ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
4. Übungsblatt

Julia Sauter, Andrew Hubery

Aufgabe 1.

Sei ϕ die Eulersche ϕ-Funktion, sodass $\phi(n) = |\{0 < a < n \mid \mathrm{ggT}(a, n) = 1\}|$. Wir können annehmen, dass ϕ multiplikativ ist, und $\phi(p^a) = p^{a-1}(p-1)$ für eine Primzahl p und $a \geq 1$.

Finden Sie alle $n \geq 2$ mit

(a) $\phi(n) = 2n/5$.

(b) $\phi(n) \mid n$. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass 2 ein Teiler von n ist.)

(je 2 Punkt)

Aufgabe 2.

(a) Kontrollieren Sie, dass $x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$ für all $x \not\equiv 0 \pmod{11}$. Finden Sie $0 \leq x < 11$ mit $x \equiv 137^{165742} \pmod{11}$.

(b) Kontrollieren Sie, dass $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$ für all x mit $\mathrm{ggT}(x, 16) = 1$. Finden Sie $0 \leq x < 16$ mit $x \equiv 35^{319}$.

(c) Finden Sie $0 \leq x < 101$ mit $97! \equiv x \pmod{101}$. (Hinweis: Benutzen Sie der Satz von Wilson um zu zeigen, dass $6 \cdot 97! \equiv 1 \pmod{101}$. Benutzen Sie Euklid/Bézout um x mit $6 \cdot x \equiv 1 \pmod{101}$ zu finden.)

(je 2 Punkt)

Aufgabe 3.

(a) Finden Sie die kleinste $n \geq 1$ mit $10^n \equiv 1 \pmod{13}$. Schreiben Sie $10^n = 13 \cdot k + 1$ mit $k = a_1 \cdots a_n$ und $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Folgern Sie, dass $\frac{1}{13} = 0,\overline{a_1 \cdots a_n}$ als Dezimalzahl mit Periode n.

(b) Für $m \in \mathbb{N}$ und eine Primzahl p können wir $m = (m_r \cdots m_0)_p$ im p-adischen Ziffernsystem, also mit $0 \leq m_i < p$. Zeigen Sie, dass $x^m \equiv x^{m_r + \cdots + m_0} \pmod{p}$.

(c) Sei $x \in \mathbb{N}$ und schreiben Sie $x = a_r \cdots a_0$ mit $0 \leq a_i \leq 9$ in 10-er Ziffersystem. Zeigen Sie, dass $11 \mid x$ genau dann, wenn $11 \mid (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^r a_r)$.

(d) Sei $x \in \mathbb{N}$ und schreiben Sie $x = 10q + r$ mit $0 \leq r < 9$. Zeigen Sie, dass $7 \mid x$ genau dann, wenn $7 \mid (q + 5r)$.

(je 1 Punkt)

Abgabe: Montag 13. Mai, bis 12 Uhr in die Postfächer der Tutoren im V3–126

Aufgabe 4.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt multiplikativ, falls $f(mn) = f(m)f(n)$ immer dann, wenn $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$. (Hier $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.) Es folgt, dass $f(1) = 1$.

(a) Seien $m_{p,a} \in \mathbb{C}$ beliebige Zahlen, wobei p eine Primzahl ist und $a \geq 1$. Zeigen Sie, dass es genau eine multiplikative Funktion f gibt mit $f(p^a) = m_{p,a}$ für all Primpotenzen p^a.

Wir definieren nun die folgenden multiplikativen Funktionen.

- $\nu(n) = 0$ für alle $n > 1$.
- $u(n) = 1$ für alle n.
- $E(n) = n$ für alle n.
- (Möbius) $\mu(p) = -1$ und $\mu(p^{a+1}) = 0$ für alle Primzahlen p und $a \geq 1$.
- $\tau(p^a) = a + 1$ für alle Primzahlen p und $a \geq 1$ (Anzahl der positiven Teiler).
- $\sigma(p^a) = 1 + p + \cdots + p^a$ für alle Primzahlen p und $a \geq 1$ (Summe aller positiven Teiler).

Die Dirichlet–Faltung ist durch $(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$ definiert. Sie liefert eine kommutative, associative Verknüpfung (oder Multiplikation). Es gilt $f * \nu = f$, und aus f, g multiplikativ folgt $f * g$ multiplikativ.

(b) Zeigen Sie, dass $\mu * u = \nu$ und $\phi * u = E$, wobei ϕ die eulersche ϕ-Funktion ist.

Folgern Sie, dass $\phi = E * \mu$, dass ϕ multiplikativ ist, und dass $\sum_{d|n} \frac{1}{d}\mu(d) = \frac{1}{n}\phi(n)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\sigma = \phi * \tau$. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\tau = u * u$.)

(d) Für multiplikative Funktionen f und g schrieben wir $f \cdot g$ für die multiplikative Funktion $(f \cdot g)(n) := f(n)g(n)$.

Sei nun E_r die multiplikative Funktion mit $E_r(p^a) = p^{ar}$ für alle Primzahlen p und $a \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(E_r \cdot \phi) * E_r = E_{r+1}$. (Hinweis: Multiplikative Funktion sind gleich genau dann, wenn sie die gleiche Werte für alle Primpotenzen haben.)

(1+2+1+2 Punkte)