PS ZU ALGEBRAISCHEN KURVEN

SOSE 2019

(1) **Vortrag 1: Was ist eine algebraische Kurve?**
In diesem Vortrag werden erste Beispiele und die Definition besprochen [Fi94], Kapitel 0, Kapitel 1 bis eischliesslich Definition in 1.2. Circa die Hälfte des Vortrages soll dem folgenden Thema gewidmet werden:
Extraaufgabe : Erstelle einen Steckbrief des Polynomringes $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit K ein Körper, $n \geq 1$ zu erstellen. Insbesondere, der Ring $\mathbb{C}[X, Y]$ soll genauer studiert werden (es handelt sich um einen faktoriellen Ring, die Einheiten sind $K \setminus \{0\}$, jedes Ideal is endlich erzeugt (Satz von Hilbert), Beispiele irreduzibler Polynome, falls K algebraische abgeschlossen ist, ist jedes maximale Ideal von der Form $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$, ein Polynom $f \in K[X]$ has höchstens n Nullstellen). Schauen Sie in Standardlehrbücher der Algebra wie zum Beispiel [Bo], [L].

(2) **Vortrag 2: Eigenschaften Algebraischer Kurven**
Angefangen bei der Definition einer affin algebraischen Kurve [Fi94], 1.2, Lemma von Study, irreduzible Komponenten, Verschwindungsideal, Minimalpolynom, Grad einer Kurve bis einschliesslich [Fi94], 1.8.
Extraaufgabe: Erkläre [Fi94] Anhang 1 zur Resultante.

(3) **Vortrag 3: Der projektive Abschluss**
[Fi94], Kapitel 2: Einführung der projektiven Ebene, Homogenisierung und Dehomogenisierung (2.4), Definition der Schnittmultiplizität, Satz von Bezout.
Extraaufgabe: $K[X_0, X_1, X_2]$ ist ein graduierter Ring. Definiere homogene Ideale.

(4) **Vortrag 4: Tangenten und Singulartäten**
[Fi94], Kapitel 3: Definition eines glatten Punktes und der Tangente an einem Punkt, Taylorentwicklung und Ordung der Kurve an einem Punkt, Kontaktordung, Satz von Euler.

(5) **Vortrag 5: Quadriken und klassische Sätze**
[Boe], Kapitel 3.2 Klassifikation der Quadriken, Satz von Pascal, Satz von Pappos

(6) **Vortrag 6: Polaren und Hesse-Kurve**
[Fi94], Kapitel 4

(7) **Vortrag 7: Duale Kurve und Plückerformeln**
[Fi94], Kapitel 5. Hier tauchen im Fischer holomorphe Parametrisierungen zur Berechnung von Schnittmultiplizitäten auf. Der Begriff holomorph bedeutet, dass die Abbildung unendlich oft komplex differenzierbar ist (und stammt aus der Funktionentheorie, vgl. Wikipedia). Vielleicht erläutert man die Idee an Beispielen und läßt einen Teil des Beweises aus. Alternative Quelle: [Boe], Kapitel 5 und Anhang D

(8) **Vortrag 8: Affine und projektive Varietäten**
[Hu] Abschnitte 1.1, 1.2.1: Affine Varietäten und der Nullstellensatz, polynomiale Abbildungen
[Hu] Abschnitt 2.2, 2.3.3 projektive Varietäten und der Nullstellensatz
Extraaufgabe: Faktorringe des Polynomringes $K[X_1, \ldots, X_n]/I$ definieren.

(9) **Vortrag 9: Klassifikation kubischer Kurven**
[Hu] Kapitel 4.1,4.2,4.3 (hierbei gilt: die Ergebnisse aus vorigen Vorträgen sollen nur zitiert werden), alternativ: [Boe] Abschnitt 3.3

(10) **Vortrag 10: Elliptische Kurven**
Das Gruppengesetz [Hu] Kapitel 4.4 und [Boe] Abschnitt 3.3.3, eine Abstimmung mit dem vorigen Vortrag ist nötig (wegen Weierstrass-Normal, J-Invariante,..), um das Material sinnvoll aufzuteilen.

(11) **Vortrag 11: Linearsysteme (Enumerative Geometrie)**
Gegeben eine gewisse Anzahl an Punkten, wieviele Kurven von gegebenem Grad enthalten sie? Zuerst [KLM09] Kapitel 6 A),B),C) (hier gilt es die programmierten Beispiele in *Singular* zu ignorieren), [Boe], Anhang C, [Fu] Abschnitt 5.2

(12) **Vortrag 12: Geraden auf Kubischen Flächen**
[Hu] Kapitel 5 (siehe auch [KLM09] Kapitel 6, D)

(13) **Vortrag 13 (optional) : Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen**[1]
[Fi94] Kapitel 9

References

[Bo] Siegfried Bosch, Algebra, 7. Auflage, Springer Verlag, 2009.

[Boe] Rodger Böttcher, Einführung in die Theorie der algebraischen Kurven und deren Eigenschaften `https://d-nb.info/1124592504/34`

[Fi94] Gerd Fischer, Ebene algebraische Kurven, *Aufbaukurs Mathematik*, Vieweg Verlag, 1994.

[Fu] William Fulton, Algebraic Curves, *Mathematics lecture note series*, New York [u.a.] : Benjamin, 1969

[Hu] Klaus Hulek, Elementare Algebraische Geometrie, *Aufbaukurs Mathematik*, Springer Spektrum, 2012

[KLM09] Stephan Klaus, Oliver Labs, Thomas Markwi, Theorie und Visualisierung algebraischer Kurven und Flächen, *Fortbildung für Mathematiklehrer*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach `http://www.math.uni-tuebingen.de/user/keilen/download/Lehre/EMWS08/fortbildung.pdf`

[L] Serge Lang, Algebra, *Graduate Text in Mathematics* 3.Auflage, Springer Verlag, 2005.

[1] Dies ist ein anspruchsvoller Vortrag