

# ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE

## 4. Übungsblatt

Julia Sauter, Andrew Hubery

### Aufgabe 1.

Sei  $\phi$  die Eulersche  $\phi$ -Funktion, sodass  $\phi(n) = |\{0 < a < n \mid \text{ggT}(a, n) = 1\}|$ . Wir können annehmen, dass  $\phi$  multiplikativ ist, und falls  $n$  die Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$  mit paarweis verschiedene Primzahlen  $p_i$  und  $a_i \geq 1$ , dann gilt  $\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r})$ .

Finden Sie alle  $n \geq 2$  mit

- (a)  $\phi(n) = 2n/5$ .
- (b)  $\phi(n) \mid n$ . (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass 2 ein Teiler von  $n$  ist.)

(je 2 Punkt)

### Aufgabe 2.

- (a) Kontrollieren Sie, dass  $x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$  für all  $x \not\equiv 0 \pmod{11}$ . Finden Sie  $0 \leq x < 11$  mit  $x \equiv 137^{165742} \pmod{11}$ .
- (b) Kontrollieren Sie, dass  $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$  für all  $x$  mit  $\text{ggT}(x, 16) = 1$ . Finden Sie  $0 \leq x < 16$  mit  $x \equiv 35^{319} \pmod{16}$ .
- (c) Finden Sie  $0 \leq x < 101$  mit  $97! \equiv x \pmod{101}$ . (Hinweis: Benutzen Sie der Satz von Wilson um zu zeigen, dass  $6 \cdot 97! \equiv 1 \pmod{101}$ . Benutzen Sie Euklid/Bézout um  $x$  mit  $6 \cdot x \equiv 1 \pmod{101}$  zu finden.)

(je 2 Punkt)

### Aufgabe 3.

- (a) Finden Sie die kleinste  $n \geq 1$  mit  $10^n \equiv 1 \pmod{13}$ . Schreiben Sie  $10^n = 13 \cdot k + 1$  mit  $k = a_1 \cdots a_n$  und  $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Folgern Sie, dass  $\frac{1}{13} = 0,\overline{a_1 \cdots a_r}$  als Dezimalzahl mit Periode  $r$ .
- (b) Für  $m \in \mathbb{N}$  und eine Primzahl  $p$  können wir  $m = (m_r \cdots m_0)_p$  im  $p$ -adischen Ziffersystem, also mit  $0 \leq m_i < p$ . Zeigen Sie, dass  $x^m \equiv x^{m_r + \cdots + m_0} \pmod{p}$ .
- (c) Sei  $x \in \mathbb{N}$  und schreiben Sie  $x = a_r \cdots a_0$  mit  $0 \leq a_i \leq 9$  in 10-er Ziffersystem. Zeigen Sie, dass  $11 \mid x$  genau dann, wenn  $11 \mid (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^r a_r)$ .
- (d) Sei  $x \in \mathbb{N}$  und schreiben Sie  $x = 10q + r$  mit  $0 \leq r < 9$ . Zeigen Sie, dass  $7 \mid x$  genau dann, wenn  $7 \mid (q + 5r)$ .

(je 1 Punkt)

#### Aufgabe 4.

Eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt multiplikativ, falls  $f(mn) = f(m)f(n)$  immer dann, wenn  $\text{ggT}(m, n) = 1$ . (Hier  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ .) Es folgt, dass  $f(1) = 1$ .

- (a) Seien  $m_{p,a} \in \mathbb{C}$  beliebige Zahlen, wobei  $p$  eine Primzahl ist und  $a \geq 1$ . Zeigen Sie, dass es genau eine multiplikative Funktion  $f$  gibt mit  $f(p^a) = m_{p,a}$  für alle Primpotenzen  $p^a$ .

Wir definieren nun die folgenden multiplikativen Funktionen.

- $\nu(n) = 0$  für alle  $n > 1$ .
- $u(n) = 1$  für alle  $n$ .
- $E(n) = n$  für alle  $n$ .
- (Möbius)  $\mu(p) = -1$  und  $\mu(p^{a+1}) = 0$  für alle Primzahlen  $p$  und  $a \geq 1$ .
- $\tau(p^a) = a + 1$  für alle Primzahlen  $p$  und  $a \geq 1$  (Anzahl der positiven Teiler).
- $\sigma(p^a) = 1 + p + \dots + p^a$  für alle Primzahlen  $p$  und  $a \geq 1$  (Summe aller positiven Teiler).

Die Dirichlet-Faltung ist durch  $(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$  definiert. Sie liefert eine kommutative, associative Verknüpfung (oder Multiplikation). Es gilt  $f * \nu = f$ , und aus  $f, g$  multiplikativ folgt  $f * g$  multiplikativ.

- (b) Zeigen Sie, dass  $\mu * u = \nu$  und  $\phi * u = E$ , wobei  $\phi$  die eulersche  $\phi$ -Funktion ist.  
Folgern Sie, dass  $\phi = E * \mu$ , dass  $\phi$  multiplikativ ist, und dass  $\sum_{d|n} \frac{1}{d} \mu(d) = \frac{1}{n} \phi(n)$ .
- (c) Zeigen Sie, dass  $\sigma = \phi * \tau$ . (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass  $\tau = u * u$ .)
- (d) Für multiplikative Funktionen  $f$  und  $g$  schreiben wir  $f \cdot g$  für die multiplikative Funktion  $(f \cdot g)(n) := f(n)g(n)$ .

Sei nun  $E_r$  die multiplikative Funktion mit  $E_r(p^a) = p^{ar}$  für alle Primzahlen  $p$  und  $a \geq 1$ . Zeigen Sie, dass  $(E_r \cdot \phi) * E_r = E_{r+1}$ . (Hinweis: Multiplikative Funktionen sind gleich genau dann, wenn sie die gleichen Werte für alle Primpotenzen haben.)

(1+2+1+2 Punkte)