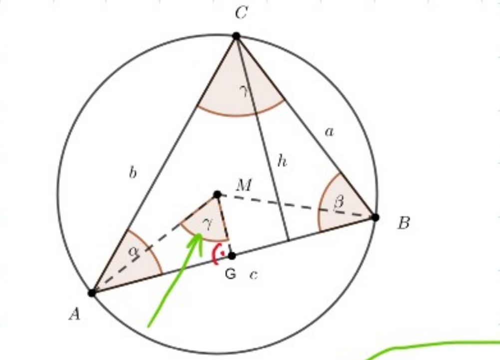
A16a



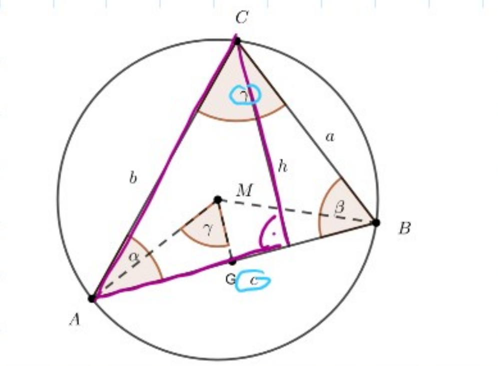
Der Peripheriewinkelsatz (PWS) über der Sehne $\overline{AB}$ liefert mit $\gamma := \angle ACB$: $2\gamma = \angle AMB$. Weil wegen $r = |AM| = |MB|$ das Dreieck AMB gleichschenklig ist, gilt $\angle AMG = \angle GMB$. Also $\angle AMG = \frac{1}{2} \angle AMB = \frac{1}{2} \cdot 2\gamma = \gamma$. Dann gilt

weil: $\overline{MG}$ Mittelsenkrechte

$$\sin\gamma = \text{"}\frac{G}{H}\text{"} = \frac{|AG|}{|AM|} = \frac{1/2\,|AB|}{r} = \frac{1/2\, c}{r}$$

$$\Longrightarrow \boxed{c = 2r \cdot \sin\gamma}$$

□



A16b

Beh $F = 2r^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$

Bew Für Fläche ABC gilt: $F = \frac{1}{2} c h$. Es gilt (nach VL Satz 1.28): $b \cdot \sin\alpha = h$. Ausserdem gilt $b = 2r \cdot \sin\beta$ (Beweis wie in a)). Damit

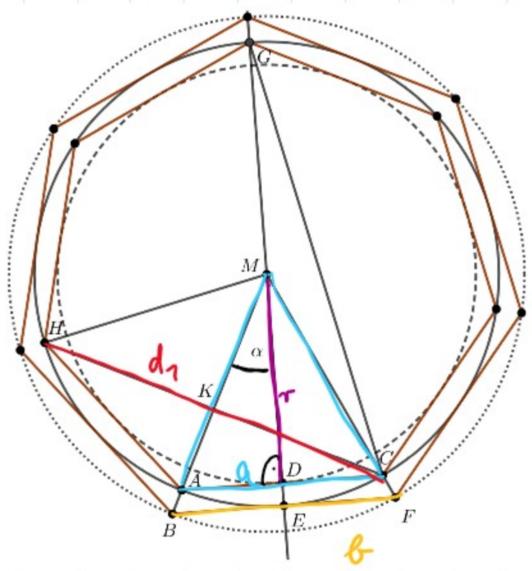
$$F = \frac{1}{2} \underbrace{c}_{a)} h = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2r \cdot \sin\gamma}_{a)} \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\gamma \cdot 2r \sin\beta \cdot \sin\alpha$$

$$= 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

□

$\ldots \sin\alpha \, \sin\beta \, \sin\gamma$ □

Aufgabe 18

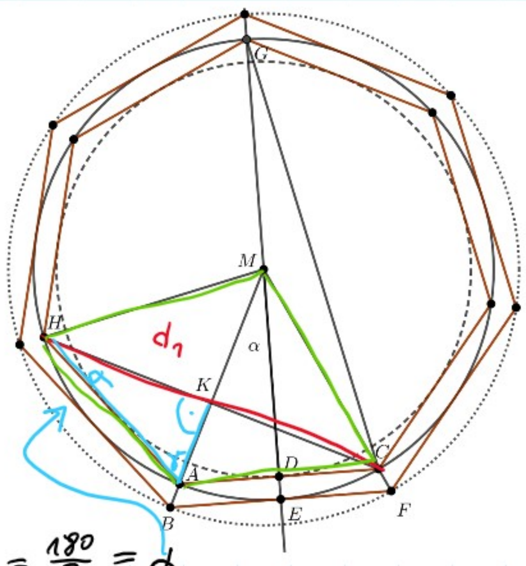


a) Das 7eck liefert 7 gleichschenklige Dreiecke die jeweils kongruent AMC sind. Der Innenwinkel bei M ist daher $\frac{360}{7}$ also $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{360}{7} = \frac{180}{7}$, denn ME Mittelsenkrechte (= Winkelhalbierende) auf AC

1) $|MD| =: r$, $\tan\alpha = \frac{a/2}{r} = \frac{a}{2r} \Rightarrow r = \frac{a}{2\tan\alpha}$

2) $|MA| =: R$, $\sin\alpha = \frac{a/2}{R} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin\alpha}$

3) $|HC| =: d_1$



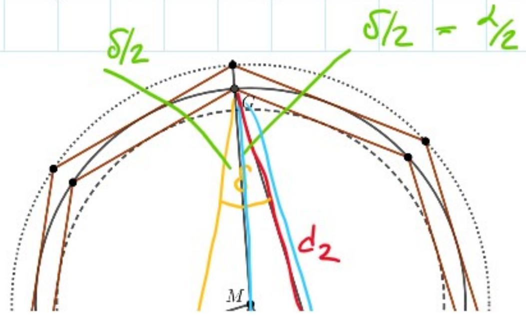
Weil ACHM ein Drachen ist gilt $MA \perp HC$ und $d_1 = 2 \cdot |HK|$

Die Winkel in HKA sind

$90°$, $\gamma = \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\frac{5}{7} \cdot 180°}^{\text{aus VL}} = \frac{450°}{7}$

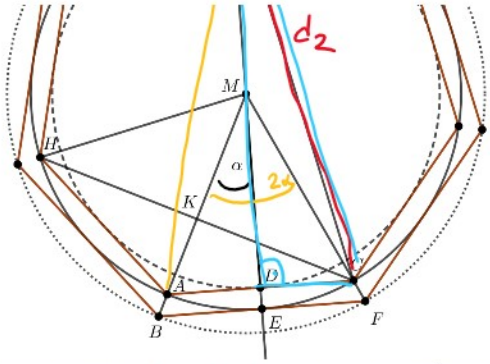
und $180 - 90 - \gamma = 90 - \frac{450°}{7} = \frac{630-450}{7} = \frac{180}{7} = \alpha$

Also: $\cos\alpha = \frac{d_1/2}{|HA|} = \frac{d_1}{2a} \Rightarrow d_1 = 2a\cos\alpha$



4) $|GC| =: d_2$, PWS über Sehne $\overline{AC}$ liefert: $2\delta = 2\alpha$

also $\delta = \alpha$. Weil ACG gleich-



also $\delta = \alpha$. Weil ACG gleichschenklig ist, ist GE Winkelhalb.

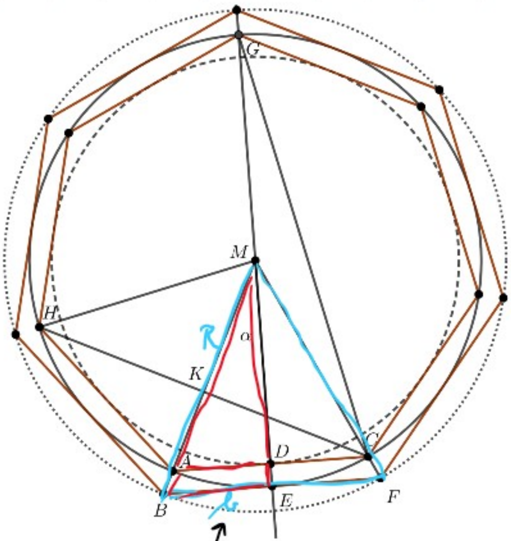
bei G: $\delta/2 = \frac{\alpha}{2}$

Betrachte Dreieck GDC: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{d_2} \Rightarrow d_2 = \frac{a/2}{\sin \alpha/2}$

$= \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

5) F_1 = Fläche inneres 7eck $= 7\cdot\frac{a\cdot r}{2} = 7\cdot\frac{a\cdot \frac{a}{2\tan\alpha}}{2}$

$= \frac{7a^2}{4\tan\alpha}$



6) F_2 = Fläche äußeres 7eck =

$= 7\cdot\frac{b\cdot R}{2} = 7\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{2\sin\alpha} = (*)$

MAD ist maßstäbliche Verkleinerung von MBE (denn AD ∥ BE)

also: $\frac{b}{a} = \frac{R}{r} \Rightarrow b = a\cdot\frac{R}{r}$

$(*) = 7\cdot\frac{a\cdot R/r}{2}\cdot\frac{a}{2\sin\alpha} = 7\cdot\frac{R}{2r}\cdot\frac{a^2}{2\sin\alpha} = 7\cdot\frac{a/2\sin\alpha}{2\cdot a/2\tan\alpha}\cdot\frac{a^2}{2\sin\alpha}$

$= 7\cdot\frac{2\tan\alpha}{4\sin\alpha}\cdot\frac{a^2}{2\sin\alpha} = 7\cdot\frac{a^2\overbrace{\tan\alpha}^{=\frac{\sin}{\cos}}}{4(\sin\alpha)^2} = \frac{7a^2}{4\sin\alpha\cos\alpha}$

7) Die Fläche des Kreises $F_K = \pi R^2$, also

$F_1 \le F_K \le F_2$ also einsetzen

$\rightsquigarrow \frac{7a^2}{4\tan\alpha} \le \pi R^2 \le \frac{7a^2}{4\sin\alpha\cos\alpha} \quad |:\pi R^2$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{7a}{4\tan\alpha} \le \pi R^2 \le \frac{\dots}{4 \sin\alpha \cos\alpha} \qquad \Big| : \cancel{\pi} R^2$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{7a^2}{4 \cdot R^2 \cdot \tan\alpha} \le \pi \le \frac{7 \cdot a^2}{4 \cdot R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{7a^2}{4 \cdot \left(\frac{a}{2\sin\alpha}\right)^2 \cdot \tan\alpha} \le \pi \le \frac{7a^2}{4 \cdot \left(\frac{a}{2\sin\alpha}\right)^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{7a^2 \cdot 4 (\sin\alpha)^2}{4a^2 \underbrace{\tan\alpha}_{= \sin/\cos}} \le \pi \le \frac{7a^2 \cdot 4(\sin\alpha)^2}{4a^2 \sin\alpha \cos\alpha}$$

$$\rightsquigarrow \quad 7 \cdot \frac{(\sin\alpha)^2 \cos\alpha}{\sin\alpha} \le \pi \le 7 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$7 \cdot 0{,}43 \cdot 0{,}901 \qquad\qquad 3{,}36$$

$$\rightsquigarrow \quad 7 \cdot \sin\alpha \cos\alpha \le \pi \le 7 \cdot \underbrace{\tan\alpha}$$

$$2{,}74 \qquad\qquad 7 \cdot \frac{0{,}43}{0{,}901}$$

$$\alpha = \frac{180}{7} \approx 25{,}71$$

$$\sin 25{,}71 = 0{,}43 \;\Big|\; \cos(25{,}71) = 0{,}901$$

$$2{,}74 \le \pi \le 3{,}36$$