ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
3. Übungsblatt

Julia Sauter, Andrew Hubery

Aufgabe 1.

Zu Erinnerung: Um die Lösungsmenge $L = \{(x, y, z) \mid ax+by+cz = 0\}$ zu finden machen wir Folgendes.

- Euklid: $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ und $d = ap + bq$.
- Euklid: $e = \mathrm{ggT}(c, d) = \mathrm{ggT}(a, b, c)$. Dann gilt $cd/e = \mathrm{kgV}(c, d)$.
- Es gilt $ax + by = -cz \in (a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) \cap c\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \cap c\mathbb{Z} = \mathrm{kgV}(c, d)\mathbb{Z}$. Also für $t \in \mathbb{Z}$ können wir $ax + by = -cz = t \cdot cd/e$ lösen und wir bekommen die Lösungsmenge $L = \bigcup_t \{(x, y, z) \mid ax + by = t \cdot cd/e = -cz\}$.

Zum Beispiel: $L = \{(x, y, z) \mid 4x + 6y + 15z = 0\}$. Dann gilt $d = 2 = -4 + 6$ und $e = 1$. Die Lösungen zu $4x + 6y = 30t$ sind also $t \cdot (-15, 15) + u \cdot (-3, 2)$ und die Lösung zu $-15z = 30t$ ist $z = -2t$. Es folgt:

$$L = \{(-15t - 3u, 15t + 2u, -2t) \mid t, u \in \mathbb{Z}\}.$$

Finden Sie die Lösungsmengen für die Gleichenungen

(a) $12x + 15y + 20z = 0$.

(b) $42x + 105y + 91z = 0$.

(c) $231x + 198y + 143z = 0$.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 2.

Zu Erinnerung: Gegeben sei $x \in \mathbb{R}$ und wir wollen $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ als Kettenbruch schreiben. Wir setzen $a_0 := \lfloor x \rfloor$ so dass $0 \leq x - a_0 < 1$. Falls $x - a_0 > 0$ setzen wir $x_1 := \frac{1}{x-a_0}$ und $a_1 := \lfloor x_1 \rfloor$, so dass $0 \leq x_1 - a_1 < 1$. Und so weiter.

Wir schreiben $[a_0; \overline{a_1, \ldots, a_n}]$ falls $a_{k+n} = a_k$ für alle $k > 0$.

(a) Zeigen Sie $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$.

(b) Finden Sie $\sqrt{15}$.

(c) Finden Sie $\sqrt{31}$.

(je 2 Punkte)

Abgabe: Montag 6. Mai, bis 12 Uhr in die Postfächer der Tutoren im V3–126

Aufgabe 3.

Gegeben sei ein Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und $a_j > 0$ für $j > 0$. Wir setzen

$$\begin{bmatrix} p_{-1} \\ q_{-1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_{-2} \\ q_{-2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{für } i \geq 0$$

und $Q_i = [a_0; a_1, \ldots, a_i] = p_i/q_i$ für $i \geq 0$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\begin{bmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ für alle $i \geq 0$.
(Es gilt auch für $i = -1$, wenn man das leere Produkt als Identität definiert.)

(b) $\det \begin{bmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{bmatrix} = (-1)^{i+1}$ für alle $i \geq -1$.

(c) $\mathrm{ggT}(p_i, q_i) = 1$ für alle $i \geq -2$.

(d) $Q_{i-1} - Q_i = (-1)^i/q_i q_{i-1}$ für alle $i \geq 1$.

(e) $Q_i - Q_{i-2} = (-1)^i a_i/q_i q_{i-2}$ für alle $i \geq 2$. (Hinweis: Benutzen Sie (d).)

(je 1 Punkt)

Aufgabe 4.

(a) Berechnen Sie wie viele Nullen am Ende der Dezimalentwicklung von 2024! stehen.

(b) Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass es eine Primzahl p gibt, so dass $p \mid n!$ aber $p^2 \nmid n!$.

(c) Robert Recorde (1510–1558) behauptete, dass 2096128 vollkommen ist. Widerlegen Sie ihn.

(je 1 Punkt)