

**Aufgabe 10** (Globalübung, 4 + 4 Punkte) Den Kathetensatz, den Höhensatz und den Satz des Pythagoras nennt man Satzgruppe des Pythagoras. Zeigen Sie:

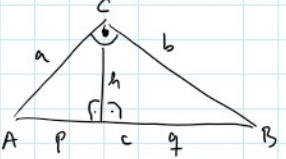
a) Der Höhensatz folgt aus dem Satz von Pythagoras.

b) Der Kathetensatz folgt aus dem Höhensatz.

Hinweis: In Teil b verwendet man den Satz des Thales.

$$h^2 = pq$$

a)



Wir dürfen verwenden:

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow a^2 = c^2 - b^2$$

$$h^2 + p^2 = a^2$$

$$h^2 + q^2 = b^2$$

$$h^2 = a^2 - p^2 = c^2 - b^2 - p^2 = (p+q)^2 - b^2 - p^2$$

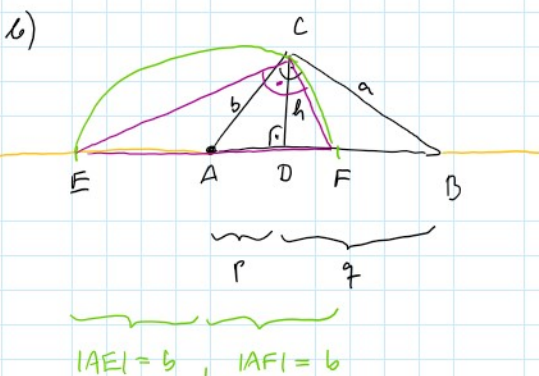
$$= (p+q)^2 - (h^2 + q^2) - p^2$$

$$= p^2 + 2pq + q^2 - h^2 - q^2 - p^2 = 2pq - h^2$$

$$\Rightarrow h^2 = 2pq - h^2 \quad | + h^2$$

$$\Rightarrow 2h^2 = 2pq \quad | :2$$

$$\Rightarrow h^2 = pq$$



Dann ist  $h$  auch Höhe für  $ECF$ . Also gilt

$$\text{Höhensatz: } h^2 = |ED| \cdot |DF| = (|EA| + |AD|) |DF|$$

$$= (b + p) (|AF| - |AD|) = (b + p) (b - p) = b^2 - p^2$$

Außerdem gilt  $h^2 = pq$ . Daher:  $pq = b^2 - p^2$

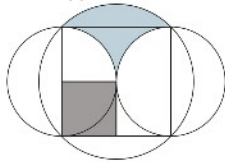
$$\Rightarrow b^2 = pq + p^2 = p(q + p) = p \cdot c$$

Den anderen Teil des KS bekommt man durch  
Kreis um  $B$  mit Radius  $a$ , dann ähnliches  
Vorgehen:  $a^2 = q \cdot c$

Vorgehen:  $a^2 = q \cdot c$

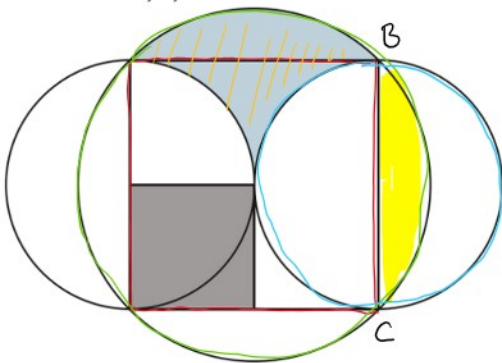
Insgesamt  $KS \xrightarrow{a)} \text{SurP} \xrightarrow{b)} HS \xrightarrow{b)} KS$

**Aufgabe 12** (Globalübung, 4 Punkte) Zeigen Sie, dass die markierten Flächenstücke den gleichen Inhalt haben.



**Lösung** Wir legen Bezeichnungen für Flächeninhalte aus der Abbildung fest:

- $Q$  = großes Quadrat
- $K$  = großer Kreis
- $L$  = kleiner Kreis
- $M$  = Fläche zwischen Kreisbogen und Strecke  $CB$
- $G$  = gesuchte Fläche



Zeige  $G = \frac{1}{4} Q$   $K = 4M + Q$   
 $\rightarrow 2M = \frac{1}{2}(K - Q)$

$$2G = K - L - 2M =$$

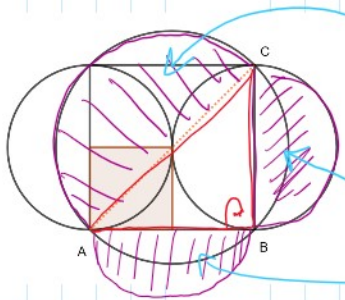
$$= K - L - \left(\frac{1}{2}(K - Q)\right)$$

$$\Rightarrow 2L - L - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}Q$$

$$= L - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}Q$$

$$\Rightarrow L - \frac{1}{2} \cdot 2L + \frac{1}{2}Q$$

$$= \frac{1}{2}Q$$



Verallg. Pythagoras an ACB

$$\frac{1}{2} K = \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} L$$

Also:  $\frac{1}{2} K = L \Leftrightarrow K = 2L$

$\Rightarrow G = \frac{1}{4} Q$