

Musterlösungen zur Klausur Spezielle Aspekte der Analysis

Aufgabe 1.

Für die angegebene Substitution $u = \sqrt[3]{x}$, also $x = u^3$, gilt

$$\frac{dx}{du} = 3u^2,$$

und das Integral wird nach der Substitutionsregel zu

$$\int e^u \cdot 3u^2 du.$$

Durch partielle Integration finden wir

$$3 \int u^2 e^u du = 3u^2 e^u - 3 \int 2ue^u du.$$

Nochmalige partielle Integration ergibt

$$6 \int ue^u du = 6ue^u - 6 \int e^u du = 6ue^u - 6e^u + C$$

mit einer Konstanten C . Fassen wir alles zusammen, so folgt

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx = (3x^{\frac{2}{3}} - 6\sqrt[3]{x} + 6)e^{\sqrt[3]{x}} - C.$$

Aufgabe 2.

(a) Bezeichnen wir die Position des Punktes zum Zeitpunkt t mit $(x(t), y(t))$, so gilt nach Aufgabenstellung

$$\dot{x} = \sin t, \quad \dot{y} = 1 - \cos t,$$

also

$$x = \int \sin t dt = -\cos t + c, \quad y = \int (1 - \cos t) dt = t - \sin t + d$$

mit gewissen Konstanten c und d . Da sich der Punkt zum Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung befindet, ist $x(0) = 0$ und $y(0) = 0$, also $c = 1$, $d = 0$, und wir erhalten

$$x = 1 - \cos t, \quad y = t - \sin t.$$

Setzen wir $t = 2\pi$ ein, so finden wir, dass sich der Punkt zu diesem Zeitpunkt an der Stelle $(0, 2\pi)$ befindet.

(b) Der zurückgelegte Weg berechnet sich nach der Formel

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

In unserem Fall ist

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \sin^2 t + (1 - \cos t)^2 = \sin^2 t + 1 - 2 \cos t + \cos^2 t \\ &= 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2}, \end{aligned}$$

wobei wir entsprechend dem gegebenen Hinweis die Formel

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

verwendet haben. Da $\sin \frac{t}{2}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ nichtnegativ ist, gilt

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2 \sin \frac{t}{2}$$

und die gesuchte Wegstrecke ist

$$\int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = 4 \int_0^{\pi} \sin u du = -4 \cos u \Big|_0^{\pi} = 8,$$

wobei wir die Substitution $u = \frac{t}{2}$ benutzt haben.

(c) Die überstrichene Fläche ist nach der Sektorenformel gleich

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy - \dot{x}y) dt.$$

In unserem Fall ist

$$\begin{aligned} xy - \dot{x}y &= (1 - \cos t)^2 - \sin t(t - \sin t) \\ &= 1 - 2 \cos t + \cos^2 t - t \sin t + \sin^2 t \\ &= 2 - 2 \cos t - t \sin t. \end{aligned}$$

Wir finden

$$\int_0^{2\pi} (2 - 2 \cos t) dt = [2t - 2 \sin t]_0^{2\pi} = 4\pi$$

und durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t \sin t dt &= -t \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt \\ &= [-t \cos t + \sin t]_0^{2\pi} = -2\pi. \end{aligned}$$

Somit ist die gesuchte Fläche gleich

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 - 2 \cos t - t \sin t) dt = 3\pi.$$

Aufgabe 3.

Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, und die Standardmethode liefert

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{x+1},$$

also

$$\arcsin y = \ln|x+1| + C$$

mit einer Konstanten C . Da die Lösung auf einem Intervall definiert sein soll, das den Punkt $x = 0$ enthält, erhalten wir

$$\arcsin y = \ln(x+1) + C, \quad y = \sin(\ln(x+1) + C).$$

Aus dem vorgeschriebenen Anfangswert $y(0) = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$\sin C = \frac{1}{2},$$

also z. B. $C = \frac{\pi}{6}$, und die Lösung ist

$$y = \sin\left(\ln(x+1) + \frac{\pi}{6}\right).$$

Aufgabe 4.

Um die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0$$

zu finden, betrachten wir ihre charakteristische Gleichung

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Diese hat nur die Lösung

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Nach Satz 29 der Vorlesung ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$x = (at + b)e^{t/2}$$

mit beliebigen Konstanten a und b .

Nun kommen wir zu der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung

$$4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 25 \cos t.$$

Mit dem Ansatz

$$x = a \cos t + b \sin t$$

ergibt sich

$$\dot{x} = -a \sin t + b \cos t,$$

$$\ddot{x} = -a \cos t - b \sin t.$$

Dies setzen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten nach Zusammenfassen ähnlicher Terme

$$(-4a - 4b + a) \cos t + (-4b + 4a + b) \sin t = 25 \cos t.$$

Setzen wir z. B. $t = 0$ bzw. $t = \frac{\pi}{2}$ ein, so folgt

$$-3a - 4b = 25,$$

$$4a - 3b = 0.$$

Die zweite Gleichung ergibt $b = \frac{4}{3}a$, und eliminieren wir b aus der ersten Gleichung, so folgt $a = -3$, $b = -4$. Somit haben wir die partikuläre Lösung

$$x = -3 \cos t - 4 \sin t$$

gefunden, und die allgemeine Lösung ist

$$x = (at + b)e^{t/2} - 3 \cos t - 4 \sin t.$$

Aufgabe 5.

Die Lagrangefunktion ist

$$L(t, x, v) = t^2 v^2 + 2x^2$$

mit den Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial v} = 2t^2 v, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 4x.$$

Damit ergibt sich die Eulersche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} (2t^2 \dot{x}) = 4x.$$

Teilen wir beide Seiten durch 2 und bringen alle Terme auf die linke Seite, so erhalten wir

$$t^2 \ddot{x} + 2t \dot{x} - 2x = 0.$$

Setzen wir die Lösung wie empfohlen als $x = t^n$ an, so ergibt sich durch Einsetzen

$$t^2 n(n-1)t^{n-2} + 2tnt^{n-1} - 2t^n = 0,$$

also

$$(n(n-1) + 2n - 2)t^n = 0.$$

Da die Lösung z. B. für $t = 1$ definiert sein soll, muss

$$n(n-1) + 2n - 2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad n^2 + n - 2 = 0$$

sein. Das bedeutet

$$n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

also $n = 1$ oder $n = -2$, und wir haben die Lösungen

$$x = t \quad \text{und} \quad x = t^{-2}$$

gefunden. Da es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung handelt, ist auch

$$x = at + bt^{-2}$$

für beliebige Konstanten a und b eine Lösung.

Die Randwerte sollen $x(1) = 0$ und $x(2) = 7$ sein, also

$$a + b = 0, \quad 2a + \frac{b}{4} = 7.$$

Daraus ergibt sich

$$b = -a, \quad \left(2 - \frac{1}{4}\right)a = 7,$$

also $a = 4$ und $b = -4$, und die gesuchte Lösung ist

$$x = 4(t - t^{-2}).$$