)}.$$

Полагая $\left\|x-y\right\|_p = p^k$ и используя (5.4), получаем

$$\begin{aligned} g_\alpha(x,y) &= \frac{1}{p^\alpha}\sum_{n\geq k}\int_{p^n}^{p^{n+1}} \frac{dr^\alpha}{p^n} = \frac{1}{p^\alpha}\sum_{n\geq k}\frac{1}{p^n}\left(p^{(n+1)\alpha}-p^{n\alpha}\right) \\ &= \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}}p^{(\alpha-1)k}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

Обозначим через $\mathcal{L}_{\alpha,q}$ порождающий полугруппы $\{P_\alpha^t\}$, действующей в $L^q(\mu_p)$, $1 \leq q < \infty$. Применяя следствие 3.9 и теорему 3.13, получаем следующее.

Теорема 5.5. *Для любого $\alpha > 0$ и $1 \leq q < \infty$ имеем*

$$\operatorname{spec}\mathcal{L}_{\alpha,q} = \{p^{\alpha k} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

Каждое $\lambda_k = p^{\alpha k}$ является собственным значением с бесконечной кратностью.

Доказательство. Нам нужно только показать, что кратность числа λ_k бесконечна. В общей постановке теоремы 3.8 и следствия 3.9 некоторые собственные значения вполне могут иметь конечную кратность, а некоторые нет. Действительно, каждый шар B с минимальным положительным d_*-радиусом ρ порождает конечномерное собственное пространство $\mathcal{H}_B$, состоящее из собственных функций с собственным значением $\frac{1}{\rho}$. Следовательно, собственное значение $\frac{1}{\rho}$ имеет конечную кратность тогда и только тогда, когда имеется только конечное число различных шаров d_*-радиуса ρ.

В настоящей постановке в $\mathbb{Q}_p$ имеется бесконечно много непересекающихся шаров одного и того же радиуса ρ, так как все они получаются сдвигами одного такого шара. Таким образом, все собственные значения имеют бесконечную кратность. □

Пусть $\{X_t\}$ — марковский процесс на $\mathbb{Q}_p$, управляемый марковской полугруппой $\{P_\alpha^t\}_{t>0}$. Полугруппа инвариантна относительно сдвигов, откуда следует, что процесс обладает независимыми и стационарными приращениями. Для любых заданных $\gamma > 0$ и $t > 0$ рассмотрим момент порядка γ процесса $\mathcal{X}_t$, определённого в терминах p-адического расстояния $d_p(x, y)$:

$$\mathcal{M}_\gamma(t) = \mathbb{E}(\|\mathcal{X}_t\|_p^\gamma),$$

где $\mathbb{E}$ — математическое ожидание относительно вероятностной меры на пространстве траекторий процесса, начинающегося в 0. Применяя теорему 4.3 и используя соотношение (5.3) между d_* и $\|\cdot\|_p$, получаем следующие оценки.

Теорема 5.6. *Момент $\mathcal{M}_\gamma(t)$ конечен тогда и только тогда, когда $\gamma < \alpha$. В этом случае выполняется*

$$\frac{\kappa\, t^{\gamma/\alpha}}{\alpha - \gamma} \le \mathcal{M}_\gamma(t) \le \frac{\alpha\, t^{\gamma/\alpha}}{\alpha - \gamma}.$$

5.2 Инвариантные относительно вращений марковские полугруппы

Пусть $\{P_t\}_{t\ge 0}$ — симметричная инвариантная относительно сдвигов марковская полугруппа на аддитивной абелевой группе $\mathbb{Q}_p$. Эта полугруппа действует в $C_0(\mathbb{Q}_p)$ — банаховом пространстве непрерывных функций, обращающихся в нуль на ∞. Следовательно, существует слабо непрерывная свёрточная полугруппа $\{p_t\}_{t>0}$ симметричных вероятностных мер на $\mathbb{Q}_p$ такая, что

$$P_t f(x) = p_t * f(x). \tag{5.8}$$

Так как вероятностные меры p_t симметричны, выполняется следующее тождество, которое является основным в теории бесконечно делимых распределений:

$$\widehat{p_t}(\zeta) = \exp\left(-t\,\Psi(\zeta)\right),$$

где $\Psi : \mathbb{Q}_p \mapsto \mathbb{R}_+$ — неотрицательно определённая симметрическая функция на $\mathbb{Q}_p$. По формуле Леви–Хинчина выполняется

$$\Psi(\zeta) = \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} (1 - \mathrm{Re}\langle x, \zeta\rangle)\; d\mathfrak{J}(x),$$

где $\mathfrak{J}$ — симметричная мера Радона на $\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ — мера Леви, связанная с неотрицательно определённой функцией Ψ (см. подробности в книге К. Берга и Г. Форста [10]).

Определение 5.7. Для любого $a \in \mathbb{Q}_p$ с $\|a\|_p = 1$ определим оператор вращения $\theta_a : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ by $\theta_a(x) = ax$. Будем говорить, что описанная выше марковская полугруппа $\{P_t\}$ *инвариантна относительно вращений*, если

$$\theta_a(p_t) = p_t \;\text{ для всех } a \in \mathbb{Q}_p \text{ с } \|a\|_p = 1, \tag{5.9}$$

Пусть $\mathcal{L}$ — (положительно определённый!) порождающий полугруппы P_t, т. е. $P_t = \exp(-t\mathcal{L})$. Легко видеть, что (5.9) равносильно $\theta_a \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \theta_a$. В этом случае будем также говорить, что $\mathcal{L}$ инвариантен относительно вращений. По построению любая изотропная марковская полугруппа $\{P^t\}$, определённая на ультраметрическом пространстве с мерой $(\mathbb{Q}_p, d_p, \mu_p)$, инвариантна относительно вращений. Как мы увидим, класс всех изотропных марковских полугрупп действительно является собственным подмножеством класса инвариантных относительно вращений марковских полугрупп.

Предположим, что полугруппа $\{P_t\}$ инвариантна относительно вращений. Тогда для всех a таких, что $\|a\|_p = 1$, имеем

$$\Psi(a\zeta) = \Psi(\zeta) \quad \text{и} \quad \theta_a(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J}. \tag{5.10}$$

Поскольку мера Хаара μ_p каждой сферы строго положительна, из (5.9) и (5.10) следует, что меры p_t и $\mathfrak{J}$ абсолютно непрерывны относительно μ_p и имеют плотности $p_t(x)$ и $J(x)$, зависящие только от $\|x\|_p$. То же верно для функции Ψ, так что

$$J(x) = \mathfrak{j}(\|x\|_p) \quad \text{и} \quad \Psi(\zeta) = \psi(\|\zeta\|_p).$$

Всё вышесказанное показывает, что для порождающего $\mathcal{L}$ полугруппы $\{P_t\}$ имеем $\mathcal{V}_c \subset \mathrm{dom}_{\mathcal{L}}$ и

$$\mathcal{L}u = \psi(\mathfrak{D})u, \quad u \in \mathcal{V}_c, \tag{5.11}$$

где $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^1$ — оператор дробной производной порядка $\alpha = 1$, который мы отождествляем с изотропным лапласианом $\mathcal{L}_1$ по теореме 5.2.

Из (5.11) и (5.2) следует, что собственные функции оператора $(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c)$ в L^2 обладают полной системой собственных функций $\{f_C : C \in \mathcal{K}\}$, как описано в теореме 3.8. Каждому шару B радиуса p^m сопоставляется $(p-1)$-мерное собственное пространство $\mathcal{H}_B$, натянутое на все функции f_C, где C пробегает все шары, являющиеся детьми шара B, и соответствующее собственное значение равно

$$\lambda(m) = \psi(p^{-m+1}).$$

Пусть $\{a(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — последовательность вещественных чисел, удовлетворяющих

$$a(m) \geq a(m+1), \quad a(+\infty) = 0 \quad \text{и} \quad 0 < a(-\infty) = W \leq +\infty. \tag{5.12}$$

Определим последовательность $\{\lambda(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ равенствами

$$\lambda(m) = a(m) - (p-1)^{-1}\{a(m+1) - a(m)\}. \tag{5.13}$$

Теорема 5.8. *Последовательность $\{\lambda(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ вещественных чисел представляет собой спектр* $\mathrm{spec}\,\mathcal{L}$ *инвариантного относительно вращений лапласиана $\mathcal{L}$ на $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда она задана равенствами* (5.13) *с последовательностью $a(m)$, удовлетворяющей* (5.12).

Доказательство. Рассмотрим инвариантный относительно вращений лапласиан $\mathcal{L} = \psi(\mathfrak{D})$. Вычислим неотрицательно определённую функцию $\Psi(\zeta) = \psi(\|\zeta\|_p)$, связанную с $\mathcal{L}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\psi(\|\zeta\|_p) &= \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} (1 - \mathrm{Re}\langle x, \zeta\rangle)\, \mathfrak{j}(\|x\|_p)\, d\mu_p(x) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{j}(p^k) \int_{\{x:\|x\|_p = p^k\}} (1 - \mathrm{Re}\langle x, \zeta\rangle)\, d\mu_p(x).
\end{aligned}$$

Согласно В. С. Владимирову [58, Пример 4] имеем

$$\int_{\{x:\|x\|_p=p^k\}} \langle x,\zeta\rangle\, d\mu_p(x) = \begin{cases} p^k - p^{k-1}, & \text{если} \quad \|\zeta\|_p \le p^{-k}, \\ -p^{k-1}, & \text{если} \quad \|\zeta\|_p = p^{-k+1}, \\ 0, & \text{если} \quad \|\zeta\|_p \ge p^{-k+2}. \end{cases}$$

В частности, имеем

$$\int_{\{x:\|x\|_p=p^k\}} d\mu_p(x) = p^k - p^{k-1}.$$

Пусть $\|\zeta\|_p = p^{-m+1}$; тогда приведённые выше вычисления дают

$$\psi(p^{-m+1}) = \mathfrak{j}(p^m)\, p^m + \left(1-p^{-1}\right) \sum_{k\ge m+1} \mathfrak{j}(p^k)\, p^k. \tag{5.14}$$

Определим невозрастающую последовательность $\{a(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ равенствами

$$a(m) = \left(1-p^{-1}\right) \sum_{k\ge m} \mathfrak{j}(p^k)\, p^k = \left(1-p^{-1}\right) \int_{\{x:\|x\|_p\ge p^m\}} \mathfrak{j}(\|x\|_p)\, d\mu_p(x). \tag{5.15}$$

В силу (5.15) равенства (5.14) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(p^{-m+1}) &= \frac{p}{p-1}\,(a(m)-a(m+1)) + a(m+1) \\ &= a(m) - (p-1)^{-1}\,(a(m+1)-a(m))\}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Пусть $\lambda(m)$ — собственное значение лапласиана $(\psi(\mathfrak{D}),\mathcal{V}_c)$, соответствующее шару B радиуса p^m. Тогда $\lambda(m) = \psi(p^{-m+1})$ и тождество (5.16) даёт желаемый результат, а именно, равенство (5.13).

Обратно, для заданной последовательности $\{a(m)\}$, удовлетворяющей (5.12), определим последовательность $\{\lambda(m)\}$ равенствами 5.13 и положим

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= \psi(\|\xi\|_p), \quad \text{где} \quad \psi(p^m) = \lambda(-m+1), \quad \text{и} \\ J(x) &= \mathfrak{j}(\|x\|_p), \quad \text{где} \quad \mathfrak{j}(p^m) = (a(m)-a(m+1))/\left(p^m - p^{m-1}\right). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Непосредственно показывается, что

$$\Psi(\zeta) = \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} (1 - \mathrm{Re}\langle x,\zeta\rangle)\; J(x)\, d\mu_p(x)\,,$$

откуда следует, что Ψ — неотрицательно определённая функция. Следовательно, функция $\exp(-t\,\Psi)$ положительно определена, откуда следует, что она является преобразованием Фурье вероятностной меры p_t. Ясно, что $\{p_t\}_{t>0}$ — слабо непрерывная свёрточная полугруппа вероятностных мер. По построению каждая мера p_t инвариантна относительно вращений. Наконец, можно определить инвариантную относительно сдвигов марковскую полугруппу $P_t f = f * p_t$, как и требовалось. □

Следствие 5.9. *Во введённых выше обозначениях следующие утверждения равносильны.*

(1) *Последовательность $\lambda(m)$ невозрастающая.*

(2) *Последовательность* $\psi(p^m)$ *неубывающая.*

(3) *Последовательность* $\mathfrak{j}(p^m)$ *невозрастающая.*

В частности, если последовательность $a(m)$ *выпуклая, то выполняется каждое из равносильных свойств* (1)–(3).

Доказательство. Эквивалентность (1) $\Longleftrightarrow$ (2) следует из соотношения $\lambda(m) = \psi(p^{-m+1})$. Чтобы доказать, что (1) $\Longleftrightarrow$ (3), применяем (5.17) и получаем

$$\lambda(m) - \lambda(m+1) = \left(p^m - p^{m-1}\right)\left(\mathfrak{j}(p^m) - \mathfrak{j}(p^{m+1})\right).$$

Отсюда следует эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Наконец, (5.13) и выпуклость $a\,(m)$ дают (1). $\square$

Далее рассмотрим строгую монотонность.

Следствие 5.10. *Следующие утверждения равносильны.*

(i) *Последовательность* $\lambda(m)$ *строго убывает и* $\lambda(-\infty) = +\infty$.

(ii) *Последовательность* $\psi(p^m)$ *строго возрастает и* $\psi(+\infty) = +\infty$.

(iii) *Последовательность* $\mathfrak{j}(p^m)$ *строго убывает и* $\int \mathfrak{j}(\|x\|_p)\, d\mu_p(x) = +\infty$.

(iv) *Соответствующая инвариантная относительно вращений марковская полугруппа* $\{P_t\}$ *изотропна.*

В частности, если последовательность $a(m)$ *строго выпукла и* $a(-\infty) = +\infty$, *то выполняется каждое из равносильных свойств (i)–(iv).*

Доказательство. Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) следует из таких же рассуждений, как в доказательстве следствия 5.9. Выпуклость $a\,(m)$ вместе с равенством $a\,(-\infty) = +\infty$ влекут (i) с помощью тех же рассуждений. Остаётся показать, что (iv) $\Longleftrightarrow$ (ii).

Предположим, что $\{P_t\}$ — изотропная марковская полугруппа, построенная в (1.3)–(1.8). Эта полугруппа допускает непрерывную плотность перехода $p(t,x,y) = p_t(x-y)$ относительно меры Хаара μ_p; функция p_t задаётся равенством

$$p_t(y) = \int_0^\infty q_s(y)\, d\sigma^t(s), \quad \text{где} \;\; q_s(y) = \frac{1}{\mu_p\left(B_s(0)\right)}\,\mathbf{1}_{B_s(0)}(y). \tag{5.18}$$

Чтобы найти преобразование Фурье $\widehat{p_t}(\xi)$, рассуждаем следующим образом. Шар $B_s(0)$, $p^k \le s < p^{k+1}$, является компактной подгруппой $p^{-k}\mathbb{Z}_p$ группы $\mathbb{Q}_p$, откуда следует, что мера $\omega_s = q_s\,\mu_p$ совпадает с нормированной мерой Хаара этой компактной подгруппы. Поскольку для любой локально компактной абелевой группы преобразование Фурье нормированной меры Хаара любой компактной подгруппы является индикатором её аннулирующей группы, а в нашем частном случае аннулятором группы $p^{-k}\mathbb{Z}_p$ является группа $p^k\mathbb{Z}_p$, получаем

$$\widehat{\omega_s}(\xi) = \mathbf{1}_{p^k\mathbb{Z}_p}(\xi) = \mathbf{1}_{[0,p^{-k}]}(\|\xi\|_p), \quad \text{где} \;\; p^k \le s < p^{k+1}.$$

Следовательно, когда $\|\xi\|_p = p^{-l}$, имеем

$$\widehat{p_t}(\xi) = \sum_{k:k\leq l} \left(\sigma^t(p^{k+1}) - \sigma^t(p^k)^t\right) = \sigma^t(p^{l+1}) = \exp\left(-t\,\psi(\|\xi\|_p)\right),$$

откуда

$$\psi(p^{-l}) = \log\frac{1}{\sigma(p^{l+1})}.$$

Согласно (1.5) последовательность $\sigma(p^l)$ предполагается строго возрастающей и стремящейся к нулю при $l \to -\infty$. Таким образом, $\psi(p^m)$ такая, как утверждается в (ii). Обратно, если дана строго возрастающая последовательность $\psi(p^m)$, как в (ii), мы определяем строго возрастающую последовательность

$$\sigma(p^m) = \exp\left(-\psi(p^{-m+1})\right).$$

Пусть $\sigma : [0\,,\,\infty) \to [0\,,\,1)$ — любая возрастающая биекция, принимающая значения $\sigma(p^m)$ в точках p^m. Определим функцию $p_t(y)$ равенством (5.18). Так как $\sigma(+\infty) = 1$, это вероятностная плотность относительно μ_p. Непосредственно ясно, что из $\{p_t\}_{t>0}$ возникает слабо непрерывная свёрточная полугруппа вероятностных мер на $\mathbb{Q}_p$. Более того, каждая p_t инвариантна относительно вращений по построению. Таким образом, полугруппа $P_t : f \mapsto f * p_t$ такая, какая требовалось. □

Замечание 5.11. В [2] С. Албеверио и В. Карвовски начинали с последовательности $\{a(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, как в (5.12), и использовали классический подход обратных и прямых уравнений Колмогорова для построения марковской полугруппы $\{P_t\}$ на ультраметрическом пространстве с мерой $(\mathbb{Q}_p, d_p, \mu_p)$. В частности, они показали в [2, Theorem 3.2 9], что лапласиан $\mathcal{L}$ этой полугруппы обладает чисто точечным спектром $\{\lambda(m)\}$, как в (5.13), и $\lambda(m)$-собственное пространство натянуто на функции f_B, где B пробегает все шары радиуса p^{m-1}. Наша теорема 5.8 показывает, что на самом деле класс марковских полугрупп, построенный в [2], совпадает с классом марковских полугрупп, инвариантных относительно вращений.

5.3 Пространства произведений

Пусть $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$ — конечная последовательность ультраметрических пространств; мы считаем, что все (X_i, d_i) сепарабельны и что все шары компактны. Пусть (X, d) — их декартово произведение: $X = X_1 \times ... \times X_n$ и для $x = (x_i) \in X$ и $y = (y_i) \in Y$ положим

$$d(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, 2, ..., n\}.$$

Таким образом, (X, d) — сепарабельное ультраметрическое пространство, все шары в (X, d) компактны и, более того, каждый d-шар $B_r(a)$ в X является произведением d_i-шаров $B_r^i(a_i)$ в X_i того же радиуса.

Если на каждом (X_i, d_i) задана мера Радона μ_i, определим $\mu = \bigotimes \mu_i$ на (X, d). Пусть $\mathcal{V}_c$ — множество всех локально постоянных функций на (X, d) с компактными носителями.

Рассмотрим ультраметрическое пространство с мерой (X, d, μ). Согласно предыдущим пунктам существует богатый класс изотропных марковских полугрупп и соответствующих лапласианов на (X, d, μ), таких как построенные в (1.3)–(1.8). Благодаря структуре произведения пространства (X, d, μ) можно естественно определить нетривиальный и интересный класс марковских полугрупп и лапласианов, которые *не* изотропны. А именно, выбирая на каждом (X_i, d_i, μ_i) изотропную марковскую полугруппу $\{P_i^t\}$, определим марковскую полугруппу $\{P_t\}$ на (X, d, μ) как тензорное произведение полугрупп $\{P_i^t\}$:

$$P_t = \bigotimes_{i=1}^{n} P_i^t.$$

Полугруппа $\{P_t\}$ имеет следующее тепловое ядро:

$$p(t,x,y) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t, x_i, y_i),$$

где p_i — тепловое ядро полугруппы $\{P_i^t\}$.

Порождающий $\mathcal{L}$ полугруппы P_t можно описать следующим образом: $\mathcal{V}_c \subset \mathrm{dom}_{\mathcal{L}}$ и для любого $f \in \mathcal{V}_c$ имеем

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i f(x) \tag{5.19}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\mathcal{L}_i$ действует на x_i. Следовательно,

$$\mathcal{L}f(x) = \int_X (f(x) - f(y))\ J(x, dy)$$

где

$$J(x, dy) = \sum_{i=1}^{n} J_i(x_i, y_i)\, d\mu_i(y_i)\,,$$

и $J_i(x_i, y_i)$ — скачковое ядро порождающего $\mathcal{L}_i$.

В частности, видим, что для каждого $x \in X$ меры $J(x, dy)$ и $\mu(dy)$ не обязательно взаимно абсолютно непрерывны (в случае, когда хотя бы одно из X_l совершенно, $J(x, dy)$ сингулярно относительно μ), откуда следует, что полугруппа $\{P_t\}$ не обязательно является изотропной марковской полугруппой.

В этой работе мы не собираемся развивать общую теорию о пространствах произведений. Нашей целью является подробное изучение двух конкретных примеров, связанных с p-адическим анализом.

В первом примере мы рассматриваем лапласиан Владимирова, который хорошо согласуется с вышеописанной общей конструкцией. Во втором примере мы рассматриваем лапласиан Тайблсона, определённый в терминах многомерных ядер Рисса, см. книгу М. Х. Тайблсона [56] и работу Х. Родригеса-Вега и В. А. Зунига-Галиндо [51]. Мы покажем, что лапласиан Тайблсона изотропен. Это позволит нам улучшить оценки теплового ядра из [51] и получить некоторые новые результаты (переходность/возвратность, независимость L^p-спектра на $1 \le p < \infty$, точные оценки моментов соответствующего марковского процесса и т. п.)

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times ... \times \mathbb{Q}_p$ над полем $\mathbb{Q}_p$ и определим в $\mathbb{Q}_p^n$ норму

$$\|z\|_p = \max\left\{\|z_i\|_p : i = 1, 2, ..., n\right\}. \tag{5.20}$$

Ясно, что она удовлетворяет ультраметрическому неравенству треугольника (1.1) и является однородной в следующем смысле:

$$\|az\|_p = \|a\|_p \|z\|_p \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{Q}_p,\ z \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Положим

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p,$$

так что $(\mathbb{Q}_p^n, d_p)$ — ультраметрическое пространство.

Пусть $\mu_p = \bigotimes \mu_{p,i}$ — аддитивная мера Хаара на абелевой группе $\mathbb{Q}_p^n$. Как и ранее, пусть $\mathcal{V}_c$ — множество всех локально постоянных функций с компактными носителями на ультраметрическом пространстве $(\mathbb{Q}_p^n, d_p)$. Напомним, что $\mathcal{V}_c$ — всюду плотное подмножество в $L^2 = L^2(\mathbb{Q}_p^n, \mu_p)$.

5.3.1 Лапласиан Владимирова

Для любого данного n-кортежа $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с элементами $\alpha_i > 0$ определим ультраметрику

$$d_{p,\alpha}(x, y) = \max\left\{\|x_i - y_i\|_p^{\alpha_i} : i = 1, 2, ..., n\right\}.$$

В частности, ультраметрика $d_p(x, y)$, определённая выше, соответствует случаю $\alpha = (1, ..., 1)$. Тождественное отображение

$$\left(\mathbb{Q}_p^n, d_{p,\alpha}\right) \to \left(\mathbb{Q}_p^n, d_p\right)$$

является гомеоморфизмом, но не билипшицево, если только не выполняется $\alpha_i = 1$ для всех i. Этот факт играет существенную роль в изучении класса лапласианов, которые вводятся далее как специальный случай лапласианов (5.19).

Определение 5.12. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Для любой функции $f \in \mathcal{V}_c$ определим оператор

$$\mathfrak{V}^\alpha f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{D}_{x_i}^{\alpha_i} f(x),$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а $\mathfrak{D}_{x_i}^{\alpha_i}$ — p-адическая дробная производная порядка α_i, действующая на x_i.

Оператор $\mathfrak{V}^\alpha$ на $\mathbb{Q}_p^3$ с $\alpha = (2, 2, 2)$ был введён В. С. Владимировым [58] в качестве аналога классического оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Этот оператор, который мы сокращённо обозначаем через $\mathfrak{V}^2$, инвариантен относительно сдвигов и однороден, т. е.

$$\mathfrak{V}^2 \tau_y(f) = \tau_y(\mathfrak{V}^2 f), \quad \text{где} \quad \tau_y f(x) = f(x + y),$$

и

$$\mathfrak{V}^2 \theta_a(f) = \|a\|_p^2 \theta_a(\mathfrak{V}^2 f), \quad \text{где} \quad \theta_a f(x) = f(ax_1, ax_2, ax_3).$$

Следовательно, функция Грина $g(x, y)$ оператора $\mathfrak{V}^2$ на $\mathbb{Q}_p^3$ также инвариантна относительно сдвигов и однородна:

$$g(x, y) = g(x - z, y - z) \quad \text{и} \quad g(ax, ay) = g(x, y)/\|a\|_p,\ a \in \mathbb{Q}_p.$$

В частности, полагая $\mathfrak{E}(x) = g(x, 0)$, получаем для всех ненулевых $a \in \mathbb{Q}_p$ тождество

$$\mathfrak{E}(a, a, a) = \frac{\mathfrak{E}(1, 1, 1)}{\|a\|_p}.$$

Это тождество было отмечено в [58]. Оно даёт представление о том, как функция Грина оператора $\mathfrak{V}^2$ (в терминологии В. С. Владимирова, фундаментальное решение уравнения $\mathfrak{V}^2\,\mathfrak{E}=\delta$) ведёт себя на бесконечности/в нуле. Ниже, в предложении 5.15, мы докажем, что для всех ненулевых $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{Q}_p^3$ справедливо

$$\mathfrak{E}(a_1,a_2,a_3)\simeq\frac{1}{\|a\|_p}. \tag{5.21}$$

По существу мы докажем аналогичную оценку для более общих операторов $\mathfrak{V}^\alpha$ без свойства однородности. Начнём с перечисления некоторых свойств оператора $(\mathfrak{V}^\alpha,\mathcal{V}_c)$ из определения 5.12, которые вытекают непосредственно из соответствующих свойств "одномерных лапласианов" $\mathfrak{D}^{\alpha_i}$.

1. Оператор $(\mathfrak{V}^\alpha,\mathcal{V}_c)$ является неотрицательно определённым симметричным оператором.

2. Оператор $(\mathfrak{V}^\alpha,\mathcal{V}_c)$ допускает полную систему собственных функций с компактными носителями. В частности, оператор $(\mathfrak{V}^\alpha,\mathcal{V}_c)$ является существенно самосопряжённым.

3. Полугруппа $\exp(-t\,\mathfrak{V}^\alpha)$ симметрична и марковская. Она допускает тепловое ядро $p_\alpha(t,x,y)$, имеющее следующий вид:
$$p_\alpha(t,x,y)=\prod_{i=1}^{n}p_{\alpha_i}(t,x_i,y_i).$$

4. Полугруппа $\exp(-t\,\mathfrak{V}^\alpha)$ является переходной тогда и только тогда, когда $A>1$.

5. Для всех $f\in\mathcal{V}_c$ справедливо
$$\mathfrak{V}^\alpha f(x)=\int_{\mathbb{Q}_p^n}\left(f(x)-f(y)\right)\,J_\alpha(x,dy),$$
где
$$J_\alpha(x,dy)=\sum_{i_1}^{n}J_{\alpha_i}(x_i-y_i)\,d\mu_{p,i}(y_i)$$
и
$$J_{\alpha_i}(x_i-y_i)=\frac{p^{\alpha_i}-1}{1-p^{-\alpha_i-1}}\frac{1}{\|x_i-y_i\|_p^{1+\alpha_i}}\,.$$

В частности, полугруппа $\exp(-t\,\mathfrak{V}^\alpha)$ в общем случае не является изотропной марковской полугруппой.

Заметим, что благодаря групповой структуре $\mathbb{Q}_p^n$ функции $(x,y)\mapsto p_\alpha(t,x,y)$ и $(x,y)\mapsto g_\alpha(x,y)$ инвариантны относительно сдвигов. Отсюда следует, что полагая
$$p_\alpha(t,z)=p_\alpha(t,z,0)\quad\text{и}\quad g_\alpha(z)=g_\alpha(z,0)\,,$$
мы получим
$$p_\alpha(t,x,y)=p_\alpha(t,x-y)\quad\text{и}\quad g_\alpha(x,y)=g_\alpha(x-y).$$

Предложение 5.13. *Пусть*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}.$$

Тогда тепловое ядро удовлетворяет следующей оценке:

$$p_\alpha(t,z) \simeq t^{-A} \prod_{i=1}^{n} \min\left\{1, \frac{t^{1+1/\alpha_i}}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}}\right\} \tag{5.22}$$

равномерно для всех $t > 0$ и $z \in \mathbb{Q}_p^n$. В частности, для всех $t > \|z\|_{p,\alpha}$ выполняется

$$p_\alpha(t,z) \simeq t^{-A} \tag{5.23}$$

Доказательство. По теореме 5.3 имеем

$$p_{\alpha_i}(t,z_i) \simeq \frac{t}{\left(t^{1/\alpha_i} + \|z_i\|_p\right)^{1+\alpha_i}} \simeq \frac{1}{t^{1/\alpha_i}} \min\left\{1, \frac{t^{1+1/\alpha_i}}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}}\right\},$$

откуда следует утверждение. □

Предложение 5.14. *Полугруппа* $\exp(-t\,\mathfrak{V}^\alpha)$ *является переходной тогда и только тогда, когда $A > 1$. Если $A > 1$, то для всех $z \in \mathbb{Q}_p^n$ и некоторого $C_1 > 0$ выполняется*

$$g_\alpha(z) \geq C_1 \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}}\right)^{A-1}.$$

Для любого $\kappa > 0$ определим множество

$$\Omega(\kappa) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p^n : \max_i \left\{\|x_i\|_p^{\alpha_i}\right\} \leq \kappa \min_i \left\{\|x_i\|_p^{\alpha_i}\right\}\right\}.$$

Тогда для всех $z \in \Omega(\kappa)$ и некоторой постоянной $C_2 > 0$, зависящей от κ, выполняется

$$g_\alpha(z) \leq C_2 \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}}\right)^{A-1}.$$

Доказательство. Критерий переходности $A > 1$ следует из соотношения $p_a(t,x,x) \simeq t^{-A}$. Чтобы доказать нижнюю оценку, воспользуемся (5.23) и запишем

$$g_\alpha(z) = \int_0^\infty p_\alpha(t,z)\,dt \geq \int_{\|z\|_{p,\alpha}}^\infty p_\alpha(t,z)\,dt \geq C_1 \int_{\|z\|_{p,\alpha}}^\infty t^{-A}\,dt = c_1 \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}}\right)^{A-1}.$$

С другой стороны, имеем

$$g_\alpha(z) = \left(\int_0^{\|z\|_{p,\alpha}} + \int_{\|z\|_{p,\alpha}}^\infty\right) p_\alpha(t,z)\,dt =: I + II.$$

Чтобы оценить второй член II, снова воспользуемся (5.23):

$$II \simeq \int_{\|z\|_{p,\alpha}}^\infty t^{-A}\,dt \simeq \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}}\right)^{A-1}.$$

Чтобы оценить первый член, воспользуемся (5.22):

$$
\begin{aligned}
I &\le c\int_0^{\|z\|_{p,\alpha}} t^{-A}\prod_{i=1}^n \frac{t^{1+1/\alpha_i}}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}}\,dt \\
&= c\int_0^{\|z\|_{p,\alpha}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}} t^n\,dt = c'\prod_{i=1}^n \frac{1}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}}\,\|z\|_{p,\alpha}^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Когда $z\in\Omega(\kappa)$, получаем

$$
\begin{aligned}
I &\le c''\prod_{i=1}^n \frac{1}{\|z_i\|_p^{1+\alpha_i}}\left(\min\left\{\|z_i\|_p^{\alpha_i}\right\}\right)^{n+1} \le c''\min\left\{\|z_i\|_p^{\alpha_i}\right\}\prod_{i=1}^n \frac{1}{\|z_i\|_p} \\
&= c''\min\left\{\|z_i\|_p^{\alpha_i}\right\}\prod_{i=1}^n \frac{1}{(\|z_i\|_p^{\alpha_i})^{1/\alpha_i}}.
\end{aligned}
$$

Далее,

$$
\prod_{i=1}^n \frac{1}{(\|z_i\|_p^{\alpha_i})^{1/\alpha_i}} \le \prod_{i=1}^n \frac{1}{\left(\min\left\{\|z_j\|_p^{\alpha_j}\right\}\right)^{1/\alpha_i}} = \left(\frac{1}{\min\left\{\|z_j\|_p^{\alpha_j}\right\}}\right)^A,
$$

откуда следует

$$
I \le c''\left(\frac{1}{\min\left\{\|z_j\|_p^{\alpha_j}\right\}}\right)^{A-1}.
$$

Снова используя тот факт, что $z\in\Omega(\kappa)$, запишем

$$
\left(\frac{1}{\min\left\{\|z_j\|_p^{\alpha_j}\right\}}\right)^{A-1} \le \left(\frac{\kappa}{\max\left\{\|z_j\|_p^{\alpha_j}\right\}}\right)^{A-1} = c(\kappa)\left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}}\right)^{A-1}.
$$

Из полученных верхних оценок интегралов I и II следуют требуемые верхние оценки для $g_\alpha(z)$. □

Предложение 5.15. *Пусть $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(\beta,\ldots,\beta)$ — n-кортеж, в котором все элементы равны β. Предположим, что $(n-1)/2<\beta<n$. Тогда полугруппа $\exp(-t\,\mathfrak{V}^\alpha)$ является переходной и функция Грина $g_\alpha(z)$ удовлетворяет оценкам*

$$
g_\alpha(z)\simeq\left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}}\right)^{A-1} \tag{5.24}
$$

для всех $z\in\mathbb{Q}_p^n$ и некоторых $c_1,c_2>0$.

Поскольку $A=\frac{n}{\beta}$ и $\|z\|_{p,\alpha}=\|z\|_p^\beta$, оценка (5.24) равносильна оценке

$$
g_\alpha(z)\simeq\left(\frac{1}{\|z\|_p}\right)^{n-\beta}. \tag{5.25}
$$

Доказательство. Переходность следует из предложения 5.14, потому что $A = n/\beta > 1$. То же предложение даёт требуемую нижнюю оценку функции Грина. Чтобы доказать верхнюю оценку, заметим, что лапласиан $\mathfrak{V}^\alpha$ однороден, т. е.

$$\mathfrak{V}^\alpha \circ \theta_a = \|a\|_p^\beta \cdot \theta_a \circ \mathfrak{V}^\alpha$$

для всех $a \in \mathbb{Q}_p$. Отсюда следует, что функция Грина $g_\alpha(z)$ также однородна, т. е.

$$g_\alpha(az) = \|a\|_p^{n-\beta} g_\alpha(z)$$

для всех $a \in \mathbb{Q}_p$ и $z \in \mathbb{Q}_p^n$.

Без ограничения общности предположим, что $\|z\|_{p,\alpha} = \|z_1\|_p^\beta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} g_\alpha(z) &= g_\alpha\left(z_1(1, z_2/z_1, ..., z_n/z_1)\right) = \|z_1\|_p^{n-\beta} g_\alpha(1, z_2/z_1, ..., z_n/z_1) \\ &= \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}}\right)^{A-1} g_\alpha(1, z_2/z_1, ..., z_n/z_1) \\ &\leq \left(\frac{1}{\|z\|_{p,\alpha}}\right)^{A-1} \sup\left\{g_\alpha(1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{Z}_p\right\}. \end{aligned}$$

Далее применим наше предположение $\beta > (n-1)/2$ и получим из (5.22), что

$$\begin{aligned} g_\alpha(1, x_2, ..., x_n) &= \int_0^\infty p_\alpha(t, (1, x_2, ..., x_n)\, dt \\ &= \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) p_\alpha(t, (1, x_2, ..., x_n)\, dt \\ &\leq c \int_0^1 t^{-\frac{n}{\beta}} t^{1+\frac{1}{\beta}}\, dt + c' \int_1^\infty t^{-\frac{n}{\beta}}\, dt = c_2 < \infty, \end{aligned}$$

откуда следует требуемая верхняя оценка. □

5.3.2 Лапласиан Тайблсона

Преобразование Фурье $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ функции f на локально компактной абелевой группе $\mathbb{Q}_p^n$ определяется формулой

$$\widehat{f}(\theta) = \int_{Q_p^n} \langle x, \theta \rangle\, f(x) d\mu_p^n(x),$$

где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Q}_p^n$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n) \in (\mathbb{Q}_p^n)^* = \mathbb{Q}_p^n$,

$$\langle x, \theta \rangle = \prod_{k=1}^n \langle x_k, \theta_k \rangle,$$

и $d\mu_p^n(x) = d\mu_p(x_1)...d\mu_p(x_n)$ — мера Хаара на $\mathbb{Q}_p^n$. Известно, что $\mathcal{F}$ — линейный изоморфизм из $\mathcal{V}_c$ на себя, что оправдывает следующее определение (ср. с определением 5.1).

Определение 5.16. *Оператор Тайблсона $\mathfrak{T}^\alpha$ для $\alpha > 0$ определяется на функциях $f \in \mathcal{V}_c$ формулой*

$$\widehat{\mathfrak{T}^\alpha f}(\zeta) = \|\zeta\|_p^\alpha \widehat{f}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Следовательно, $(\mathfrak{T}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ — существенно самосопряжённый и неотрицательно определённый оператор в L^2. Этот оператор был введён М. Х. Тайблсоном [56], а связанная с ним полугруппа $\exp(-t\,\mathfrak{T}^\alpha)$ изучалась Х. Родригесом-Вега и В. А. Зунига-Галиндо [51]. В частности, было показано, что

$$\mathfrak{T}^\alpha f(x) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-n}} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{f(x) - f(y)}{\|x-y\|_p^{\alpha+n}}\, d\mu_p^n(y). \tag{5.26}$$

Из равенства (5.26) вытекает, что оператор $(-\mathfrak{T}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ удовлетворяет принципу максимума, откуда следует, что его полугруппа марковская. Наша цель — показать, что $\exp(-t\,\mathfrak{T}^\alpha)$ является изотропной марковской полугруппой на ультраметрическом пространстве с мерой $(\mathbb{Q}_p^n, d_p, \mu_p^n)$.

Наше первое замечание состоит в том, что спектр симметричного оператора $(\mathfrak{T}^\alpha, \mathcal{V}_c)$ совпадает с областью значений функции $\zeta \mapsto \|\zeta\|_p^\alpha$:

$$\operatorname{spec} \mathfrak{T}^\alpha = \{p^{k\alpha} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

Собственное пространство $\mathcal{H}(\lambda)$ оператора $(\mathfrak{T}^\alpha, \mathcal{V}_c)$, соответствующее собственному значению $\lambda = p^{k\alpha}$, натянуто на функцию

$$f_k = \frac{1}{\mu_p^n(p^k\mathbb{Z}_p^n)} \mathbf{1}_{p^k\mathbb{Z}_p^n} - \frac{1}{\mu_p^n(p^{k-1}\mathbb{Z}_p^n)} \mathbf{1}_{p^{k-1}\mathbb{Z}_p^n}$$

и все её сдвиги $f_k(\cdot + a)$ при $a \in \mathbb{Q}_p^n \big/ p^k\mathbb{Z}_p^n$. Действительно, вычисляя преобразование Фурье функции f_k

$$\widehat{f}_k(\zeta) = \mathbf{1}_{\{\|\zeta\|_p \le p^k\}} - \mathbf{1}_{\{\|\zeta\|_p \le p^{k-1}\}} = \mathbf{1}_{\{\|\zeta\|_p = p^k\}},$$

получаем

$$\widehat{\mathfrak{T}^\alpha f_k}(\zeta) = \|\zeta\|_p^\alpha \widehat{f}_k(\zeta) = p^{k\alpha} \widehat{f}_k(\zeta).$$

Всё вышеизложенное показывает, что оператор $\mathfrak{T}^\alpha$ совпадает с изотропным лапласианом $\mathcal{L}_\alpha$ на $(\mathbb{Q}_p^n, d_p, \mu_p^n)$, связанным с функцией распределения расстояний

$$\sigma_\alpha(r) = \exp\left(-\left(\frac{p}{r}\right)^\alpha\right),$$

а полугруппа $\exp(-t\,\mathfrak{T}^\alpha)$ совпадает с изотропной полугруппой $\{P_\alpha^t\}$.

Заметим, что соответствующая внутренняя ультраметрика есть

$$d_{p*}(x,y) = \left(\frac{\|x-y\|_p}{p}\right)^\alpha.$$

Функция спектрального распределения $N_\alpha(x,\tau) = N_\alpha(\tau)$ является неубывающей непрерывной слева ступенчатой функцией, имеющей скачки в точках $\tau_k = p^{k\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}$, и принимающей значения $N_\alpha(\tau_k) = p^{(k-1)n}$ в этих точках. Следовательно,

$$N_\alpha(\tau) \simeq \tau^{n/\alpha}.$$

В частности, $\tau \mapsto N_\alpha(\tau)$ — удваивающая функция, и из теоремы 2.14 вытекает следующий результат.

Теорема 5.17. *Полугруппа* $\exp(-t\,\mathfrak{T}^\alpha)$ *на* $\mathbb{Q}_p^n$ *допускает непрерывное тепловое ядро* $p_\alpha(t,x,y)$, *удовлетворяющее оценке*

$$p_\alpha(t,x,y) \simeq \frac{t}{\left(t^{1/\alpha} + \|x-y\|_p\right)^{n+\alpha}}. \tag{5.27}$$

В частности, полугруппа $\exp(-t\,\mathfrak{T}^\alpha)$ *является переходной тогда и только тогда, когда* $\alpha < n$. *В переходном случае функция Грина (=риссово ядро Тайблсона) удовлетворяет тождеству*

$$g_\alpha(x,y) = \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-n}}\,\frac{1}{\|x-y\|_p^{n-\alpha}}.$$

Заметим, что верхняя оценка в (5.27) была доказана в [51].

Определение 5.7 инвариантного относительно вращений лапласиана на $\mathbb{Q}_p$ можно перенести на $\mathbb{Q}_p^n$. Оператор Тайблсона $\mathfrak{T}^\alpha$ является примером инвариантного относительно вращений лапласиана. Теорема 5.8, следствия 5.9 и 5.10 и их доказательства остаются справедливыми также для $\mathbb{Q}_p^n$. Здесь мы дадим короткое доказательство немного более слабого результата, имеющего значение для нас. Положим $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^1$.

Теорема 5.18. *Равенство* $(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c) = (\psi(\mathfrak{T}), \mathcal{V}_c)$, *где* ψ *— произвольная возрастающая биекция* $[0\,,\,\infty) \to [0\,,\,\infty)$, *даёт полное описание класса изотропных лапласианов на ультраметрическом пространстве с мерой* $(\mathbb{Q}_p^n, d_p, \mu_p^n)$.

Доказательство. Пусть $\psi : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ — возрастающая биекция. По теореме 3.1 оператор $(\psi(\mathfrak{T}), \mathcal{V}_c)$ является изотропным лапласианом.

Обратно, пусть $(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c)$ — изотропный лапласиан на $(\mathbb{Q}_p^n, d_p, \mu_p^n)$. Пусть d_{p*} — внутреннее расстояние, связанное с $\mathcal{L}$. По построению d_{p*} является возрастающей функцией от d_p, см. (2.14). Поскольку область значений d_p есть множество $\{p^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, можно выбрать возрастающую биекцию $\varphi : [0\,,\,\infty) \to [0\,,\,\infty)$ такую, что $d_{p*} = \phi(d_p)$. Пусть $\lambda(B)$ и $\tau(B)$ — собственные значения соответственно операторов $(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c)$ и $(\mathfrak{T}, \mathcal{V}_c)$, соответствующие шару $B \subset \mathbb{Q}_p^n$. Поскольку внутреннее расстояние, связанное с $\mathfrak{T}$, есть $p^{-1}d_p$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda(B) &= \frac{1}{\mathrm{diam}_{p*}(B)} = \frac{1}{\varphi\left(\mathrm{diam}_p(B)\right)} \\ &= \frac{1}{\varphi\left(p/\tau(B)\right)} =: \psi\left(\tau(B)\right), \end{aligned}$$

где $\psi(s) = 1/\phi(p/s)$ — возрастающая биекция множества $[0\,,\,\infty)$ на себя.

Поскольку и $(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c)$, и $(\psi(\mathfrak{T}), \mathcal{V}_c)$ — изотропные лапласианы, определённые на ультраметрическом пространстве с мерой $(\mathbb{Q}_p^n, d_p, \mu_p^n)$, у которых множества собственных значений совпадают, мы получаем

$$(\mathcal{L}, \mathcal{V}_c) = (\psi(\mathfrak{T}), \mathcal{V}_c)$$

или, равносильно, в терминах преобразования Фурье,

$$\widehat{\mathcal{L}f}(\zeta) = \psi(\|\zeta\|_p)\,\widehat{f}(\zeta),$$

для всех $f \in \mathcal{V}_c$ и $\zeta \in \mathbb{Q}_p^n$, что завершает доказательство. $\square$

6 Случайные блуждания на дереве и скачковые процессы на его границе

6.1 Укоренённые деревья и их границы

Дерево — это связный граф T без циклов (замкнутых путей длины ≥ 3). По умолчанию мы отождествляем T с его множеством вершин, которое предполагается бесконечным. Мы пишем $u \sim v$, если $u, v \in T$ являются соседями. Для любой пары вершин $u, v \in T$ имеется единственный кратчайший путь, называемый *геодезическим отрезком*,

$$\pi(u, v) = [u = v_0\,, v_1\,, \ldots, v_k = v]$$

такой, что $v_{i-1} \sim v_i$ и все v_i различны. Если $u = v$, то это *пустой* или *тривиальный* путь. Число k — *длина* пути (графовое расстояние между u и v). В дереве T выберем и зафиксируем *корневую вершину* o. Мы обозначаем через $|v|$ длину $\pi(o, v)$. Выбор корня индуцирует частичный порядок на T, где $u \leq v$, когда $u \in \pi(o, v)$. Каждая $v \in T \setminus \{o\}$ имеет единственного *предшественника* $v^- = v_o^-$ относительно o, который является единственным соседом вершины v на $\pi(o, v)$. Таким образом, множество всех (неориентированных) рёбер графа T есть

$$E(T) = \{[v^-, v] : v \in T\,,\ v \neq o\}\,.$$

Для $u \in T$ элементы множества

$$\{v \in T : v^- = u\}$$

являются *последователями* вершины u, а его мощность $\deg^+(u)$ есть *исходящая степень* вершины u.

В этом и следующем пункте мы считаем, что

$$2 \leq \deg^+(u) < \infty \quad \text{для каждой вершины} \;\; u \in T\,. \tag{6.1}$$

(Геодезический) луч в T — это односторонний бесконечный путь $\pi = [v_0\,, v_1\,, v_2\,, \ldots]$ такой, что $v_{n-1} \sim v_n$ и все v_n различны. Два луча *эквивалентны*, если их симметрическая разность (как множеств вершин) конечна. *Конец* дерева T — это класс эквивалентности лучей. Мы будем обычно использовать символы x, y, z для обозначения концов (и символы u, v, w для вершин). Множество всех концов дерева T обозначается через ∂T. Это *граница* дерева на бесконечности. Для любых $u \in T$ и $x \in \partial T$ имеется единственный луч $\pi(u, x)$, представляющий конец (класс эквивалентности) x и начинающийся в u. Мы пишем

$$\widehat{T} = T \cup \partial T.$$

Для $u \in T$ *ветвь дерева* T*, укоренённая в* u — это поддерево T_u, которое мы отождествляем с множеством его вершин

$$T_u = \{v \in T : u \leq v\}\,, \tag{6.2}$$

так что $T_o = T$. Мы обозначаем через ∂T_u множество всех концов дерева T, которые обладают представляющим путём, содержащимся в T_u, и обозначаем $\widehat{T}_u = T_u \cup \partial T_u$.

Для $w, z \in \widehat{T}$ определим их *конфлюэнт* $w \wedge z = w \wedge_o z$ относительно корня o соотношением

$$\pi(o, w \wedge z) = \pi(o, w) \cap \pi(o, z) .$$

Это последний общий элемент на геодезических $\pi(o, w)$ и $\pi(o, z)$, вершина дерева T, если только не выполняется $w = z \in \partial T$; см. рис. 4.

Один из наиболее распространённых способов определения ультраметрики на $\widehat{T}$ таков:

$$d_e(z, w) = \begin{cases} 0, & \text{если } z = w \,, \\ e^{-|z \wedge w|}, & \text{если } z \neq w \,. \end{cases} \tag{6.3}$$

Тогда $\widehat{T}$ компактно, а T открыто и всюду плотно. Нас в основном интересует компактное ультраметрическое пространство ∂T. В метрике d_e из (6.3) каждый d_e-шар с центром $x \in \partial T$ имеет вид ∂T_u для некоторого $x \in \pi(o, x)$. Действительно,

$$\partial T_u = B_{e^{-|u|}}(x) \quad \text{для каждой } u \in \pi(o, x) \quad \text{и} \quad \Lambda_{d_e}(x) = \{e^{-|u|} : u \in \pi(o, u)\} .$$

Обратно, можно начать с компактного ультраметрического пространства (X, d), не имеющего изолированных точек, и построить дерево T следующим образом: множество вершин T — это множество

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in X \,,\ r > 0\}$$

всех замкнутых шаров в (X, d), которое уже встречалось в §3. Здесь можно (при желании) считать, что $r \in \Lambda_d(x)$.

Теперь рассмотрим любой шар $v = B \in \mathcal{B}$ как вершину дерева T. Выберем нашу корневую вершину как $o = X$; она принадлежит $\mathcal{B}$ в силу компактности. Окрестность задаётся отношением предшественников шаров, как в определении 3.6. То есть, если $v = B$, то $u = B'$ — предшественник v^- вершины v в дереве T. В силу компактности, каждый x имеет только конечное число последователей, а так как в X нет изолированных точек, у каждой вершины есть хотя бы 2 последователя, так что выполняется (6.1).

Это определяет структуру дерева. Для любого $x \in X$ множество всех шаров $B_r(x)$, $r \in \Lambda_d(x)$, упорядоченное по убыванию, образует множество вершин луча в T, начинающегося в o. В качестве несложного упражнения можно показать, что отображение, сопоставляющее точке x конец дерева T, представленный этим лучом, является гомеоморфизмом из X на ∂T. Таким образом, можно отождествить X и ∂T как ультраметрические пространства.

При этом отождествлении, если первоначально вершина u интерпретировалась как шар $B_r(x)$, $r \in \Lambda_d(x)$, то множество ∂T_u концов ветви T_u просто совпадает с шаром $B_r(x)$. То есть мы отождествляем каждую вершину u дерева T с множеством ∂T_u.

Если начать с произвольного локально конечного дерева и рассмотреть его пространство концов как ультраметрическое пространство X, то вышеприведённая конструкция не восстанавливает вершины с исходящей степенью 1, так что в общем случае мы не получим обратно то дерево, с которого начали. Однако вышеприведённая конструкция устанавливает биективное соответствие между компактными ультраметрическими пространствами без изолированных точек (совершенными ультраметрическими пространствами) и локально конечными укоренёнными деревьями с исходящими степенями ≥ 2 (ср. с [33]).

Хорошо известно, что любое ультраметрическое пространство X, которое и компактно, и совершенно, гомеоморфно тернарному канторову множеству $C \subset [0,1]$. Когда X не компактно, но всё ещё совершенно, имеется гомеоморфизм $X \simeq C \setminus \{p\}$, где $p \in C$ — любая фиксированная точка.

До конца этого и следующего пункта мы отказываемся от обозначения X для компактного и совершенного ультраметрического пространства.

Мы рассматриваем X как границу ∂T локально конечного укоренённого дерева с исходящей степенью ≥ 2.

В конце мы обсудим, как можно работать при наличии вершин с исходящей степенью 1, а также в некомпактным случае.

Есть много способов, как снабдить ∂T ультраметрикой, которая будет определять ту же самую топологию и те же компактные-открытые шары ∂T_x, $x \in T$, возможно с другими радиусами, что и стандартная метрика (6.3). Следующее определение является своего рода ультраметрическим аналогом элемента длины.

Определение 6.1. Пусть T — локально конечное укоренённое дерево T, в котором $\deg^+(x) \geq 2$ для всех x. *Ультраметрический элемент* — это функция $\phi : T \to (0\,,\infty)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \phi(v^-) > \phi(v) \quad \text{для каждой } v \in T \setminus \{o\}\,, \\ &\text{(ii)} \quad \lim \phi(v_n) = 0 \quad \text{вдоль каждого геодезического луча } \pi = [v_0\,, v_1\,, v_2\,, \dots]\,. \end{aligned}$$

Такая функция индуцирует ультраметрику d_ϕ на ∂T, задаваемую формулой

$$d_\phi(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y\,, \\ \phi(x \wedge y), & \text{если } x \neq y\,. \end{cases}$$

Шары в этой ультраметрике снова есть множества

$$\partial T_u = B_{\phi(u)}(x)\,, \quad x \in \partial T_u\,.$$

Заметим, что условие (ii) в определении необходимо для того, чтобы каждый конец дерева T был неизолированным в метрике d_ϕ. Метрика d_e из (6.3), конечно, индуцирована ультраметрическим элементом $\phi(x) = e^{-|x|}$.

Лемма 6.2. *Для дерева как в определении 6.1 каждая ультраметрика на ∂T, чьи замкнутые шары являются множествами ∂T_u, $u \in T$, индуцирована ультраметрическим элементом на T.*

Доказательство. Для данной ультраметрики d, удовлетворяющей условию, положим $\phi(v) = \operatorname{diam}(\partial T_v)$, где диаметр берётся относительно метрики d. Поскольку $\deg^+(v^-) \geq 2$ для любого $v \in T \setminus \{o\}$, шар ∂T_{v^-} является объединением по крайней мере двух непересекающихся шаров ∂T_u с $u^- = v^-$. Поэтому должно выполняться $\operatorname{diam}(\partial T_v) < \operatorname{diam}(\partial T_{v^-})$, и свойство (i) выполняется. Поскольку ни один конец не изолирован, ϕ удовлетворяет свойству (ii). Теперь ясно, что $d_\phi = d$. $\square$

Ввиду этого соответствия, в последующем мы заменяем индекс d, указывающий на метрику $d = d_\phi$, индексом ϕ, указывающим на ультраметрический элемент. Заметим, что

$$\operatorname{diam}_\phi(\partial T) = \phi(o)\,, \quad \Lambda_\phi(x) = \{\phi(u) : u \in \pi(o,x)\} \quad \text{и} \quad \Lambda_\phi = \{\phi(v) : v \in T\}. \tag{6.4}$$

Также заметим здесь, что для любых $x \in \partial T$ и $v \in \pi(o,x)$ шары относительно d_ϕ есть

$$B_r(x) = B_r^\phi(x) = \begin{cases} \partial T_v & \text{для } \phi(v) \le r < \phi(v^-)\,, \text{ если } v \ne o; \\ \partial T & \text{для } r \ge \phi(o)\,, \text{ если } v = o\,. \end{cases} \tag{6.5}$$

6.2 Изотропные скачковые процессы на границе дерева

Ввиду вышеприведённых объяснений можно рассматривать изотропные скачковые процессы из (1.3)–(1.8) на $X = \partial T$. Поскольку это пространство компактно, можно считать, что эталонная мера μ является вероятностной мерой на ∂T. Для данных μ, распределения расстояний σ с свойствами (1.5) и ультраметрического элемента ϕ на T можно теперь называть (d_ϕ, μ, σ)-процесс просто (ϕ, μ, σ)-процессом на ∂T. Можно подробно выписать полугруппу и её вероятности перехода следующим образом. Для $x \in \partial T$ и $\pi(0,x) = [o = v_0\,, v_1\,, v_2\,, \dots]$, используя (6.5), получаем

$$P^t f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^t \, \mathrm{Q}_{\phi(v_n)} f(x)\,,$$
$$\text{где } \; c_0^t = 1 - \sigma^t\left(\phi(v_0)\right) \quad \text{и} \quad c_n^t = \sigma^t\left(\phi(v_{n-1})\right) - \sigma^t\left(\phi(v_n)\right) \text{ для } n \ge 1\,.$$

Таким образом, для произвольных $u \in T$ и $x \in \partial T$, как и выше, имеем

$$\mathbb{P}[X_t \in \partial T_u \mid X_0 = x] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^t \, \frac{\mu(\partial T_{v_n} \cap \partial T_u)}{\mu(\partial T_{v_n})}. \tag{6.6}$$

Мы знаем, что есть некоторая свобода в выборе меры σ: любые две меры, у которых функции распределения совпадают на множестве значений Λ_ϕ элемента ϕ, порождают один и тот же процесс. Напомним определение 2.9 стандартного (d,μ)-процесса, который теперь переименуем в стандартный (ϕ,μ)-процесс.

6.3 Случайные блуждания типа ближайшего соседа на дереве

На дереве как на дискретной структуре имеются другие очень хорошо изученные стохастические процессы, а именно, *случайные блуждания.* Наша цель — проанализировать, как они связаны с изотропными скачковыми процессами на границе дерева. Большая часть излагаемого далее материала взята из книги В. Вёсса [64]. Более старая рекомендуемая ссылка — это основополагающая работа П. Картье [12].

Случайное блуждание типа ближайшего соседа на локально конечном бесконечном дереве T индуцируется его стохастической матрицей перехода $\mathcal{P} = \left(p(u,v)\right)_{u,v\in T}$ со свойством, что $p(u,v) > 0$ тогда и только тогда, когда $u \sim v$. Возникающая марковская цепь с дискретным временем (случайное блуждание) обозначается через $(Z_n)_{n\ge0}$. Его n-шаговые вероятности перехода

$$p^{(n)}(u,v) = \mathbb{P}_u[Z_n = v], \quad u,v \in T,$$

есть элементы n-ой степени матрицы $\mathcal{P}$. Обозначение $\mathbb{P}_u$ указывает на вероятностную меру на пространстве траекторий, которая управляет случайным блужданием, начиная с u. Мы предполагаем, что случайное блуждание является *переходным*, т. е. с вероятностью 1 оно посещает любое конечное множество только конечное число раз. Таким образом, $0 < G(u, v) < \infty$ для всех $u, v \in T$, где

$$G(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(u, v)$$

— *ядро Грина* случайного блуждания. Кроме того, мы также будем существенно использовать величины

$$F(u, v) = \mathbb{P}_u[Z_n = v \text{ для некоторого } n \geq 0] \quad \text{и} \quad U(v, v) = \mathbb{P}_v[Z_n = v \text{ для некоторого } n \geq 1]\,.$$

Нам потребуется ряд связывающих их тождеств, и мы начнём с нескольких из них, которые справедливы для всех $u, v \in T$:

$$G(u, v) = F(u, v)G(v, v); \tag{6.7}$$

$$G(v, v) = \frac{1}{1 - U(v, v)}; \tag{6.8}$$

$$U(v, v) = \sum_{u} p(v, u)F(u, v); \tag{6.9}$$

$$F(u, v) = F(u, w)F(w, v), \quad \text{как только } \ w \in \pi(u, v). \tag{6.10}$$

Первые три выполняются для произвольных счётных бесконечных марковских цепей, в то время как (6.10) специфично для деревьев (соответственно, немного более общо, когда w — так называемая точка разреза между u и v). Эти тождества показывают, что указанные величины полностью определяются уже всеми $F(u, v)$, где $u \sim v$. Больше тождеств, который можно найти в [64, Chapter 9], будут приводиться и использоваться в дальнейшем. В силу переходности случайное блуждание Z_n должно сходиться к случайному концу — простой и хорошо известный факт; см., например, [12] или [64, Theorem 9.18].

Лемма 6.3. *Имеется ∂T-значная случайная величина Z_∞ такая, что для каждой начальной точки $u \in T$ выполняется*

$$\mathbb{P}_u[Z_n \to Z_\infty \text{ в топологии } \widehat{T}] = 1.$$

Вкратце рассуждение таково: в силу переходности траектории случайного блуждания должны почти наверняка сгущаться на ∂T. Если такая траектория имела бы две различных точек сгущения, скажем, x и y, то по свойству ближайшего соседа траектория посещала бы вершину $x \wedge_u y$ бесконечно много раз, что может случиться только с вероятностью 0.

Можно рассмотреть семейство *предельных распределений* ν_u, $u \in T$, где для любого борелевского множества $B \subset \partial T$ выполняется

$$\nu_u(B) = \mathbb{P}_u[Z_\infty \in B]\,.$$

Множества ∂T_u, $u \in T$, (плюс пустое множество) образуют полу-алгебру, которая порождает борелевскую σ-алгебру пространства ∂T. Таким образом, каждое ν_u определяется значениями указанных множеств. Имеется явная формула, ср. с [12] или [64, Proposition 9.23]. При $v \neq o$

$$\nu_u(\partial T_v) = \begin{cases} F(u,v)\dfrac{1 - F(v,v^-)}{1 - F(v^-,v)F(v,v^-)}\,, & \text{если } u \in \{v\} \cup (T \setminus T_v)\,, \\ 1 - F(u,v)\dfrac{F(v,v^-) - F(v^-,v)F(v,v^-)}{1 - F(v^-,\nu)F(v,v^-)}\,, & \text{если } u \in T_v\,. \end{cases} \tag{6.11}$$

Гармоническая функция — это функция $h : T \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая равенству $\mathcal{P}h = h$, где

$$Ph(u) = \sum_v p(u,v)h(v)\,.$$

Для любого борелевского множества $B \subset \partial T$ функция $u \mapsto \nu_u(B)$ является ограниченной гармонической функцией. Можно вывести, что все ν_u сравнимы: $p^{(k)}(u,v)\,\nu_u \leq \nu_v$, где k — длина $\pi(u,v)$. Итак, для любой функции $\varphi \in L^1(\partial T, \nu_o)$ функция h_φ, определённая равенством

$$h_\varphi(u) = \int_{\partial T} \varphi\, d\nu_u,$$

является конечной и гармонической на T. Её часто называют *преобразованием Пуассона* функции φ.

Далее, определим меру m на T через её атомы: $\mathsf{m}(o) = 1$, а для $v \in T \setminus \{o\}$ с $\pi(o,v) = [o = v_0\,, v_1\,, \ldots, v_k = v]$

$$\mathsf{m}(v) = \frac{p(v_0,v_1)p(v_1,v_2)\cdots p(v_{k-1},v_k)}{p(v_1,v_0)p(v_2,v_1)\cdots p(v_k,v_{k-1})}\,. \tag{6.12}$$

Тогда для всех $u, v \in T$ имеем

$$\mathsf{m}(u)p(u,v) = \mathsf{m}(v)p(v,u) \quad \text{и, следовательно,} \quad \mathsf{m}(u)G(u,v) = \mathsf{m}(v)G(v,u)\,; \tag{6.13}$$

т. е. случайное блуждание *обратимо.* Это позволило бы нам использовать интерпретацию $(T, \mathcal{P}, \mathsf{m})$ как *электрической цепи*, для которой имеются различные ссылки: см., например, работу М. Ямасаки [66], книгу П. М. Соарди [55] или — с обозначениями как в настоящей работе — книгу [64, Chapter 4]. Мы здесь не вдаёмся в её подробности; каждое ребро $e = [v^-, v] \in E(T)$ рассматривается как электрический проводник с *проводимостью*

$$a(v^-,v) = \mathsf{m}(v)p(v,v^-).$$

Мы получаем форму Дирихле $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{T,\mathcal{P}}$ для функций $f, g : T \to \mathbb{R}$, определённую формулой

$$\mathcal{E}_T(f,g) = \sum_{[v^-,v] \in E(T)} \big(f(v) - f(v^-)\big)\,\big(g(v) - g(v^-)\big)\; a(v^-,v)\,. \tag{6.14}$$

Она корректно определена для f, g в пространстве

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T,\mathcal{P}) = \{f : T \to \mathbb{R} \mid \mathcal{E}_T(f,f) < \infty\}. \tag{6.15}$$

6.4 Гармонические функции конечной энергии и их граничные значения

Нас интересует подпространство

$$\mathcal{HD}(T) = \mathcal{HD}(T,\mathcal{P}) = \{h \in \mathcal{D}(T,\mathcal{P}) : \mathcal{P}h = h\}$$

гармонических функций с *конечной мощностью.* Терминология пришла из интерпретации таких функций как потенциалов электрического потока (или тока) и того, что $\mathcal{E}_T(h,h)$ — мощность потока.[3]

Каждая функция в $\mathcal{HD}(T,\mathcal{P})$ является преобразованием Пуассона некоторой функции $\varphi \in L^2(\partial T, \nu_o)$. Это справедливо не только для деревьев, но и для обратимых конечнозначных марковских цепей общего вида, и вытекает из следующих фактов.

1. Каждая функция в $\mathcal{HD}$ является разностью двух неотрицательных функций в $\mathcal{HD}$.

2. Каждую неотрицательную функцию в $\mathcal{HD}$ можно аппроксимировать монотонно снизу последовательностью неотрицательных ограниченных функций из $\mathcal{HD}$.

3. Каждая ограниченная гармоническая функция (не обязательно с конечной мощностью) является преобразованием Пуассона ограниченной функции на границе.

В общей постановке последняя является (активной частью) границы Мартина, причём ν_u — предельное распределение марковской цепи, начинающейся в u, на этой границе. Факты (1) и (2) содержатся в [66] и [55], в то время как (3) есть часть общей теории границ Мартина, см., например, [64, Theorem 7.61].

Итак, можно ввести форму $\mathcal{E}_{\mathcal{HD}}$ на ∂T, полагая

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\partial T,\mathcal{P}) &= \{\varphi \in L^1(\partial T,\nu_o) : \mathcal{E}_T(h_\varphi,h_\varphi) < \infty\}, \\ \mathcal{E}_{\mathcal{HD}}(\varphi,\psi) &= \mathcal{E}_T(h_\varphi,h_\psi) \quad \text{для } \varphi,\psi \in \mathcal{D}(\partial T,\mathcal{P}).\end{aligned} \tag{6.16}$$

6.5 Скачковые процессы на границе дерева

Используя значительные усилия, Дж. Кигами [37] выводит выражение для формы $\mathcal{E}_{\mathcal{HD}}(\varphi,\psi)$ из (6.16), показывает её свойства регулярности и затем изучает скачковый процесс на ∂T, индуцированный этой формой Дирихле. Мы называем его *граничным процессом*, связанным со случайным блужданием.

Теперь имеется довольно простое выражение для $\mathcal{E}_{\mathcal{HD}}$. Определим *ядро Наим* на $\partial T \times \partial T$ формулой

$$\Theta_o(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathsf{m}(o)}{G(o,o)F(o,x\wedge y)F(x\wedge y,o)}\,, & \text{если } x \neq y\,, \\ +\infty\,, & \text{если } x = y\,. \end{cases} \tag{6.17}$$

В нашем случае имеем $\mathsf{m}(o) = 1$, но мы могли бы пожелать изменить базисную точку или нормировать меру m другим образом.

[3] В математической литературе для $\mathcal{E}_T(h,h)$ используется в основном выражение "энергия" , но представляется, что "мощность" является более подходящим термином из физики.

Теорема 6.4. *Для любого переходного случайного блуждания типа ближайшего соседа на дереве T с корнем o и для всех функций φ, ψ в $\mathcal{D}(\partial T, \mathcal{P})$ выполняется*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{HD}}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\partial T} \int_{\partial T} (\varphi(x) - \varphi(y)) (\psi(x) - \psi(y)) \, \Theta_o(x, y) \, d\nu_o(x) \, d\nu_o(y) \, .$$

Имеется общее определение ядра Наим [45], в котором участвует граница Мартина, в настоящем случае равная ∂T. Доказательство теоремы 6.4 дано в [20] в постановке абстрактной теории потенциала на пространствах Грина, которые локально евклидовы. Определение из [45] относится к постановке того же типа. Однако бесконечные сети, даже когда они рассматриваются как метрические графы, не являются локально евклидовыми. В этом смысле, до сих пор определение ядра и доказательство теоремы 6.4 для переходных обратимых случайных блужданий не были хорошо доступны в литературе. В грядущей работе А. Георгакопулос и В. А. Кайманович [28] предоставят эти “недостающие звенья”. Мы даём прямое и простое доказательство теоремы 6.4 для специального случая деревьев. Начнём со следующего наблюдения.

Лемма 6.5. *Мера $\Theta_o(x, y) \, d\nu_o(x) \, d\nu_o(y)$ на $\partial T \times \partial T$ инвариантна относительно смены базовой точки (корня) o.*

Доказательство. Мы хотим заменить базовую точку o некоторой другой $u \in T$. Можно считать, что $u \sim o$. Действительно, тогда можно шаг за шагом заменить текущую базовую точку одной из соседних с ней, чтобы получить результат для произвольной u.

Напомним, что конфлюэнт, который появился в определении (6.17) ядра Θ_o, зависит от корня o, в то время как для Θ_x он становится конфлюэнтом относительно x как нового корня. Хорошо известный факт состоит в том, что

$$\frac{d\nu_u}{d\nu_o}(x) = K(u, x) = \frac{G(u, u \wedge_o x)}{G(o, u \wedge_o x)} \, ,$$

что есть *ядро Мартина*. Итак, нам нужно показать, что для всех $x, y \in \partial T$ $(x \neq y)$ выполняется

$$\frac{\mathsf{m}(o)}{G(o, o) F(o, x \wedge_o y) F(x \wedge_o y, o)} = \frac{\mathsf{m}(u) K(u, x) K(u, y)}{G(u, u) F(u, x \wedge_u y) F(x \wedge_u y, u)} \, .$$

Случай 1. $x, y \in \partial T_u$. Тогда $x \wedge_o y = x \wedge_u y =: v \in T_u$ и $u \wedge_o x = u \wedge_o y = u$. Таким образом, используя (6.7), (6.10) и тот факт, что в силу (6.13) выполняется

$$\mathsf{m}(u)/G(o, u) = \mathsf{m}(o)/G(u, o),$$

получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\mathsf{m}(u) K(u, x) K(u, y)}{G(u, u) F(u, x \wedge_u y) F(x \wedge_u y, u)} &= \frac{\mathsf{m}(u)}{G(u, u) F(u, v) F(v, u)} \left(\frac{G(u, u)}{G(o, u)} \right)^2 \\
&= \frac{\mathsf{m}(o) G(u, u)}{F(u, v) F(v, u) G(o, u) G(u, o)} \\
&= \frac{\mathsf{m}(o)}{F(u, v) F(v, u) F(o, u) F(u, o) G(o, o)} \\
&= \frac{\mathsf{m}(o)}{F(o, v) F(v, o) G(o, o)} \, ,
\end{aligned}$$

как и требуется. Имеется ещё 3 случая.

Случай 2. $x, y \in \partial T \setminus \partial T_u$. Тогда

$$x \wedge_o y = x \wedge_u y =: w \in T \setminus T_u \quad \text{и} \quad u \wedge_o x = u \wedge_o y = o.$$

Случай 3. $x \in \partial T_u$, $y \in \partial T \setminus \partial T_u$. Тогда

$$x \wedge_o y = o, \quad x \wedge_u y = u, \quad u \wedge_o x = u \quad \text{и} \quad u \wedge_o y = o.$$

Случай 4. $x \in \partial T \setminus \partial T_u$, $y \in \partial T_u$. Это похоже на случай 3, когда x и y меняются ролями.

Во всех случаях 2–4 вычисление производится очень похоже на случай 1, несложное упражнение. □

Для доказательства теоремы 6.4 нам нужно ещё несколько фактов, связанных с сетевой постановкой; ср., например, с [64, §4.D].

Пространство $\mathcal{D}(T)$ из (6.15) является гильбертовым пространством, когда оно оснащено скалярным произведением

$$(f, g) = \mathcal{E}_T(f, g) + f(o)g(o)\,.$$

Подпространство $\mathcal{D}_0(T)$ определяется как замыкание пространства функций с конечными носителями в $\mathcal{D}(T)$. Оно является собственным подпространством тогда и только тогда, когда случайное блуждание переходно, и тогда функция $G_v(u) = G(u, v)$ лежит в $\mathcal{D}_0(T)$ для любого $v \in T$, см. [66], [55]. Нам нужна формула

$$\mathcal{E}_T(f, G_v) = \mathsf{m}(v)f(v) \quad \text{для каждого } f \in \mathcal{D}_0(T)\,. \tag{6.18}$$

Ветвь T_w дерева T ($w \in T \setminus \{o\}$) можно рассматривать как подсеть, оснащённую теми же проводимостями $a(u, v)$ для $[u, v] \in E(T_w)$. Соответствующая мера на T_w есть

$$\mathsf{m}_{T_w}(u) = \sum_{v \in T_z : v \sim u} a(u, v) = \begin{cases} \mathsf{m}(u), & \text{если } u \in T_w \setminus \{w\}\,, \\ \mathsf{m}(w) - a(w, w^-), & \text{если } u = w\,. \end{cases}$$

Получающееся случайное блуждание на T_w имеет вероятности перехода

$$p_{T_w}(u, v) = \frac{a(v, w)}{\mathsf{m}_{T_w}(u)} = \begin{cases} p(u, v), & \text{если } u \in T_w \setminus \{w\}\,,\ v \sim u\,, \\ \dfrac{p(w, v)}{1 - p(w, w^-)}, & \text{если } u = w\,,\ v \sim u\,. \end{cases}$$

Имеем $F_{T_w}(u, u^-) = F(u, u^-)$ и тем самым также $F_{T_w}(u, w) = F(u, w)$ для каждой $u \in T_w \setminus \{w\}$, потому что перед его первым посещением w случайное блуждание на T_w подчиняется тем же самым вероятностям перехода, что и первоначальное случайное блуждание на T. Тогда легко видеть [64, p. 241], что случайное блуждание на T_w будет переходным тогда и только тогда, когда для первоначального случайного блуждания выполняется $F(w, w^-) < 1$, что в свою очередь выполняется тогда и только тогда, когда $\nu_o(\partial T_w) > 0$. (Это всегда предполагается в других частях этого и предыдущих двух пунктов, но для доказательства теоремы 6.4 мы лишь предполагаем, что случайное блуждание на всём T является переходным.) Обратно, если $F(w, w^-) = 1$, то $F(u, w) = 1$ для всех $u \in T_w$.

Ниже нам будет нужна следующая формула для предельных распределений.

Лемма 6.6. *Для* $u \in T \setminus \{o\}$ *выполняется*

$$\nu_u(\partial T_u) = 1 - p(u, u^-) \big(G(u, u) - G(u^-, u)\big) .$$

Доказательство. В силу (7.7) имеем

$$G(u, u)p(u, u^-) = \frac{F(u, u^-)}{1 - F(u, u^-)F(u^-, u)}.$$

Таким образом, получаем

$$p(u, u^-) \big(G(u, u) - G(u^-, u)\big) = \big(1 - F(u^-, u)\big) G(u, u)p(u, u^-) = 1 - \nu_u(\partial T_u)$$

после короткого вычисления с использованием (6.11). □

Доказательство теоремы 6.4. Сначала докажем формулу Дуба–Наим для случая, когда $\varphi = \mathbf{1}_{\partial T_v}$ и $\psi = \mathbf{1}_{\partial T_w}$ для двух собственных ветвей T_v и T_w дерева T. Они либо не пересекаются, либо одна из них содержит другую.

Случай 1. $T_w \subset T_v$. (Случай $T_v \subset T_w$ аналогичен в силу симметрии.)

Это означает, что $w \in T_v$. Для $x, y \in \partial T$ имеем

$$(\varphi(x) - \varphi(y)) (\psi(x) - \psi(y)) = 1,$$

если $x \in \partial T_w$ и $y \in \partial T \setminus \partial T_v$ или наоборот, и

$$(\varphi(x) - \varphi(y)) (\psi(x) - \psi(y)) = 0$$

в противном случае. В силу леммы 6.5 можно выбрать v в качестве базовой точки. Таким образом, правая часть тождества равна

$$\int_{\partial T \setminus \partial T_v} \int_{\partial T_w} \Theta_v(x, y)\, d\nu_v(x)\, d\nu_v(y) = \frac{\mathsf{m}(v)}{G(v, v)}\, \nu_v(\partial T \setminus \partial T_v)\nu_v(\partial T_w)\, ,$$

так как $x \wedge_v y = v$ и $F(v, v) = 1$.

Теперь обратимся к левой части формулы Дуба–Наим. Преобразования Пуассона от φ и ψ есть

$$h_\varphi(u) = \nu_u(\partial T_v) \quad \text{и} \quad h_\psi(u) = \nu_u(\partial T_w).$$

В силу (6.11) имеем

$$\begin{aligned} h_\varphi(u) &= F(u, v)\nu_v(\partial T_v)\, , \quad u \in \{v\} \cup (T \setminus T_v) \\ 1 - h_\varphi(u) &= F(u, v)\nu_v(\partial T \setminus \partial T_v)\, , \quad u \in T_v\, . \end{aligned}$$

Положим $F_v(u) = F(u, v)$ и будем писать

$$h_\varphi(u) - h_\varphi(u^-) = \big(1 - h_\varphi(u^-)\big) - (1 - h_\varphi(u))$$

везде, где это удобно, и аналогично для h_ψ. Тогда получим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_T(h_\varphi\,,h_\psi)\\
&= \sum_{[u,u^-]\in E(T)\setminus E(T_v)} a(u,u^-)\,\big(F(u,v)-F(u^-,v)\big)\,\nu_v(\partial T_v)\,\,\big(F(u,v)-F(u^-,v)\big)\,\nu_v(\partial T_w)\\
&\quad - \sum_{[u,u^-]\in E(T_v)\setminus E(T_w)} a(u,u^-)\,\big(F(u,v)-F(u^-,v)\big)\,\nu_v(\partial T\setminus\partial T_v)\,\,\big(F(u,v)-F(u^-,v)\big)\,\nu_v(\partial T_w)\\
&\quad + \sum_{[u,u^-]\in E(T_w)} a(u,u^-)\,\big(F(u,v)-F(u^-,v)\big)\,\nu_v(\partial T\setminus\partial T_v)\,\,\big(F(u,v)-F(u^-,v)\big)\,\nu_v(\partial T\setminus\partial T_w)\\
&= \mathcal{E}_T(F_v\,,F_w)\nu_v(\partial T_v)\nu_v(\partial T_w) - \mathcal{E}_{T_v}(F_v\,,F_w)\nu_v(\partial T_w) + \mathcal{E}_{T_w}(F_v\,,F_w)\nu_v(\partial T\setminus\partial T_v)\,,
\end{aligned}$$

где, конечно, $\mathcal{E}_{T_v}$ — форма Дирихле случайного блуждания на ветви T_v, как обсуждалось выше, и аналогично для $\mathcal{E}_{T_w}$. Теперь $F_v = G_v/G(v,v)$ в силу (6.7), откуда следует, что (6.18) даёт

$$\mathcal{E}_T(F_v,F_w) = \frac{\mathcal{E}_T(G_v,F_w)}{G(v,v)} = \frac{\mathsf{m}(v)F(v,w)}{G(v,v)}\,. \tag{6.19}$$

Напомним, что для случайного блуждания на T_v имеем $F_{T_v}(u,v) = F(u,v)$ для каждой $u\in T_v$. Кроме того,

$$\mathsf{m}_{T_v}(v) = \mathsf{m}(v) - a(v,v^-) = \mathsf{m}(v)\,\big(1-p(v,v^-)\big)\,.$$

Применим (6.19) к этому случайному блужданию и получим

$$\mathcal{E}_{T_v}(F_v,F_w) = \frac{\mathsf{m}(v)\,(1-p(v,v^-))\,F(v,w)}{G_{T_v}(v,v)}\,.$$

Теперь применим (6.8) и (6.9), вдобавок вспоминая, что

$$p_{T_v}(v,u) = \frac{p(v,u)}{1-p(v,v^-)}$$

для $u\in T_v$, и получим

$$\begin{aligned}
\frac{1-p(v,v^-)}{G_{T_v}(v,v)} &= 1-p(v,v^-) - \big(1-p(v,v^-)\big)\,U_{T_v}(v,v)\\
&= 1-p(v,v^-) - \sum_{u:u^-=v} p(v,u)F(u,v)\\
&= 1-p(v,v^-) - \big(U(v,v) - p(v,v^-)F(v^-,v)\big)\\
&= \frac{1}{G(v,v)} - p(v,v^-)\,\big(1-F(v^-,v)\big) = \frac{\nu_v(\partial T_v)}{G(v,v)},
\end{aligned}$$

где на последнем шаге мы воспользовались леммой 6.6. Мы получили

$$\mathcal{E}_{T_v}(F_v,F_w) = \frac{\mathsf{m}(v)F(v,w)}{G(v,v)}\,\nu_v(\partial T_v).$$

Таким же образом, поменяв ролями T_w и T_v и используя свойство обратимости (6.13), получаем

$$\mathcal{E}_{T_w}(F_v, F_w) = \frac{\mathsf{m}(w)F(w,v)}{G(w,w)}\,\nu_w(\partial T_w) = \frac{\mathsf{m}(v)F(v,w)}{G(v,v)}\,\nu_w(\partial T_w) = \frac{\mathsf{m}(v)}{G(v,v)}\,\nu_v(\partial T_w).$$

Собирая всё вместе, получаем, что

$$\mathcal{E}_T(h_\varphi\,, h_\psi) = \mathcal{E}_{T_w}(F_v\,, F_w)\nu_v(\partial T \setminus \partial T_v) = \frac{\mathsf{m}(v)}{G(v,v)}\,\nu_v(\partial T_w)\nu_v(\partial T \setminus \partial T_v),$$

как и предлагалось.

Случай 2. $T_w \cap T_v = \emptyset$.

Ввиду леммы 6.5 обе части формулы Дуба–Наим не зависят от корня o. Таким образом, мы можем объявить нашим корнем одного из соседей вершины v, который не лежит на $\pi(v,w)$. Кроме того, пусть $\bar{v}$ — сосед v на $\pi(w,v)$. Тогда с нашим выбранным новым корнем дополнение "старой" ветви T_v есть $T_{\bar{v}}$, которая содержит T_w (последняя остаётся той же самой относительно нового корня).

Таким образом, мы может применить результат случая 1 к $T_{\bar{v}}$ и T_w. Это означает, что нужно заменить функции φ и h_φ соответственно функциями $1-\varphi$ и $1-h_\varphi$, что просто означает, что мы изменяем знак на обеих сторонах тождества. Затем мы переходим в случай 1 без дальнейших вычислений.

Из того, что уже сделано и из линейности преобразования Пуассона, а также из билинейности форм на обеих сторонах формулы Дуба–Наим, мы выводим, что она выполняется для линейных комбинаций индикаторных функций множеств ∂T_v. Эти индикаторные функции всюду плотны в пространстве $C(\partial T)$ относительно max-нормы. Таким образом, формула Дуба–Наим выполняется для всех непрерывных функций на ∂T. Продолжение на всё $\mathcal{D}(\partial T, \mathcal{P})$ получается стандартным приближением. □

7 Двойственность случайных блужданий на деревьях и изотропных процессов на их границах

Когда рассматриваются наши изотропные процессы и граничные процессы Кигами [37], естественно задать следующие два вопроса.

Вопрос I. Для данного переходного случайного блуждания на T, связанного с формой Дирихле $\mathcal{E}_T$ из (6.14), будет ли граничный процесс на ∂T, индуцированный формой $\mathcal{E}_{\mathcal{HD}}$ из (6.16), возникать как один из изотропных процессов (1.8) на ∂T с вероятностями перехода (6.6) относительно меры $\mu = \nu_o$ на ∂T, некоторого ультраметрического элемента ϕ на T и подходящей функции распределения расстояний σ на $[0\,,\infty)$?

Вопрос II. Обратно, для данных μ, ϕ и σ существует ли случайное блуждание на T с предельным распределением $\nu_o = \mu$ такое, что изотропный процесс, индуцированный μ, ϕ и σ, является граничным процессом с формой Дирихле $\mathcal{E}_{\mathcal{HD}}$?

Прежде, чем отвечать на оба вопроса, нужно уточнить предположения. Когда мы начинаем с (ϕ, μ, σ), мы, как и раньше, будем всегда предполагать, что μ имеет носителем всю ∂T.

Таким образом, со стороны случайного блуждания мы также хотим, чтобы $\mathrm{supp}(\nu_o) = \partial T$. Это равносильно требованию, что $\nu_o(\partial T_v) > 0$ для каждого $v \in T$. В силу (6.11) это в свою очередь равносильно условию

$$F(v, v^-) < 1 \quad \text{для каждого } v \in T \setminus \{o\}. \tag{7.1}$$

Действительно, мы увидим, что нам нужно немного большее, а именно, что

$$\lim_{v \to \infty} G(v, o) = 0\,, \tag{7.2}$$

т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ имеется конечное множество $A \subset T$ такое, что $G(v, o) < \varepsilon$ для всех $v \in T \setminus A$. Это условие необходимо и достаточно для разрешимости *задачи Дирихле:* для любого $\varphi \in C(\partial X)$ его преобразование Пуассона h_φ даёт единственное непрерывное продолжение φ на $\widehat{T}$, являющееся гармонической функцией на T. См., например, [64, Corollary 9.44].

Мы ограничимся рассмотрением случайных блужданий со свойствами (7.1) и (7.2) на укоренённом дереве с исходящими степенями ≥ 2.

7.1 Ответ на вопрос I

Начнём со случайного блуждания, удовлетворяющего сформулированным выше требованиям. Мы знаем из §1, что каждый (μ, ϕ, σ)-процесс возникает как стандартный процесс в смысле определения 2.9 относительно внутренней метрики (ср. с теоремой 2.10): для заданных ϕ и σ внутренняя метрика индуцирована ультраметрическим элементом

$$\phi_*(u) = -1 \big/ \log \sigma\left(\phi(u)\right)\,. \tag{7.3}$$

Таким образом, мы можем исключить σ из наших рассмотрений, просто разыскивая ультраметрический элемент ϕ, для которого граничный процесс является стандартным процессом на ∂T, связанным с $(\nu_0\,, \phi)$.

Поскольку процессы определяются формами Дирихле, мы выводим из теорем 3.12 и 6.4, что мы ищем ϕ такой, что $J(x, y) = \Theta_o(x, y)$ для всех $x, y \in \partial T$ при $x \neq y$, где $J(x, y)$ задано равенством (3.11). Переписывая $J(x, y)$ в терминах ϕ, ν_o и структуры дерева, преобразуем это условие в

$$\frac{1}{\phi(o)} + \int_{1/\phi(o)}^{1/\phi(x \wedge y)} \frac{dt}{\nu_o\left(B^{\phi}_{1/t}(x)\right)} = \frac{\mathsf{m}(o)}{G(o, o) F(o, x \wedge y) F(x \wedge y, o)}. \tag{7.4}$$

В нашем случае $\mathsf{m}(o) = 1$, но мы отслеживаем, что происходит, когда изменяется корень или нормировка меры m. Прежде всего, так как $\deg^+(o) \geq 2$, существуют $x, y \in \partial T$ такие, что $x \wedge y = o$. Вставим эти две граничные точки в (7.4). Поскольку $F(o, o) = 1$, видим, что должно выполняться

$$\phi(o) = G(o, o)/\mathsf{m}(o)\,.$$

Теперь возьмём $v \in T \setminus \{o\}$. Поскольку исходящие степени ≥ 2, существуют $x, y, y' \in \partial T$ такие, что $x \wedge y = v$ и $x \wedge y' = v^-$. Запишем (7.4) сначала для (x, y'), а потом для (x, y), и возьмём разность, что приводит к уравнению

$$\int_{1/\phi(v^-)}^{1/\phi(v)} \frac{dt}{\nu_o\left(B^{\phi}_{1/t}(x)\right)} = \frac{\mathsf{m}(o)}{G(o, o) F(o, v) F(v, o)} - \frac{\mathsf{m}(o)}{G(o, o) F(o, v^-) F(v^-, o)}. \tag{7.5}$$

В силу (6.5) в области интегрирования последнего интеграла должно выполняться $B^{\phi}_{1/t}(v) = \partial T_v$, откуда следует, что интеграл сводится к

$$\left(\frac{1}{\phi(v)} - \frac{1}{\phi(v^-)}\right)\frac{1}{\nu_o(\partial T_v)}$$

Умножим уравнение (7.5) на $\nu_o(\partial T_v)$ и упростим полученную правую часть

$$\left(\frac{\mathsf{m}(o)}{G(o,o)F(o,v)F(v,o)} - \frac{\mathsf{m}(o)}{G(o,o)F(o,v^-)F(v^-,o)}\right)\nu_o(\partial T_v),$$

используя тождества (6.7)–(6.10) и первую из двух формул из (6.11) (для ν_o). Получаем, что искомый ультраметрический элемент должен удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\phi(v)} - \frac{1}{\phi(v^-)} = \frac{\mathsf{m}(o)}{G(v,o)} - \frac{\mathsf{m}(o)}{G(v^-,o)} \quad \text{для каждого } v \in T \setminus \{o\}\,. \tag{7.6}$$

Это рекуррентно определяет $1/\phi(v)$, и с условием $\mathsf{m}(o) = 1$ получаем

$$\phi(v) = G(v,o)\,.$$

Поскольку в силу (6.7) и (6.10) имеем

$$G(v,o) = F(v,v^-)G(v^-o),$$

предположения (7.1) и (7.2) дают, что ϕ — ультраметрический элемент. Отслеживая назад последние вычисления, находим, что при этом выборе ϕ действительно имеем $J(x,y) = \Theta_o(x,y)$ для всех $x,y \in \partial T$ при $x \neq y$. Мы доказали следующее.

Теорема 7.1. *Пусть T — локально конечное укоренённое дерево с исходящими степенями ≥ 2. Рассмотрим переходное случайное блуждание типа ближайшего соседа на T, которое удовлетворяет (6.7) и (6.10). Тогда граничный процесс на ∂T, индуцированный формой Дирихле (6.16), совпадает со стандартным процессом, связанным с ультраметрическим элементом $\phi = G(\cdot,o)$ и предельным распределением ν_o случайного блуждания.*

Пусть $\mathcal{L}$ — лапласиан, связанный с граничным процессом из теоремы 7.1. Лапласиан $\mathcal{L}$ действует на локально постоянных функциях f по правилу

$$\mathcal{L}f(x) = \int_{\partial T} (f(x) - f(y))\,\Theta_o(x,y)\,d\nu_o(y).$$

Ввиду отождествления шаров в ∂T с вершинами дерева T функции из (3.6) теперь становятся такими:

$$f_v = \frac{\mathbf{1}_{\partial T_v}}{\nu_o(\partial T_v)} - \frac{\mathbf{1}_{\partial T_{v^-}}}{\nu_o(\partial T_{v^-})},\ v \in T\backslash\{o\}.$$

Кроме того, положим $f_o = \mathbf{1}$ и заметим, что это собственная функция оператора $\mathcal{L}$ с собственным значением 0. Применяя теорему 3.8, получаем следующее.

Следствие 7.2. *Для $v \in T \setminus \{o\}$ имеем $\mathcal{L}f_v = G(v^-,o)^{-1}f_v$ и множество собственных функций $\{f_v\}_{v\in T}$ полно. В частности, имеем*

$$\operatorname{spec}\mathcal{L} = \overline{\{G(v,o)^{-1} : v \in T\}} \cup \{0\}.$$

Замечание 7.3. Для любых двух вершин v и w в $T \setminus \{o\}$ таких, что $v^- = w^- = u$, функции f_v и f_w являются собственными функциями оператора $\mathcal{L}$, соответствующими собственному значению $\lambda = 1/G(u, o)$. Отсюда следует, что собственное пространство $\mathcal{H}(u)$, соответствующее вершине u, натянуто на функции $\{f_v : v^- = u\}$. Поскольку ранг системы $\{f_v : v^- = u\}$ равен $\deg^+(u) - 1$, где $\deg^+(u) \geq 2$ — исходящая степень вершины u, получаем

$$\dim \mathcal{H}(u) = \deg^+(u) - 1$$

(ср. с (3.9)).

Замечание 7.4. Для заданного случайного блуждания на T и связанного с ним граничного процесса на ∂T можно захотеть реализовать его как (ν_o, ϕ, σ)-процесс для ультраметрического элемента ϕ, отличного от $G(\cdot, o)$. Это означает, что нужно найти подходящее распределение расстояний σ на $[0\,,\,\infty)$, отличное от обратного экспоненциального распределения (2.16). Ввиду (7.3) мы ищем такое σ, чтобы для нашего заданного ϕ общего вида выполнялось

$$\sigma\left(\phi(v)\right) = e^{-1/G(v,o)}.$$

Для этого необходимо, чтобы выполнялось $\phi(u) = \phi(v)$, как только $G(u, o) = G(v, o)$: нам нужно, чтобы ϕ был постоянным на эквипотенциальных множествах. В этом случае функция распределения $\sigma(r)$ определяется вышеприведённым равенством для r в множестве значений Λ_ϕ ультраметрики d_ϕ. Мы можем "интерполировать" эту функцию произвольным образом (монотонно возрастающей, непрерывной слева) и получить годную меру σ.

7.2 Ответ на вопрос II

Ответить на вопрос II означает, что мы начинаем с ϕ и μ и ищем случайное блуждание с предельным распределением $\nu_o = \mu$, для которого стандартный (ϕ, μ)-процесс является граничным процессом, связанным со случайным блужданием. Мы знаем из теоремы 7.1, что в этом случае должно выполняться $\phi(v) = G(v, o)$, откуда, в частности, $\phi(o) > 1$. Значит, нельзя ожидать, что подойдёт всякий ϕ. Наиболее естественный выбор состоит в том, чтобы заменить ϕ элементом $C \cdot \phi$ для некоторой постоянной $C > 0$. Для стандартных процессов, связанных соответственно с ϕ и $C \cdot \phi$, это просто приведёт к линейной замене времени: если старый процесс был $\{X_t\}_{t>0}$, то новый будет $\{X_{t/C}\}_{t>0}$.

Теорема 7.5. *Пусть T — локально конечное укоренённое дерево с исходящими степенями ≥ 2. Рассмотрим ультраметрический элемент ϕ на T и вероятностную меру μ с полным носителем на ∂T. Тогда существуют единственная постоянная $C > 0$ и единственное переходное случайное блуждание типа ближайшего соседа на T, удовлетворяющее (6.7) и (6.10), со следующими свойствами:*

1. *$\mu = \nu_o$ — предельное распределение случайного блуждания;*

2. *связанный граничный процесс совпадает со стандартным процессом на ∂T, индуцированным ультраметрическим элементом $C \cdot \phi$ и заданной мерой μ.*

Для доказательства нам нужны ещё три формулы. Первые две взяты из [64, Lemma 9.35], а третья сразу следует из (6.11) и (6.10):

$$G(u,u)\,p(u,v) = \frac{F(u,v)}{1 - F(u,v)F(v,u)}, \quad \text{если } u \sim v\,, \quad \text{и} \tag{7.7}$$

$$G(u,u) = 1 + \sum_{v:v\sim u} \frac{F(u,v)F(v,u)}{1 - F(u,v)F(v,u)} \tag{7.8}$$

$$F(v^-,v) = \frac{\nu_o(\partial T_v)/F(o,v^-)}{1 - F(v,v^-) + F(v,v^-)\ \nu_o(\partial T_v)/F(o,v^-)}. \tag{7.9}$$

Доказательство теоремы 7.5. Мы будем действовать следующим образом: начнём с ϕ и μ и заменим ϕ новым ультраметрическим элементом $C\cdot\phi$, где C будет определено позже, а μ будет кандидатом на предельное распределение случайного блуждания, которое мы ищем.

Используя различные имеющиеся формулы, сначала построим единственным возможным образом величины $F(u,v)$, $u,v,\in T$, в частности, когда $u\sim v$. В свою очередь, они приводят к ядру Грина $G(u,v)$. Пока это будут только "потенциальные" величины, годность которых нужно будет проверить. До этой проверки мы обозначаем их через $\widetilde{F}(u,v)$ и $\widetilde{G}(u,v)$. С помощью (7.7) они приведут к определению вероятностей перехода $p(u,v)$. Стохастичность получающихся матриц перехода $\mathcal{P}$ тоже нужно будет проверить.

Только тогда мы будем использовать рассуждения из теории потенциала, чтобы показать, что $\widetilde{G}(u,v)$ действительно является ядром Грина, связанным с $\mathcal{P}$, так что можно будет убрать знак вопроса, подразумевающийся в символе "$\,\widetilde{}\,$".

Прежде всего ввиду теоремы 7.1 должно выполняться

$$C\cdot\phi(v) = \widetilde{G}(v,o)\,,$$

откуда в силу (6.7) и (6.10) получаем

$$\widetilde{F}(v,v^-) = \phi(v)/\phi(v^-) \quad \text{для } v\in T\setminus\{o\} \tag{7.10}$$

и более общо

$$\widetilde{F}(v,u) = \phi(v)/\phi(u), \quad \text{когда } u\le v\,.$$

Сразу заметим, что $0<\widetilde{F}(v,u)<1$, когда $u<v$, и $\widetilde{F}(u,u)=1$.

Далее, воспользуемся (7.9), чтобы рекуррентно построить $\widetilde{F}(v^-,v)$ и $\widetilde{F}(o,v)$. Начинаем с $\widetilde{F}(o,o)=1$. Если $v\ne o$ и $\widetilde{F}(o,v^-)$ уже дано, причём

$$\mu(\partial T_{v^-}) \le \widetilde{F}(o,v^-) \le 1$$

(нижняя оценка требуется в силу (6.11)), то нужно положить

$$\widetilde{F}(v^-,v) = \frac{\mu(\partial T_v)/\widetilde{F}(o,v^-)}{1 - \widetilde{F}(v,v^-) + \widetilde{F}(v,v^-)\ \mu(\partial T_v)/\widetilde{F}(o,v^-)} \tag{7.11}$$

и

$$\widetilde{F}(o,v) = \widetilde{F}(o,v^-)\widetilde{F}(v^-,v)\,.$$

Поскольку

$$\widetilde{F}(o,v^-) \geq \mu(\partial T_{v^-}) \geq \mu(\partial T_v),$$

видим, что

$$0 < \widetilde{F}(v^-,v) \leq 1.$$

Положим — как диктует (6.10) —

$$\widetilde{F}(o,v) = \widetilde{F}(o,v^-)\widetilde{F}(v^-,v).$$

Формула (7.11) (пере-)преобразуется в

$$\mu(\partial T_v) = \widetilde{F}(o,v^-)\widetilde{F}(v^-,v)\frac{1-\widetilde{F}(v,v^-)}{1-\widetilde{F}(v,v^-)\widetilde{F}(v^-,v)} \leq \widetilde{F}(o,v) \leq 1\,, \tag{7.12}$$

как и требуется для нашего рекуррентного построения. На этот момент имеем все $\widetilde{F}(u,v)$ сначала при $u \sim v$, а следовательно, и для всех u,v с помощью взятия произведений вдоль геодезических путей.

Теперь можно вычислить постоянную C: формула (7.8) в сочетании с (7.10) и (7.12) при $u \sim o$ вынуждает равенства

$$\begin{aligned} C\phi(o) &= \widetilde{G}(o,o) = 1 + \sum_{u:u\sim o} \frac{\widetilde{F}(o,u)\widetilde{F}(u,o)}{1-\widetilde{F}(o,u)\widetilde{F}(u,o)} \\ &= 1 + \sum_{u:u\sim o} \frac{\widetilde{F}(u,o)}{1-\widetilde{F}(u,o)}\mu(\partial T_u) \\ &= 1 + \sum_{u:u\sim o} \frac{\phi(u)/\phi(o)}{1-\phi(u)/\phi(o)}\mu(\partial T_u). \end{aligned}$$

Поэтому

$$C = \frac{1}{\phi(o)} + \sum_{u:u\sim o} \frac{\phi(u)/\phi(o)}{\phi(o)-\phi(u)}\mu(\partial T_u)\,. \tag{7.13}$$

Теперь построим $\widetilde{G}(u,u)$ с помощью (7.8):

$$\widetilde{G}(u,u) = 1 + \sum_{v:v\sim u} \frac{\widetilde{F}(u,v)\widetilde{F}(v,u)}{1-\widetilde{F}(u,v)\widetilde{F}(v,u)}. \tag{7.14}$$

Для $u = o$ мы знаем, что это согласуется с нашим выбором C. Наконец, наш единственный выбор для ядра Грина есть

$$\widetilde{G}(u,v) = \widetilde{F}(u,v)\widetilde{G}(v,v)\,, \quad u,v \in T\,.$$

Теперь мы наконец приходим к единственно возможному способу определения вероятностей перехода с помощью (7.7):

$$p(u,v) = \frac{1}{\widetilde{G}(u,u)}\frac{\widetilde{F}(u,v)}{1-\widetilde{F}(u,v)\widetilde{F}(v,u)}. \tag{7.15}$$

Утверждение 1. Матрица $\mathcal{P}$ является стохастической.

Доказательство утверждения 1. Сочетая (7.15) с (7.14), выводим, что нужно проверить, что для каждого $u \in T$ выполняется

$$\sum_{v:v\sim u} \frac{\widetilde{F}(u,v)\left(1-\widetilde{F}(v,u)\right)}{1-\widetilde{F}(u,v)\widetilde{F}(v,u)} = 1\,. \tag{7.16}$$

Если $u = o$, то в силу (7.12) это просто

$$\sum_{v:v\sim o} \mu(\partial T_v) = 1.$$

Если $u \neq o$, то снова в силу (7.12) левая часть из (7.16) есть

$$\begin{aligned}
&\sum_{v:v^-=u} \frac{\widetilde{F}(u,v)\left(1-\widetilde{F}(v,u)\right)}{1-\widetilde{F}(u,v)\widetilde{F}(v,u)} + \frac{\widetilde{F}(u,u^-)\left(1-\widetilde{F}(u^-,u)\right)}{1-\widetilde{F}(u,u^-)\widetilde{F}(u^-,u)} \\
&\qquad = \sum_{v:v^-=u} \frac{\mu(\partial T_v)}{\widetilde{F}(o,u)} + 1 - \frac{1-\widetilde{F}(u^-,u)}{1-\widetilde{F}(u,u^-)\widetilde{F}(u^-,u)} = 1.
\end{aligned}$$

Это доказывает утверждение 1.

Утверждение 2. Для любого $u_0 \in T$ функция $\tilde{g}_{u_0}(u) = \widetilde{G}(u,u_0)$ удовлетворяет равенству $\mathcal{P}\tilde{g}_{u_0} = \tilde{g}_{u_0} - \mathbf{1}_{u_0}$.

Доказательство утверждения 2. Во-первых, сочетая (7.14) с (7.15), получаем

$$P\tilde{g}_{u_0}(u_0) = \sum_{v:v\sim u_0} p(u_0,v)\widetilde{F}(v,u_0)\widetilde{G}(u_0,u_0) = \sum_{v:v\sim u_0} \frac{\widetilde{F}(u_0,v)\widetilde{F}(v,u_0)}{1-\widetilde{F}(u_0,v)\widetilde{F}(v,u_0)} = \tilde{g}_{u_0}(u_0) - 1\,,$$

и утверждение 2 верно при $u = u_0$. Во-вторых, при $u \neq u_0$ пусть w — сосед вершины u на $\pi(u,u_0)$. Тогда

$$\begin{aligned}
P\tilde{g}_{u_0}(u) &= \sum_{v:v\sim u, v\neq w} p(u,v)\widetilde{F}(v,u)\widetilde{G}(u,u_0) + p(u,w)\widetilde{G}(w,u_0) \\
&= \underbrace{\sum_{v:v\sim u} \frac{\widetilde{F}(u,v)\widetilde{F}(v,u)}{1-\widetilde{F}(u,v)\widetilde{F}(v,u)}}_{\widetilde{G}(u,u)-1} \frac{\widetilde{G}(u,u_0)}{\widetilde{G}(u,u)} - p(u,w)\widetilde{F}(w,u)\widetilde{G}(u,u_0) + p(u,w)\widetilde{G}(w,u_0) \\
&= G(u,u_0)\left(1 - \frac{1}{\widetilde{G}(u,u)} - p(u,w)\widetilde{F}(w,u) + p(u,w)\frac{1}{\widetilde{F}(u,w)}\right) = \tilde{g}_{u_0}(u),
\end{aligned}$$

так как

$$p(u,w)/\widetilde{F}(u,w) - p(u,w)\widetilde{F}(w,u) = 1/\widetilde{G}(u,u)$$

в силу (7.15). Это завершает доказательство утверждения 2.

Теперь мы можем заключить: функция $\tilde{g}_{u_0}$ непостоянная, положительная и супергармоническая. Поэтому случайное блуждание с матрицей перехода $\mathcal{P}$, заданной формулой (7.15), является переходным и обладает функцией Грина $G(u,v)$. Кроме того, в силу теоремы Рисса о разложении имеем

$$\tilde{g}_{u_0} = Gf + h\,,$$

где h — неотрицательная гармоническая функция, а заряд f потенциала

$$Gf(u) = \sum_v G(u,v)f(v)$$

равен $f = \tilde{g}_{u_0} - P\tilde{g}_{u_0} = \mathbf{1}_{u_0}$, то есть

$$\widetilde{G}(u,u_0) = G(u,u_0) + h(x) \quad \text{для всех } u \in T.$$

Пусть теперь $x \in \partial T$ и $v = u_0 \wedge x$. Если $u \in T_v$, то в силу нашего построения имеем

$$\widetilde{G}(u,u_0) = \widetilde{G}(u,o)\frac{\widetilde{G}(v,u_0)}{\phi(v)}\phi(u) \to 0 \quad \text{при } u \to x\,.$$

Поэтому $\widetilde{G}(\cdot,u_0)$ обращается в нуль на бесконечности, и то же верно для h. В силу принципа максимума имеем $h \equiv 0$.

Заключаем, что $\widetilde{G}(u,v) = G(u,v)$ для всех $u,v \in T$. Но тогда в силу нашего построения также $\widetilde{F}(u,v) = F(u,v)$, что есть ядро 'первого попадания', связанное с $\mathcal{P}$. Сравнивая (7.12) с (6.11), видим, что $\mu = \nu_o$. Это завершает доказательство. □

7.3 Некомпактный случай

Наш общий подход в настоящей работе не ограничивается компактными пространствами. В случае некомпактного локально компактного ультраметрического пространства без изолированных точек дерево строится таким же образом: множество вершин соответствует множеству всех замкнутых шаров, а окрестность в полученном дереве определяется как и выше: если вершина v соответствует шару B, то предшественник v^- — это вершина, соответствующая шару B' (см. определение 3.6), и имеется ребро $[v^-,v]$. Теперь у *каждой* вершины есть предшественник (в то время как в компактном случае у корневой вершины его нет), а дерево имеет корень на бесконечности, т. е. ультраметрическим пространством становится $\partial^*T = \partial T \setminus \{\varpi\}$, где ϖ — фиксированный конец отсчёта дерева T. См. рис. 5 ниже.

Теперь начнём с такой ситуации: задано дерево T и конец отсчёта $\varpi \in \partial T$, предшественник $v^- = v^-_\varpi$ вершины v относительно ϖ есть сосед вершины v на геодезической $\pi(v,\varpi)$. Для данных двух элементов $w,z \in \widehat{T} \setminus \{\varpi\}$ их конфлюэнт $w \curlywedge z$ относительно ϖ снова определяется как последний общий элемент на геодезических $\pi(\varpi,w)$ и $\pi(\varpi,z)$ — вершина, если только не выполняется $v = w \in \partial^*T$ (Figure 5). Снова естественно предполагать, что каждая вершина имеет по крайней мере два исходящих соседа.

В этой ситуации для определения 6.1 ультраметрического элемента $\phi : T \to (0\,,\infty)$ нам нужно, кроме монотонности $[\phi(v) < \phi(v^-)]$, чтобы ϕ сходился к ∞ вдоль $\pi(o,\varpi)$, в то время как он должен стремиться к 0 вдоль любой геодезической, идущей на ∂^*T. Соответствующая ультраметрика на ∂^*T тогда задаётся так же, как раньше:

$$d_\phi(x,y) = \begin{cases} 0\,, & \text{если } x = y\,,\\ \phi(x \curlywedge y)\,, & \text{если } x \neq y\,.\end{cases}$$

Заметим здесь, что когда ϕ не стремится к ∞ вдоль $\pi(x,\varpi)$, это также определяет ультраметрику, но тогда (∂^*T, d_ϕ) не будет полным. Кроме того, если неравенство

$\phi(v) \le \phi(v^-)$ не строгое, то получается ультраметрика, но тогда вышеприведённое построение дерева из замкнутых шаров не восстанавливает первоначальное дерево из $(\partial^* T, d_\phi)$. Наконец, если ϕ не стремится к 0 вдоль некоторой геодезической $\pi(o,x)$, $x \in \partial^* T$, то x будет изолированной точкой в $(\partial^* T, d_\phi)$. (Последние два наблюдения верны также в компактном случае для дерева с корневой вершиной.)

Возвращаясь к нашей постановке, заметим, что эталонная мера μ (ϕ,μ,σ)-процесса может иметь бесконечную массу: мера Радона с носителем, равным всему $\partial^* T$. Опять же мы знаем, что достаточно изучать стандартный (ϕ,μ)-процесс. Мы дадим краткое описание двойственности таких процессов со случайными блужданиями на T. Это следует сравнить с последней частью второй работы Дж. Кигами [38] (препринт которой стал доступен, когда бóльшая часть настоящей работы была сделана и, в частности, предварительная версия [65] пунктов настоящей работы о случайных блужданиях была размещена в Интернете).

Относительно ϖ ветвь дерева T, укоренённого в $u \in T$, теперь есть

$$T_u = T_{\varpi,u} = \{v \in T : u \in \pi(v,\varpi)\}.$$

Тогда ∂T_u — компактное подмножество в $\partial^* T$, шар с d_ϕ-диаметром $\phi(u)$. Здесь будет удобно обозначить через $T_{o,u}$ ветвь относительно корневой вершины $o \in T$ согласно определению (6.2). Заметим, что $T_{\varpi,u} = T_{o,u}$ тогда и только тогда, когда $u \notin \pi(o,\varpi)$. В дополнение к концу отсчёта ϖ выберем такой корень o и обозначим через o_n его n-го предшественника, т. е. вершину на $\pi(o,\varpi)$ на графовом расстоянии n от o.

Пусть теперь $\mathcal{P} = (p(u,v))_{u,v\in T}$ — матрица перехода переходного случайного блуждания типа ближайшего соседа на T. Снова предположим, что (7.1) выполняется: $F(v,v^-) < 1$ для каждого $v \in T$, но теперь предшественники берутся относительно ϖ. (Действительно, отсюда следует (7.1) относительно любого выбора корневой вершины.) Теперь рассмотрим форму Дирихле $\mathcal{E}_{\mathcal{HD}}$ и формулу из теоремы 6.4. Нам хотелось бы переместить o в точку ϖ в этой формуле. Мы знаем из леммы 6.5, что меры $\Theta_{o_n}(x,y)\,d\nu_{o_n}(x)\,d\nu_{o_n}(y)$ одинаковые для всех n. Однако меры ν_{o_n}, будучи ограниченными на $\partial^* T$, обычно сходятся примерно к 0. Итак, проведём нормировку, полагая

$$\mu_n = \frac{1}{\nu_{o_n}(\partial T_o)}\,\nu_{o_n} \quad \text{и} \quad J_n(x,y) = \Theta_{o_n}(x,y)\ \big(\nu_{o_n}(\partial T_o)\big)^2 .$$

Для следующей леммы напомним, что $T_u = T_{\varpi,u}$, и заметим, что $u \curlywedge o = o_k$ для некоторого $k \ge 0$.

Лемма 7.6. *Пусть $A \subset \partial^* T$ компактно, так что имеется вершина u такая, что $A \subset \partial T_u$. Если $u \curlywedge o = o_k$, то для всех $n \ge k$ и для всех $x,y \in \partial T_{o_k}$ выполняется*

$$\mu_n(A) = \mu_k(A) =: \mu(A) \quad \text{и} \quad J_n(x,y) = J_k(x,y) =: J(x,y).$$

Имеем

$$J(x,y) = \mathsf{j}(x \curlywedge y) \quad \text{при} \quad \mathsf{j}(v) = \frac{\vartheta^2}{K(v,\varpi)^2}\,\frac{G(v,v)}{\mathsf{m}(v)}\,,\ v \in T\,,$$

где

$$\vartheta = \frac{\mathsf{m}(o)\nu_o(\partial T_o)}{G(o,o)}\,, \quad \text{а} \ \ K(v,\varpi) = \frac{F(v, v\curlywedge o)}{F(o, v\curlywedge o)} = \frac{F(v, v \wedge_o \varpi)}{F(o, v \curlywedge_o \varpi)}$$

— ядро Мартина в ϖ.

Доказательство. Поскольку ∂T_{o_k} содержит и ∂T_o, и A, при $n \geq k$ имеем

$$\mu_n(A) = \frac{\nu_{o_n}(A)}{\nu_{o_n}(\partial T_o)} = \frac{F(o_n, o_k)\nu_{o_k}(A)}{F(o_n, o_k)\nu_{o_k}(\partial T_o)} = \mu_k(A).$$

Аналогично, пусть $x, y \in \partial T_{o_k}$ и $x \curlywedge y = v$ — элемент из T_{o_k}. Используем тождество $\mathsf{m}(v)G(v, w) = \mathsf{m}(w)G(w, v)$, из которого следует, что $\mathsf{m}(o_n)F(o_n, o) = \mathsf{m}(o_n)G(o_n, o)/G(o, o) = \mathsf{m}(o)G(o, o_n)/G(o, o)$. Вычислим при $n \geq k$

$$\begin{aligned} J_n(x, y) &= \frac{\nu_{o_n}(\partial T_o)^2\, \mathsf{m}(o_n)}{F(o_n, v)G(v, o_n)} = \nu_o(\partial T_o)^2\, \frac{\mathsf{m}(o_n)^2 F(o_n, o)^2}{\mathsf{m}(o_n)F(o_n, v)G(v, o_n)} \\ &= \frac{\nu_o(\partial T_o)^2 \mathsf{m}(o)^2}{G(o, o)^2}\, \frac{G(o, o_n)^2}{G(v, o_n)^2}\, \frac{G(v, v)}{\mathsf{m}(v)}\,, \end{aligned}$$

что даёт предложенную формулу, поскольку $G(o, o_n) = F(o, o \curlywedge v)G(o \curlywedge v, o_n)$ и $G(v, o_n) = F(v, o \curlywedge v)G(o \curlywedge v, o_n)$. $\square$

Теперь нетрудно вывести следующее.

Теорема 7.7. *Пусть дерево T и его конец отсчёта ϖ — такие, как описано выше. Рассмотрим случайное блуждание типа ближайшего соседа на T, удовлетворяющее условию $F(v, v^-) < 1$ для каждого $v \in T$. Пусть μ и J будут как в лемме 7.6. Тогда для всех непрерывных функций φ, ψ на $\partial^* T$ с компактным носителем форму Дирихле (6.16) можно записать в виде*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{HD}}(\varphi, \psi) &= \mathcal{E}_J(\varphi, \psi) + \vartheta \cdot \nu_o(\{\varpi\}) \int_{\partial^* T} \varphi(x)\psi(x)\, d\mu(x)\,, \quad \textit{где} \\ \mathcal{E}_J(\varphi, \psi) &= \frac{1}{2}\int_{\partial^* T}\int_{\partial^* T} (\varphi(x) - \varphi(y))\,(\psi(x) - \psi(y))\; J(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)\,. \end{aligned}$$

Когда случайное блуждание регулярно по Дирихле (в таком случае $\nu_o(\{\varpi\}) = 0$), форма $\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_{\mathcal{HD}}$ индуцирует стандартный (μ, ϕ)-процесс, где ультраметрический элемент ϕ относительно ϖ задаётся формулой

$$\phi(v) = \frac{1}{\vartheta}\, K(v, \varpi)\,,$$

а ϑ и ядро Мартина $K(v, \varpi)$ такие, как определяются в лемме 7.6.

В частности, (μ, ϕ)-процесс является граничным процессом с заменой времени.

Доказательство. Существует k такое, что компактные носители функций φ и ψ содержатся в ∂T_{o_k}. Пусть $n \geq k$. Используя леммы 6.5 и 7.6, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{HD}}(\varphi, \psi) &= \frac{1}{2}\int_{\partial T}\int_{\partial T} (\varphi(x) - \varphi(y))\,(\varphi(x) - \varphi(y))\; J_n(x, y)\, d\mu_n(x)\, d\mu_n(y) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial T_{o_n}}\int_{\partial T_{o_n}} (\varphi(x) - \varphi(y))\,(\varphi(x) - \varphi(y))\; J(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \\ &\quad + \int_{\partial T_{o_n}} \varphi(x)\psi(x) \underbrace{\int_{\partial T \setminus \partial T_{o_n}} J_n(x, y)\, d\mu_n(y)}_{=: f_n(x)} d\mu(x) \end{aligned}$$

При $n \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{2}\int_{\partial T_{o_n}}\int_{\partial T_{o_n}} (\varphi(x)-\varphi(y))\,(\varphi(x)-\varphi(y))\; J(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) \to \mathcal{E}_J(\varphi,\psi)\,.$$

Рассмотрим второй член. Имеем

$$f_n(x) = \int_{\partial T\setminus\partial T_{o_n}} \Theta_{o_n}(x,y)\,\nu_{o_n}(\partial T_o)\,d\nu_{o_n}(y).$$

Для $x \in \partial T_{o_n}$ и $y \in \partial T \setminus \partial T_{o_n}$ их конфлюэнт относительно o_n есть сама o_n. Поэтому, используя (6.17) и (6.11), получаем

$$\begin{aligned}
\Theta_{o_n}(x,y)\,\nu_{o_n}(\partial T_o) &= \frac{\mathsf{m}(o_n)}{G(o_n,o_n)}\,F(o_n,o)\,\nu_o(\partial T_o) = \frac{\mathsf{m}(o_n)G(o_n,o)}{G(o_n,o_n)G(o,o)}\,\nu_o(\partial T_o)\\
&= \frac{\mathsf{m}(o)G(o,o_n)}{G(o_n,o_n)G(o,o)}\,\nu_o(\partial T_o) = \frac{\mathsf{m}(o)}{G(o,o)}\,\nu_o(\partial T_o)\,F(o,o_n) = \vartheta\,F(o,o_n)\,.
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что для $y \in \partial T \setminus \partial T_{o_n}$ имеем $F(o,o_n)\,d\nu_{o_n}(y) = d\nu_o(y)$. Поэтому

$$f_n(x) = \vartheta\int_{\partial T\setminus\partial T_{o_n}} F(o,o_n)\,d\nu_{o_n}(y) = \vartheta\cdot\nu_o(\partial T\setminus\partial T_{o_n}) \to \vartheta\cdot\nu_o(\{\varpi\})\,,$$

и при $n \to \infty$ можно воспользоваться мажорируемой сходимостью, чтобы получить, что

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T_{o_n}} \varphi(x)\psi(x)\int_{\partial T\setminus\partial T_{o_n}} J_n(x,y)\,d\mu_n(y)\,d\mu(x) &= \int_{\partial^* T}\varphi(x)\psi(x)\,f_n(x)\,d\mu(x)\\
&\to \vartheta\cdot\nu_o(\{\varpi\})\int_{\partial^* T}\varphi(x)\psi(x)\,d\mu(x)\,,
\end{aligned}$$

как и предлагается. Чтобы доказать формулу для соответствующего ультраметрического элемента, действуем как в доказательстве теоремы 7.1, см. (7.4) и последующие строчки. Находим, что ультраметрический элемент должен удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\phi(v)} - \frac{1}{\phi(v^-)} = \big(\mathsf{j}(v)-\mathsf{j}(v^-)\big)\,\mu(\partial T_v)\,.$$

Правую часть этого уравнения можно вычислить: имеем $v^- \curlywedge o = o_k$ для некоторого $k \geq 0$ и, сочетая рассуждения после (7.4) с теми, что в доказательстве леммы 7.6, получаем

$$\begin{aligned}
\big(\mathsf{j}(v)-\mathsf{j}(v^-)\big)\,\mu(\partial T_v) &= \left(\frac{\mathsf{m}(o_k)}{F(o_k,v)G(v,o_k)} - \frac{\mathsf{m}(o_k)}{F(o_k,v^-)G(v^-,o_k)}\right)\nu_{o_k}(\partial T_v)\,\nu_{o_k}(\partial T_o)\\
&= \left(\frac{\mathsf{m}(o_k)}{G(v,o_k)} - \frac{\mathsf{m}(o_k)}{G(v^-,o_k)}\right)F(o_k,o)\,\nu_o(\partial T_o)\\
&= \left(\frac{G(o,o_k)}{G(v,o_k)} - \frac{G(o,o_k)}{G(v^-,o_k)}\right)\frac{\mathsf{m}(o)\nu_o(\partial T_o)}{G(o,o)} = \frac{\vartheta}{K(v,\varpi)} - \frac{\vartheta}{K(v^-,\varpi)}.
\end{aligned}$$

Выводим, что величина $1/\phi(\cdot) - \vartheta/K(\cdot,\varpi)$ должна быть постоянной. В силу того, что случайное блуждание регулярно по Дирихле, имеем $K(v,\varpi) \to \infty$ при $v \to \varpi$. С другой стороны, $\phi(o_n)$ также должно стремиться к бесконечности. Таким образом, постоянная равна 0, и ϕ имеет предложенный вид. $\square$

Лемма 7.6 и теорема 7.7 ведут к более ясному пониманию и более простым доказательствам в отношении материала о случайных блужданиях в [38, §§ 10–11], в частности, в [38, Theorem 11.3]. А именно, наша предельная мера μ совпадает с мерой ν_* из [38]. Также заметим здесь, что имеются примеры, где $\mu(\partial^* T) = \infty$, а также примеры, где $\mu(\partial^* T) < \infty$, несмотря на то, что ультраметрическое пространство некомпактно. В настоящей работе всегда предполагается, что эталонная мера имеет бесконечную массу в некомпактном случае, но это не решающее обстоятельство для нашего подхода.

Замечание 7.8. В параграфах 6–7 настоящей работы всегда предполагалось, что ультраметрическое пространство не имеет изолированных точек, что для дерева означает, что $\deg^+ \geq 2$. Предмет работы [7] — противоположная ситуация, когда все точки изолированы, т. е. пространство дискретно. В таком случае ультраметрическое пространство также является границей дерева, которая состоит не из концов, а из конечных вершин, т. е. вершин с только одним соседом.

С точки зрения настоящего параграфа смешанная ситуация так же хорошо поддаётся изучению. Если начать с локально компактного ультраметрического пространства, имеющего и изолированные, и неизолированные точки, можно таким же образом построить дерево. Множество вершин — это множество всех замкнутых шаров. Изолированные точки станут *конечными вершинами* дерева, у которых нет соседей, кроме предшественника, как, например, вершины x и y на рис. 6. Все внутренние (не конечные) вершины будут иметь исходящую степень ≥ 2.

В компактном случае граница ∂T этого дерева состоит из конечных вершин вместе с пространством концов. В некомпактном случае у нас опять будет конец отсчёта ϖ, как и выше, и $\partial^* T$ будет состоять из всех концов, кроме ϖ, плюс конечные вершины. Определение ультраметрического элемента остаётся тем же, но нужно определять его только на внутренних вершинах. В этой общей постановке построение (ϕ, μ, σ)-процессов остаётся без изменений.

Даже при наличии изолированных точек двойственность между (ϕ, μ, σ)-процессами и случайными блужданиями на соответствующем дереве остаётся такой, как объяснялось здесь. Случайное блуждание должно быть таким, чтобы конечные вершины были поглощающими, а ядро Грина стремилось к 0 на бесконечности. Формула Дуба–Наим без труда продолжается на эту постановку.

Замечание 7.9. Рассмотрим снова общую ситуацию, когда мы начинаем с переходного случайного блуждания на локально конечном укоренённом дереве T.

Предельное распределение ν_o в общем случае не будет иметь в качестве носителя всю ∂T. Граничный процесс, конечно, всё ещё можно построить, см. [37], но он будет протекать естественно только на $\mathrm{supp}(\nu_o)$. Таким образом, можно считать, что наше ультраметрическое пространство — это только $\mathrm{supp}(\nu_o)$. В общем случае дерево, связанное с этим ультраметрическим пространством, не будет ни тем деревом, с которого мы начали, ни его *переходным остовом*, определяемым в [64, (9.27)] (как поддерево, индуцированное вершиной o и всеми $v \in T \setminus \{o\}$ при $F(v, v^-) < 1$, где $v^- = v_o^-$).

Тому имеется две причины. Во-первых, построение дерева по $\mathrm{supp}(\nu_o)$ никогда не вернёт вершин с исходящей степенью 1. Во-вторых, какой-то конец, содержащийся в $\mathrm{supp}(\nu_o)$, может быть изолирован внутри этого множества, в то же время не будучи изолированным в ∂T. Но тогда этот элемент станет конечной вершиной в дереве, связанном с ультраметрическим (под)пространством $\mathrm{supp}(\nu_o)$. Это случается в точности тогда, когда переходный остов имеет изолированные концы.

Таким образом, следует работать с модифицированным "приведённым" деревом плюс случайное блуждание, чтобы сохранять двойственность между случайными блужданиями и изотропными скачковыми процессами. Такие же наблюдения применимы к некомпактному случаю, с концом отсчёта вместо корня и мерой μ из леммы 7.6 вместо ν_o.

Замечание 7.10. Для заданного переходного случайного блуждания на укоренённом дереве T в работе [37] также восстанавливается *внутренняя метрика* граничного процесса на ∂T (компактный случай!) в терминах того, что называется ультраметрическим элементом в настоящей работе. Это, конечно, $\phi(x) = G(x, o)$, обозначаемый D_x в [37], где показано, что для ν_o-почти каждого $\xi \in \partial T$ выполняется $D_x \to 0$ вдоль геодезического луча $\pi(o, \xi)$. Это имеет следующую интерпретацию в терминах теории потенциала.

Точка $x \in \partial T$ называется *регулярной для задачи Дирихле*, если для каждой $\varphi \in C(\partial T)$ её преобразование Пуассона h_φ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{v \to x} h_\varphi(v) = \varphi(x).$$

Из работы Д. И. Картрайта, П. М. Соарди и В. Вёсса [14, Remark 2] известно, что x регулярна тогда и только тогда, когда $\lim_{u \to x} G(u, o) = 0$ (как только T имеет хотя бы 2 конца), см. также [64, Theorem 9.43]. В силу последней теоремы, множество регулярных точек имеет ν_o-меру 1. То есть, ядро Грина обращается в нуль в ν_o-почти каждой граничной точке.

Замечание 7.11. В доказательстве теоремы 7.5 мы восстанавливали вероятности перехода случайного блуждания исходя из $C \cdot \phi(u) = G(u, o)$ и $\mu = \nu_o$.

Похожий (немного более простой) вопрос был рассмотрен З. Вондрачеком [61]: как восстановить вероятности перехода исходя из *всех* предельных распределений ν_u, $u \in T$, на границе. Это, а также наш метод, в основном, получаются из формул (6.11) и (7.7) + (7.8), которые восходят к работе П. Картье [12].

8 Случайное блуждание, связанное с p-адической дробной производной

В этом параграфе рассматривается двоякий специфический пример, который объединяет подходы из § 5 и §§ 6–7. Начнём с компактного случая.

8.1 p-Адическая дробная производная на $\mathbb{Z}_p$

Пусть $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ — группа p-адических целых чисел. В качестве аналога оператора $\mathfrak{D}^\alpha$ введём оператор $\mathbb{D}^\alpha$ дробной производной на $\mathbb{Z}_p$. Мы покажем, что это лапласиан подходящей изотропной марковской полугруппы. Затем мы построим случайное блуждание, связанное с $\mathbb{D}^\alpha$ в смысле §§ 6–7.

Поскольку $\mathbb{Z}_p$ — компактная абелева группа, её двойственная группа $\widehat{\mathbb{Z}_p}$ — дискретная абелева группа. Известно, что группу $\widehat{\mathbb{Z}_p}$ можно отождествить с группой

$$Z(p^\infty) = \{p^{-n}m : 0 \le m < p^n, n = 1, 2, ...\},$$

оснащённой сложением чисел по модулю 1 в качестве групповой операции. Для множеств (но не групп) имеет место включение $Z(p^\infty) \subset \mathbb{Q}_p$, откуда следует, что на группе $Z(p^\infty)$ корректно определена функция $\xi \mapsto \|\xi\|_p$.

Определение 8.1. Оператор $(\mathbb{D}^\alpha, \mathcal{V}_c)$, $\alpha > 0$, определяется через преобразование Фурье на компактной абелевой группе $\mathbb{Z}_p$ равенством

$$\widehat{\mathbb{D}^\alpha f}(\xi) = \|\xi\|_p^\alpha \widehat{f}(\xi),\ \xi \in Z(p^\infty)\,,$$

где $\mathcal{V}_c$ — пространство локально постоянных функций на $\mathbb{Z}_p$.

Ср. с определением 5.1 оператора $\mathfrak{D}^\alpha$.

Непосредственное следствие состоит в том, что оператор $\mathbb{D}^\alpha$ является неотрицательно определённым самосопряжённым оператором, спектр которого совпадает с множеством значений функции

$$\xi \mapsto \|\xi\|_p^\alpha : Z(p^\infty) \to \mathbb{R}_+,$$

т. е.

$$\operatorname{spec} \mathbb{D}^\alpha = \{0, p^\alpha, p^{2\alpha}, ...\}.$$

Собственное пространство $\mathcal{H}(\lambda)$ оператора $\mathbb{D}^\alpha$, соответствующее собственному значению $\lambda = p^{k\alpha}$, $k \ge 1$, натянуто на функцию

$$f_k = \frac{1}{\mu_p(p^k\mathbb{Z}_p)}\mathbf{1}_{p^k\mathbb{Z}_p} - \frac{1}{\mu_p(p^{k-1}\mathbb{Z}_p)}\mathbf{1}_{p^{k-1}\mathbb{Z}_p}$$

и её сдвиги $f_k(\cdot + a)$ с любыми $a \in \mathbb{Z}_p/p^k\mathbb{Z}_p$.

Действительно, вычисляя преобразование Фурье функции f_k

$$\widehat{f_k}(\xi) = \mathbf{1}_{\{\|\xi\|_p \le p^k\}} - \mathbf{1}_{\{\|\xi\|_p \le p^{k-1}\}} = \mathbf{1}_{\{\|\xi\|_p = p^k\}},$$

получаем

$$\widehat{\mathbb{D}^\alpha f_k}(\xi) = \|\xi\|_p^\alpha \widehat{f_k}(\xi) = p^{k\alpha}\widehat{f_k}(\xi).$$

Максимальное число линейно независимых функций в множестве $\{f_k(\cdot + a) : a \in \mathbb{Z}_p/p^k\mathbb{Z}_p\}$ есть $p^{k-1}(p-1)$, откуда вытекает равенство

$$\dim \mathcal{H}(\lambda) = p^{k-1}(p-1).$$

Всё вышесказанное показывает, что $\mathbb{D}^\alpha$ совпадает с лапласианом некоторой изотропной марковской полугруппы $(\mathbb{P}^t_\alpha)_{t>0}$ на ультраметрическом пространстве с мерой $(\mathbb{Z}_p, d_p, \mu_p)$. В частности, используя полное описание спектра $\operatorname{spec} \mathbb{D}^\alpha$, вычислим внутреннее расстояние, обозначая его через $d_{p,\alpha}(x, y)$:

$$d_{p,\alpha}(x, y) = \left(\frac{\|x - y\|_p}{p}\right)^\alpha.$$

Теперь легко вычислить функцию спектрального распределения $\mathbb{N}_\alpha(x,\tau) \equiv \mathbb{N}_\alpha(\tau)$ и затем скачковое ядро $\mathbb{J}_\alpha(x,y) \equiv \mathbb{J}_\alpha(x-y)$ оператора $\mathbb{D}^\alpha$. Покажем, что

$$\mathbb{J}_\alpha(x,y) = \frac{p^\alpha - 1}{1-p^{-\alpha-1}}\left(\frac{p^{-\alpha}-p^{-\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}} + \frac{1}{\|x-y\|_p^{1+\alpha}}\right). \tag{8.1}$$

Напомним для сравнения, что в соответствии с (5.5) скачковое ядро $J_\alpha(x,y)$ оператора $\mathfrak{D}^\alpha$ задаётся формулой

$$J_\alpha(x,y) = \frac{p^\alpha - 1}{1-p^{-\alpha-1}}\frac{1}{\|x-y\|_p^{1+\alpha}}.$$

Чтобы доказать (8.1), вычислим $\mathbb{J}_\alpha(z)$. Пусть $\|z\|_p = p^{-l}$, тогда $d_{p,\alpha}(0,z) = p^{-(l+1)\alpha}$ и

$$\mathbb{J}_\alpha(z) = \int\limits_0^{1/d_{p,\alpha}(0,z)} \mathbb{N}_\alpha(\tau)d\tau = \int\limits_0^{p^{(l+1)\alpha}} \mathbb{N}_\alpha(\tau)d\tau.$$

Функция $\mathbb{N}_\alpha(\tau)$ — неубывающая непрерывная слева ступенчатая функция, имеющая скачки в точках $\tau_k = p^{k\alpha}$, $k = 1,2,...$, и принимающая значения в этих точках $\mathbb{N}_\alpha(\tau_k) = p^{k-1}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_\alpha(z) &= 1\cdot p^\alpha + p(p^{2\alpha}-p^\alpha) + p^2(p^{3\alpha}-p^{2\alpha}) + ... + p^l(p^{(l+1)\alpha}-p^{l\alpha}) \\
&= \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha-1}} + \frac{p^\alpha-1}{1-p^{-\alpha-1}}p^{l(\alpha+1)} \\
&= \frac{p^\alpha-1}{1-p^{-\alpha-1}}\left(\frac{p^{-\alpha}-p^{-\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}} + \frac{1}{\|z\|_p^{1+\alpha}}\right),
\end{aligned}$$

как и требовалось. Далее, применим теорему 3.12 и получим

$$\mathbb{D}^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} (f(x)-f(y))\,\mathbb{J}_\alpha(x-y)\,d\mu_p(y). \tag{8.2}$$

Равенства (8.1)–(8.2) и (5.1) теперь дают следующий результат.

Следствие 8.2. *Для любой функции f, определённой на $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$, положим $\widetilde{f} = f$ на $\mathbb{Z}_p$ и 0 в противном случае. Тогда*

$$f \in \mathrm{dom}(\mathbb{D}^\alpha) \Longrightarrow \widetilde{f} \in \ \mathrm{dom}(\mathfrak{D}^\alpha),$$

$$\mathbb{D}^\alpha f(x) = \mathfrak{D}^\alpha \widetilde{f}(x) \quad \text{и} \quad (\mathbb{D}^\alpha f, f) = \left(\mathfrak{D}^\alpha \widetilde{f}\,, \widetilde{f}\,\right) \tag{8.3}$$

как только $x \in \mathbb{Z}_p$, $f \in \mathrm{dom}(\mathbb{D}^\alpha)$ и $(\mathbf{1}, f) = 0$.

8.2 Случайное блуждание типа ближайшего соседа на укоренённом дереве $\mathbb{T}_p^o$

В качестве иллюстрации теоремы 7.5 построим случайное блуждание на укоренённом дереве, связанном с $\mathbb{Z}_p$, граничный процесс которого совпадает с изотропным процессом, управляемым оператором $C \cdot \mathbb{D}^\alpha$, где $C = p^{-\alpha}(1-p^{-\alpha})$.

Абелеву группу $\mathbb{Z}_p$ можно отождествить с границей дерева $\mathbb{T}_p^o$ с корнем o, где каждая вершина v имеет p исходящих соседей. В нашем отождествлении это дерево шаров ультраметрического пространства $(\mathbb{Z}_p, d_p)$ с корнем o, соответствующим всему $\mathbb{Z}_p$, и ультраметрикой $d_p(x,y) = \|x-y\|_p$. См. рис. 4 выше, где $p=2$. Зафиксируем постоянную $c \in (0,1)$ и рассмотрим случайное блуждание типа ближайшего соседа на $\mathbb{T}_p^o$, в котором

$$p(v,v^-) = 1-c \quad \text{и} \quad p(v^-,v) = \begin{cases} 1/p, & \text{если } v^- = o, \\ c/p & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{8.4}$$

Используя [64, Theorem 1.38 и Proposition 9.3] можно точно вычислить функцию Грина $G(v,o)$, вероятности попадания $F(v,o)$ и другие величины, связанные с нашим случайным блужданием. В частности, выбирая $c = (1+p^{-\alpha})^{-1}$, получим

$$F(v,o) = p^{-\alpha|v|} \quad \text{и} \quad G(v,o) = \frac{p^{-\alpha|v|}}{1-p^{-\alpha}}, \tag{8.5}$$

где $|v|$ — графовое расстояния от v до o. Видим, что функция Грина обращается в нуль на бесконечности, откуда следует, что случайное блуждание регулярно по Дирихле.

Вероятности перехода инвариантны относительно всех автоморфизмов дерева. Каждый такой автоморфизм должен оставлять на месте o и каждый уровень дерева. Пусть $\nu = \nu_o$ — предельное распределение на $\partial\mathbb{T}_p^o$ случайного блуждания, начинающегося в o. Тогда ν также инвариантно под действием группы автоморфизмов дерева (действие которой продолжено на границу). В частности, оно инвариантно под действием $\mathbb{Z}_p$. Итак, при отождествлении $\partial\mathbb{T}_p^o$ с $\mathbb{Z}_p$ имеем, что $\nu = \mu_p$ есть нормированная мера Хаара группы $\mathbb{Z}_p$.

Теперь рассмотрим граничный процесс, индуцированный нашим случайным блужданием, как скачковый процесс на $\mathbb{Z}_p$. По теореме 7.1 граничный процесс возникает как изотропный скачковый процесс с эталонной мерой μ_p. Пусть $\mathcal{L}$ — его лапласиан. В силу следствия 7.2 множество $\operatorname{spec}\mathcal{L}$ совпадает со множеством значений функции $v \mapsto 1/G(v,o)$, $v \in \mathbb{T}_p^o$, вместе с $\{0\}$. Ввиду вышеприведённой формулы для $G(v,o)$ это означает, что

$$\operatorname{spec}\mathcal{L} = \{0, (1-p^{-\alpha}), p^\alpha(1-p^{-\alpha}), p^{2\alpha}(1-p^{-\alpha}), \dots\}.$$

Напомним, что

$$\operatorname{spec}\mathbb{D}^\alpha = \{0, p^\alpha, p^{2\alpha}, \dots\} = \frac{p^\alpha}{1-p^{-\alpha}} \operatorname{spec}\mathcal{L}.$$

Поскольку и $\mathbb{D}^\alpha$, и $\mathcal{L}$ имеют одинаковые ортонормальные базисы из собственных функций, заключаем, что они пропорциональны, т. е.

$$\mathbb{D}^\alpha = \frac{p^\alpha}{1-p^{-\alpha}} \mathcal{L}. \tag{8.6}$$

Таким образом, мы наконец пришли к следующему заключению.

Предложение 8.3. *Граничный процесс* $\{X_t\}_{t>0}$*, связанный со случайным блужданием, определённым в* (8.4) *с параметром* $c = (1+p^{-\alpha})^{-1}$*, и изотропный скачковый процесс* $\{X_t^\alpha\}_{t>0}$*, управляемый оператором* $\mathbb{D}^\alpha$*, связаны линейной заменой времени* $X_{t/C} = X_t^\alpha$*, где* $C = p^{-\alpha}(1-p^{-\alpha})$.

Из равенства (8.6) следует, что скачковые ядра $\mathbb{J}_\alpha(x,y)$ и $\Theta_o(x,y)$ соответственно операторов $\mathbb{D}^\alpha$ и $\mathcal{L}$ связаны равенством

$$\mathbb{J}_\alpha(x,y) = \frac{p^\alpha}{1-p^{-\alpha}}\,\Theta_o(x,y). \tag{8.7}$$

Теперь покажем, как вычислить ядро Наим

$$\Theta_o(x,y) = \frac{1}{G(o,o)F(o,v)F(v,o)}, \quad \text{где } v = x \wedge y,$$

напрямую, используя данные из (8.5). У нас ещё нет $F(o,v)$. Вычислим

$$N(v) = \frac{1}{F(o,v)F(v,o)}.$$

Поскольку эта величина зависит только от уровня k вершины v, рассмотрим произвольный геодезический луч $[o = v_0, v_1, ...]$ и организуем линейную рекурсию для $N(v_k)$. Обозначая через w_1 произвольного соседа вершины o, отличного от v_1, и применяя [64, Proposition 9.3(b)] и (8.5), получим

$$F(o,v_1) = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p}F(w_1,o)F(o,v_1) = \frac{1}{p} + \frac{(p-1)p^{-\alpha}}{p}F(o,v_1),$$

откуда

$$F(o,v_1) = \frac{p^\alpha}{p^{\alpha+1}-p+1}.$$

Итак, получаем начальные значения

$$N(v_0) = 1 \quad \text{и} \quad N(v_1) = p^{\alpha+1} - p + 1.$$

Далее, при $k \geq 1$ пусть w_{k+1} — исходящий сосед вершины v_k, отличный от v_{k+1}. Снова применяя [64, Proposition 9.3(b)] и (8.5), получим

$$\begin{aligned} F(v_k, v_{k+1}) \;&=\; \frac{p^\alpha}{p(p^\alpha+1)} + \frac{(p-1)p^\alpha}{p(p^\alpha+1)}F(w_{k+1},v_k)F(v_k,v_{k+1}) \\ &\quad + \frac{1}{p^\alpha+1}F(v_{k-1},v_k)F(v_k,v_{k+1}). \end{aligned}$$

Подставим значение $F(w_{k+1},v_k) = p^{-\alpha}$ и разделим на

$$F(o,v_{k+1}) = F(o,v_k)F(v_k,v_{k+1}) = F(o,v_{k-1})F(v_{k-1},v_k)F(v_k,v_{k+1}).$$

Тогда получим

$$\frac{1}{F(o,v_k)} = \frac{p^\alpha}{p(p^\alpha+1)}\frac{1}{F(o,v_{k+1})} + \frac{p-1}{p(p^\alpha+1)}\frac{1}{F(o,v_k)} + \frac{1}{p^\alpha+1}\frac{1}{F(o,v_{k-1})}.$$

Теперь умножим обе стороны на $1/F(v_k, o) = p^{\alpha k}$ и получим

$$N(v_k) = \frac{1}{p(p^\alpha + 1)} N(v_{k+1}) + \frac{p-1}{p(p^\alpha + 1)} N(v_k) + \frac{p^\alpha}{p^\alpha + 1} N(v_{k-1}).$$

Это однородная линейная рекурсия второго порядка с постоянными коэффициентами. Её характеристический многочлен имеет корни 1 и $p^{\alpha+1}$. Поэтому

$$N(v_k) = A + Bp^{(\alpha+1)k}.$$

Подставляя начальные значения, без труда находим значения A и B. Чтобы получить ядро Наим, нужно умножить на $1/G(o, o) = 1 - p^{-\alpha}$. Итак, получаем

$$\Theta_o(x, y) = \frac{(1 - p^{-\alpha})(p - 1)}{p^{\alpha+1} - 1} + \frac{(1 - p^{-\alpha})(p^{\alpha+1} - p)}{p^{\alpha+1} - 1} p^{(\alpha+1)k} = \frac{1 - p^{-\alpha}}{p^\alpha} \, \mathbb{J}_\alpha(x, y) \,,$$

как и требовалось.

8.3 Случайное блуждание, соответствующее $\mathfrak{D}^\alpha$ на $\mathbb{Q}_p$

Можно объединить предыдущие рассмотрения с материалом леммы 7.6 и теоремы 7.7 относительно двойственности со случайными блужданиями в некомпактном случае. Теперь легко разобраться со случайным блужданием, соответствующим дробной производной на всём $\mathbb{Q}_p$.

Дерево, связанное с $\mathbb{Q}_p$, является однородным деревом $T = \mathbb{T}_p$ со степенями $p+1$. Нужно выбрать конец отсчёта ϖ. Тогда можно отождествить его нижнюю границу $\partial^*\mathbb{T}_p$ с полем p-адических чисел. Относительно ϖ каждая вершина v имеет предшественника v^- и p последователей. Каждое поддерево $T_v = T_{\varpi,v}$ изоморфно укоренённому дереву $\mathbb{T}_p^o$, рассмотренному выше в компактном случае p-адических целых чисел. В частности, выберем такую корневую вершину o, что $\partial T_o = \mathbb{Z}_p$. См. рис. 5 выше, где $p = 2$.

Теперь определим случайное блуждание на $\mathbb{T}_p$ как в (8.4), но с предшественниками относительно ϖ:

$$p(v, v^-) = 1 - c \quad \text{и} \quad p(v^-, v) = c/p \,, \quad \text{где} \quad c = (1 + p^{-\alpha})^{-1}. \tag{8.8}$$

Касательно следующих величин см., например, [63, pp. 423–424]. Для всех $v \in \mathbb{T}_p$

$$F(v, v^-) = p^{-\alpha} \,, \quad F(v^-, v) = p^{-1} \,, \quad G(v, v) = \frac{1 + p^{-\alpha}}{1 - p^{-\alpha-1}} \quad \text{и} \quad \nu_v(\partial T_v) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{-\alpha-1}}.$$

Это даёт, что эталонная мера μ граничного процесса относительно ϖ, заданная леммой 7.6, является стандартной мерой Хаара на $\mathbb{Q}_p$.

Вычислим $\vartheta = (1-p^{-\alpha})/(1+p^{-\alpha})$. Кроме того, положим $\mathfrak{h}(v) = d(v, v \curlywedge o) - d(o, v \curlywedge o)$ (где d — графовая метрика). Это *орициклическое число* вершины v. То есть вершины с $\mathfrak{h}(v) = k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются элементами k-го поколения H_k дерева (см. рис. 5), а ∂T_v соответствует шару радиуса p^{-k} в стандартной ультраметрике на $\mathbb{Q}_p$. Тогда

$$K(v, \varpi) = p^{\alpha\, \mathfrak{h}(v)} \quad \text{и} \quad \mathsf{m}(v) = p^{(\alpha-1)\mathfrak{h}(v)}.$$

Объединяя вышесказанное, получаем

$$\phi(v) = \frac{1+p^{-\alpha}}{1-p^{-\alpha}}\, p^{-\alpha\, \mathfrak{h}(v)} \quad \text{и} \quad \mathfrak{j}(v) = \frac{(1-p^{-\alpha})^2}{(1+p^{-\alpha})(1-p^{-\alpha-1})}\, p^{(\alpha+1)\, \mathfrak{h}(v)}.$$

Переводя это обратно в p-адические обозначения, заключаем, что внутренняя метрика и скачковое ядро граничного процесса относительно ϖ задаются формулами

$$\begin{aligned} d_\phi(x,y) &= \frac{1-p^{-\alpha}}{1+p^{-\alpha}}\, \|x-y\|_p^\alpha \quad \text{и} \\ J(x,y) &= \frac{(1-p^{-\alpha})^2}{(1+p^{-\alpha})(1-p^{-\alpha-1})}\, \frac{1}{\|x-y\|_p^{\alpha+1}} = \frac{1-p^{-\alpha}}{p^\alpha+1}\, J_\alpha(x,y)\,, \end{aligned}$$

где J_α — скачковое ядро, связанное с $\mathfrak{D}^\alpha$. Итак, мы наконец получаем следующее.

Предложение 8.4. *Граничный процесс $\{X_t\}_{t>0}$ относительно конца отсчёта ϖ, связанный со случайным блужданием* (8.8) *на $\mathbb{T}_p$, и изотропный скачковый процесс $\{X_t^\alpha\}_{t>0}$, управляемый оператором $\mathfrak{D}^\alpha$ на $\mathbb{Q}_p$, связаны линейной заменой времени $X_{t/C^*} = X_t^\alpha$, где $C^* = (1-p^{-\alpha})/(p^\alpha+1)$.*

Список литературы

[1] S. Albeverio and W. Karwowski, *Diffusion on p-adic numbers*, Gaussian random fields (Nagoya, 1990), Ser. Probab. Statist., vol. 1, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, pp. 86–99.

[2] ______, *A random walk on p-adics: generator and its spectrum*, Stochastic Processes and their Applications **53** (1994), 1–22.

[3] S. Albeverio and X. Zhao, *On the relation between different constructions of random walks on p-adics*, Markov Process. Related Fields **6** (2000), 239–255.

[4] D. Aldous and St. N. Evans, *Dirichlet forms on totally disconnected spaces and bipartite Markov chains*, J. Theoret. Probab. **12** (1999), 839–857.

[5] A. Bendikov, B. Bobikau, and Ch. Pittet, *Some spectral and geometric aspects of countable groups*, Random Walks, Boundaries and Spectra, Progress in Probability, vol. **64**, Birkhäuser, Basel, 2011, pp. 227–234.

[6] A. Bendikov, B. Bobikau, and Ch. Pittet, *Spectral properties of a class of random walks on locally finite groups*, Groups, Geometry and Dynamical Systems **7** (2013), 791–820.

[7] A. Bendikov, A. Grigor'yan, and Ch. Pittet, *On a class of Markov semigroups on discrete ultra-metric spaces*, Potential Anal. **37** (2012), 125–169.

[8] A. Bendikov and P. Krupski, *On the spectrum of the hierarchical Laplacian*, arXiv:1308.4883v2, to appear in POTA (2014).

[9] A. Bendikov and L. Saloff-Coste, *Random walks on some countable groups*, preprint (2011).

[10] C. Berg and G. Forst, *Potential theory on locally compact abelian groups*, Springer-Verlag, 1975.

[11] S. Brofferio and W. Woess, *On transience of card shuffling*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 1513–1519.

[12] P. Cartier, *Fonctions harmoniques sur un arbre*, Symposia Math. **9** (1972), 203–270.

[13] D. I. Cartwright, *Random walks on direct sums of discrete groups*, J. Theoret. Probab. **1** (1988), 341–356.

[14] D. I. Cartwright, P. M. Soardi, and W. Woess, *Martin and end compactifications of non locally finite graphs*, Transactions Amer. Math. Soc. **338** (1993), 670–693.

[15] Z.-Q. Chen, M. Fukushima, and J. Ying, *Traces of symmetric Markov processes and their characterizations*, Ann. Probab. **34** (2006), 1052–1102.

[16] T. Coulhon, A. Grigor'yan, and Ch. Pittet, *A geometric approach to on-diagonal heat kernel low bounds on groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble). **51** (2001), 1763–1827.

[17] D. A. Darling and P. Erdös, *On the recurrence of a certain chain*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 447–450.

[18] C. Dellacherie, S. Martinez, and J. San Martin, *Ultrametric matrices and induced Markov chains*, Adv. Appl. Math. **17** (1996), 169–183.

[19] ______, *Ultrametric and tree potential*, J. Theoret. Probab. **22** (2009), 311–347.

[20] J. L. Doob, *Boundary properties for functions with finite Dirichlet integrals*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **12** (1962), 573–621.

[21] J. Douglas, *Solution of the problem of Plateau*, Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), 263–321.

[22] St. N. Evans, *Local properties of Lévy processes on a totally disconnected group*, J. Theoret. Probab. **2** (1989), 209–259.

[23] ______, *Local field Brownian motion*, J. Theoret. Probab. **6** (1993), 817–850.

[24] ______, *Local fields, Gaussian measures, and Brownian motions*, Topics in probability and Lie groups: boundary theory, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 11–50.

[25] N. Fereig and S. A. Molchanov, *Random walks on abelian groups with an infinite number of generators*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **5** (1978), 22–29.

[26] L. Flatto and J. Pitt, *Recurrence criteria for random walks on countable abelian groups*, Illinois J. Math. **18** (1974), 1–19.

[27] M. Fukushima, Y. Oshima Y., and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, 2nd ed., Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

[28] A. Georgakopoulos and V. A. Kaimanovich, *In preparation.*

[29] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. **182**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295.

[30] S. Haran, *Riesz potentials and explicit sums in arithmetic*, Invent. Math. **101** (1990), 697–703.

[31] ______, *Analytic potential theory over the p-adics*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43** (1993), 905–944.

[32] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis, 1: Structure of topological groups, integration theory, group representations*, Grundlehren der math. Wiss., vol. **115**, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[33] B. Hughes, *Trees and ultrametric spaces: a categorical equivalence*, Adv. Math. **189** (2004), 148–191.

[34] R. S. Ismagilov, *On the spectrum of a selfadjoint operator in $L_2(K)$, where K is a local field; an analogue of the Feynman-Kac formula*, Teoret. Mat. Fiz. **89** (1991), 18–24.

[35] M. A. Kasymdzhanova, *Recurrence of invariant Markov chains on a class of abelian groups*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **3** (1981), 3–7.

[36] H. Kesten and F. Spitzer, *Random walks on countably infinite abelian groups*, Acta. Math. **114** (1965), 237–265.

[37] J. Kigami, *Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees*, Adv. Math. **225** (2010), 2674–2730.

[38] ______, *Transitions on a noncompact Cantor set and random walks on its defining tree*, Annales de l'Institut Henri Poincaré Prob.& Stat. **49** (2013), 1090–1129.

[39] A. N. Kochubeĭ, *Parabolic equations over the field of p-adic numbers*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **55** (1991), 1312–1330.

[40] A. N. Kochubei, *Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. **244**, Marcel Dekker Inc., New York, 2001.

[41] G. F. Lawler, *Recurrence and transience for a card shuffling model*, Combin. Probab. Comput. **4** (1995), 133–142.

[42] S. Martinez, D. Remenik, and J. San Martin, *Level-wise approximation of a Markov process associated to the boundary of an infinite tree*, J. Theor. Probab. **20** (2007), 561–579.

[43] M. Del Muto and A. Figà-Talamanca, *Diffusion on locally compact ultrametric spaces*, Expo. Math. **22** (2004), 197–211.

[44] ______, *Anisotropic diffusion on totally disconnected abelian groups*, Pacific J. Math. **225** (2006), 221–229.

[45] L. Naïm, *Sur le rôle de la frontière de r. s. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **7** (1957), 183–281.

[46] J. Pearson and J. Bellissard, *Noncommutative Riemannian geometry and diffusion on ultrametric Cantor sets*, J. Noncommut. Geometry **3** (2009), 447–480.

[47] Ch. Pittet and L. Saloff-Coste, *Amenable groups, isoperimetric profiles and random walks*, Geometric group theory down under (Canberra, 1996), de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 293–316.

[48] ______, *On the stability of the behavior of random walks on groups*, J. Geom. Anal. **10** (2000), 713–737.

[49] ———, *On random walks on wreath products*, Ann. Probab. **30** (2002), 948–977.

[50] R. Rammal, G. Toulouse, and M. A. Virasoro, *Ultrametricity for physicists*, Rev. Mod. Phys. **58** (1986), 765–788.

[51] J. J. Rodríguez-Vega and W. A. Zúñiga-Galindo, *Taibleson operators, p-adic parabolic equations and ultrametric diffusion*, Pacific J. Math. **237** (2008), 327–347.

[52] L. Saloff-Coste, *Opérateurs pseudo-différentiels sur certains groupes totalement discontinus*, Studia Mathematica **83** (1986), 205–228.

[53] ———, *Probability on groups: random walks and invariant diffusions*, Notices Amer. Math. Soc. **48** (2001), 968–977.

[54] R. L. Schilling, R. Song, and Z. Vondraček, *Bernstein functions*, second ed., de Gruyter Studies in Mathematics, vol. **37**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2012.

[55] P. M. Soardi, *Potential theory on infinite networks*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1590**, Springer, Berlin, 1994.

[56] M. H. Taibleson, *Fourier analysis on local fields*, Princeton Univ. Press, 1975.

[57] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon, *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 100, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[58] V. S. Vladimirov, *Generalized functions over the field of p-adic numbers*, Uspekhi Mat. Nauk **43** (1988), 17–53, 239. English translation in: Russian Math. Surveys **43** (1988), 19–64.

[59] V. S. Vladimirov and I. V. Volovich, *p-adic Schrödinger-type equation*, Lett. Math. Phys. **18** (1989), 43–53.

[60] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, and E. I. Zelenov, *p-adic analysis and mathematical physics*, Series on Soviet and East European Mathematics, vol. **1**, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NY, 1994.

[61] Z. Vondraček, *A characterization of Markov chains on infinite graphs by limiting distributions*, Arch. Math. (Basel) **65** (1995), 449–460.

[62] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. **138**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[63] ———, *Lamplighters, Diestel-Leader graphs, random walks, and harmonic functions*, Combin. Probab. Comput. **14** (2005), 415–433.

[64] ———, *Denumerable Markov chains. Generating functions, boundary theory, random walks on trees*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2009.

[65] ———, *On the duality between jump processes on ultrametric spaces and random walks on trees*, arXiv:1211.7216 (2012).

[66] M. Yamasaki, *Discrete potentials on an infinite network*, Mem. Fac. Sci., Shimane Univ. **13** (1979), 31–44.

[67] W. A. Zúñiga-Galindo, *Parabolic equations and Markov processes over p-adic fields*, Potential Anal. **28** (2008), 185–200.

A. Bendikov: Institute of Mathematics, Wroclaw University
Pl. Grundwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław, Poland
email: bendikov@math.uni.wroc.pl

A. Grigor'yan: Department of Mathematics, University of Bielefeld,
33501 Bielefeld, Germany
email: grigor@math.uni-bielefeld.de

Ch. Pittet: LATP, Université d'Aix-Marseille, 39 rue Joliot-Curie,
13453 Marseille Cedex 13, France
email: pittet@cmi.univ-mrs.fr

W. Woess: Institut für Mathematische Strukturtheorie, Technische Universität Graz
Steyrergasse 30, A-8010 Graz, Austria
email: woess@TUGraz.at