

# Musterlösungen zu Zählen und Zahlbereiche

## Zweite Klausur

### Aufgabe 1.

Unter der Vereinigungsmenge von Mengen  $M$  und  $N$  verstehen wir die Menge aller Objekte, die zur Menge  $M$  oder zur Menge  $N$  gehören, d. h.

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}.$$

Unter der Differenzmenge von Mengen  $M$  und  $N$  verstehen wir die Menge aller Objekte, die zur Menge  $M$ , aber nicht zur Menge  $N$  gehören, d. h.

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}.$$

Ein Objekt  $x$  gehört nach Definition der Differenzmenge genau dann zur Menge  $(L \cup M) \setminus N$ , wenn

$$(x \in L \cup M) \wedge (x \notin N),$$

d. h. nach Definition der Vereinigungsmenge genau dann, wenn

$$(x \in L \vee x \in M) \wedge (x \notin N).$$

Nach dem logischen Distributivgesetz

$$(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

ist diese Aussage äquivalent zu

$$(x \in L \wedge x \notin N) \vee (x \in M \wedge x \notin N).$$

Dies bedeutet nach Definition der Differenzmenge, dass

$$(x \in L \setminus N) \vee (x \in M \setminus N),$$

und dies wiederum nach Definition der Vereinigungsmenge, dass  $x$  ein Element von  $(L \setminus N) \cup (M \setminus N)$  ist.

### Aufgabe 2.

Addieren wir jeweils die linken und rechten Seiten der gegebenen Gleichungen<sup>1</sup>, so ergibt sich

$$(k + l) + (k + m) = (m + n) + (l + n).$$

---

<sup>1</sup>Dies bedarf keiner besonderen Begründung, da die Terme auf beiden Seiten einer Gleichung die selbe Zahl darstellen.

Unter Verwendung des Assoziativgesetzes erhalten wir

$$((k + l) + k) + m = m + (n + (l + n))$$

und unter Verwendung des Kommutativgesetzes schließlich

$$(k + (k + l)) + m = ((l + n) + n) + m.$$

Mit der Kürzungsregel der Addition folgt

$$k + (k + l) = (l + n) + n,$$

mit dem Assoziativgesetz der Addition folgt

$$(k + k) + l = l + (n + n)$$

und mit dem Kommutativgesetz der Addition

$$(k + k) + l = (n + n) + l.$$

Nach der Kürzungsregel der Addition ist nun

$$k + k = n + n.$$

Mit der in der Aufgabe angegebenen Regel folgt

$$2k = 2n$$

und mit der Kürzungsregel der Multiplikation schließlich

$$k = n.$$

Setzen wir dies in die erste der beiden gegebenen Gleichungen ein, so erhalten wir mit dem Kommutativgesetz der Addition

$$l + k = m + k$$

und mit der Kürzungsregel der Addition

$$l = m.$$

Alternativer Beweis für die Aussage  $l = m$ : Man vertausche vor dem Addieren der gegebenen Gleichungen bei einer von beiden die Seiten und verfare wie beim Beweis von  $k = n$ .

Die in der Aufgabe angegebene Regel  $n + n = 2n$  folgt übrigens mit dem Distributivgesetz aus den Aussagen  $1 \cdot n = n$  und  $1 + 1 = 2$ .

### **Aufgabe 3.**

(a) Die Additions- und Multiplikationstabelle im Oktalsystem sind

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

·	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

(b) Die Methode der schriftlichen Multiplikation im Oktalsystem ergibt

$$\begin{array}{r}
 247 \cdot 53 \\
 \hline
 1503 \\
 \phantom{1503} 765 \\
 \hline
 \underline{\underline{16015}}
 \end{array}$$

Unser Ergebnis lautet also

$$247_8 \cdot 53_8 = 16015_8.$$

(c) Da 8 eine Potenz von 2 ist, können wir die gegebenen Oktalzahlen ziffernweise ins Dualsystem umwandeln. Wegen

$$1 = 001_2, \quad 2 = 010_2, \quad 5 = 101_2$$

erhalten wir

$$121_8 = 1010001_2, \quad 52_8 = 101010_2.$$

Nun führen wir die schriftliche Division im Dualsystem aus:

$$\begin{array}{r}
 1010001 : 101010 = 1,1110\dots \\
 \underline{101010} \\
 1001110 \\
 \underline{101010} \\
 \rightarrow 1001000 \\
 \underline{101010} \\
 111100 \\
 \underline{101010} \\
 100100 \\
 \underline{\phantom{100100}0} \\
 \rightarrow 100100 \\
 \dots
 \end{array}$$

Von hier an wiederholen sich die Reste. Der gesuchte periodische Dualbruch ist also  $1,1\overline{110}_2$ .

Alternative Lösung: Schriftliche Division im Oktalsystem, nämlich

$$\begin{array}{r}
 121 : 52 = 1,73 \dots \\
 \underline{52} \\
 470 \\
 \underline{446} \\
 \rightarrow 220 \\
 \underline{176} \\
 \rightarrow 22 \\
 \dots
 \end{array}$$

liefert den periodischen Oktalbruch  $1,7\bar{3}$ , der sich leicht ziffernweise in den periodischen Dualbruch  $001,111\bar{011}_2 = 1,1\bar{110}_2$  umwandeln lässt.

#### Aufgabe 4.

Geordnete Paare  $(a, b)$  und  $(c, d)$ , wobei  $b \neq 0$  und  $d \neq 0$  ist, heißen quotientengleich, wenn  $a \cdot d = b \cdot c$ .

Eine rationale Zahl ist eine Äquivalenzklasse in  $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$  bezüglich der Relation der Quotientengleichheit. Die Äquivalenzklasse des Paares  $(a, b)$  wird mit  $\frac{a}{b}$  bezeichnet.

Wir definieren die Addition von rationalen Zahlen  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  durch

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Das Assoziativgesetz für die Addition rationaler Zahlen besagt, dass für beliebige rationale Zahlen  $r, s$  und  $t$  gilt

$$(r + s) + t = r + (s + t).$$

Der Rest der Musterlösung ist identisch mit der von Hausaufgabe 64.

#### Bemerkungen.

Aufgabe 1 ist ähnlich zur Hausaufgabe 6, wobei allerdings das verwendete logische Distributivgesetz hier nicht bewiesen zu werden brauchte.

Aufgabe 2 erinnert an den Beweis von Satz 39, von dem ein Teil in Hausaufgabe 49 bewiesen wurde. Wie dort sind auch hier nur die Rechengesetze für natürliche Zahlen zugelassen. Will man Differenzen benutzen, muss man ihre Existenz im Bereich der natürlichen Zahlen begründen. So folgt aus der ersten gegebenen Gleichung nach Definition der Differenz, dass  $k = (m + n) - l$ . Im Weiteren muss man dann aber Rechengesetze der Subtraktion zur Begründung anführen.

Aufgabe 3 kombiniert Elemente der Hausaufgaben 38(a), 39 und 41.

Aufgabe 4 fragt einen Teil der Definitionen 39 und 40 ab, der Rest ist identisch mit der Hausaufgabe 64. Ihre Lösung kann man nur verstehen, wenn man die besagten Definitionen kennt.