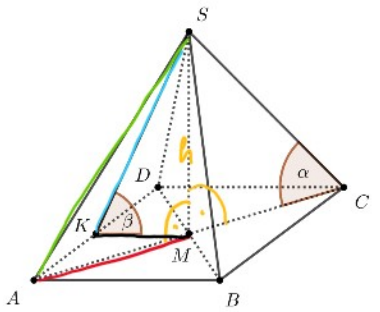
Aufgabe 20 *(Globalübung, 5 + 3 + 3 Punkte)* Vorgelegt sei eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge $a := |AB|$ und Höhe $h := |MS|$ wie in folgender Figur.



a) Wir wissen, dass sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Quadrat ABCD halbieren, also gilt $|AM| = \frac{1}{2}|AC|$. Für $|AC|$ mit Pythagoras: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 2a^2$, also $|AC| = \sqrt{2}\cdot a$, $|AM| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}\cdot a = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$|AS|$: $|AS|^2 \overset{Py}{=} |AM|^2 + h^2 \to |AS|^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + h^2$

$\to |AS| = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$

Es gilt $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$, denn die Rechnungen verlaufen exakt genauso, da ABS, BCS, SDC, und ADS kongruent sind.

zu $|KS|$: da ADS gleichschenklig ist, ist $\overline{KS}$ die Höhe von ADS also rechter Winkel bei K: $|AS|^2 \overset{Py}{=}$

$= |AK|^2 + |SK|^2 \to |KS|^2 = |AS|^2 - |AK|^2 = \frac{a^2}{2} + h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= \frac{a^2}{2} + h^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + h^2 \to |KS| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$

$$= \frac{a^2}{2} + h^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + h^2 \rightsquigarrow |KS| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$$

zu $\tan\alpha$: $\tan\alpha = \text{"}\frac{G}{A}\text{"} = \frac{h}{|MC|} = \frac{h}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{h\cdot\sqrt{2}}{a}$

zu $\tan\beta$: $\tan\beta = \text{"}\frac{G}{A}\text{"} = \frac{h}{|KM|} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}$

b) Nun gelte $|AS| = a$.

zu h: $h^2 + |AM|^2 \overset{Py}{=} |AS|^2 \rightsquigarrow h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2$

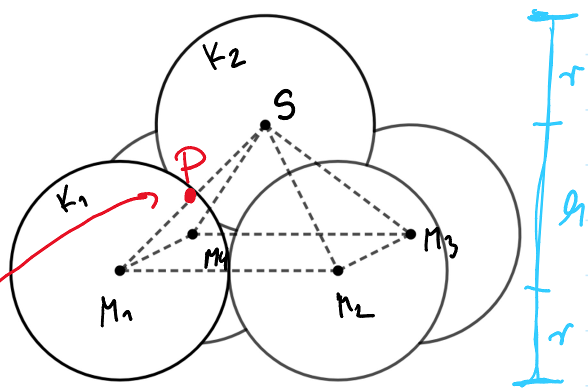
$$\rightsquigarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \rightsquigarrow h = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

zu $\tan\alpha$: $\tan\alpha = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \rightsquigarrow \alpha = 45°$

zu $\tan\beta$: $\tan\beta = \frac{2\cdot a/\sqrt{2}}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \rightsquigarrow \beta \approx 54{,}73°$

$\tan^{-1}$

c)



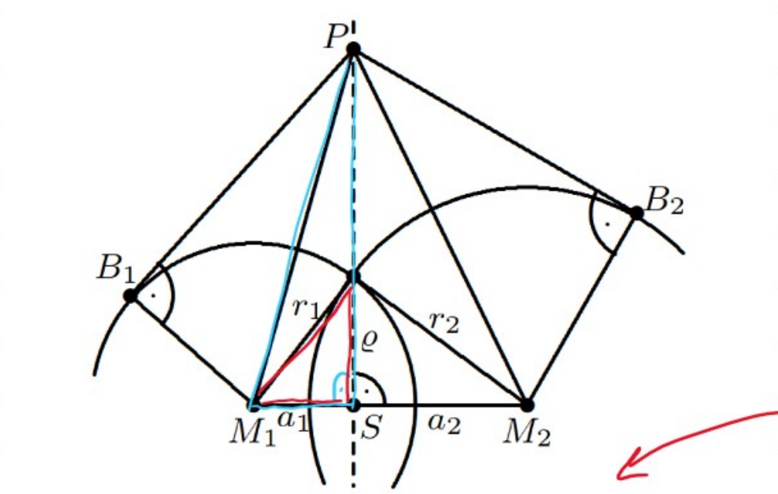
„Quadratisch angelegt" bedeutet, dass die Kugelmittelpunkte $M_1 M_2 M_3 M_4$ ein Quadrat bilden. Dann ergibt sich $|M_1M_2| = 2r$.

Die obere Kugel berührt alle anderen jeweils in einem Punkt. zB P Daher verläuft die Strecke $\overline{M_1S}$ durch P, weil die Tangentialebene E_1 durch P an K_1 gleich der Tangentialebene E_2 durch P an K_2 ist (Berührpunkt).

der Tangentialebene E_2 durch P an K_2 ist (Berührpunkt).

Insbesondere $|M_i S| = 2r$ $(i=1,2,3,4)$, also gleichseitige Pyramide. Die Höhe der Kugelpyramide ist also $2r + \underbrace{\frac{2r}{\sqrt{2}}}_{\text{Höhe Pyramide nach 61}} = 2r\left(1 + 1/\sqrt{2}\right) = r\left(2+\sqrt{2}\right)$

A21



$a_1^2 + \rho^2 = r_1^2 \rightsquigarrow a_1^2 - r_1^2 = -\rho^2$

$$|PB_1|^2 \overset{VL}{=} |PM_1|^2 - r_1^2 \underset{\text{Py } PM_1S}{\overset{131}{=}} |PS|^2 + \underbrace{a_1^2 - r_1^2}_{=} \overset{Py}{=} |PS|^2 - \rho^2 =$$

$$|PB_2|^2 \overset{VL}{=} |PM_2|^2 - r_2^2 \overset{Py}{=} |PS|^2 + a_1^2 - r_2^2 \overset{Py}{=} |PS|^2 - \rho^2$$