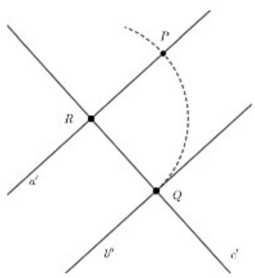
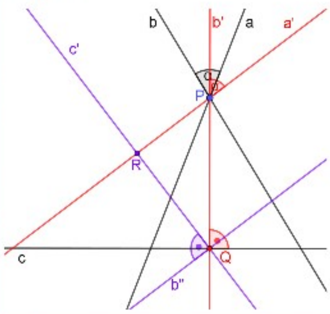
Aufgabe 32 *(Globalübung, 6 Punkte)* In folgender Figur seien $a' \| b''$, $a' \perp c'$, $b'' \perp c'$ und $|RP| = |RQ|$. Wir betrachten die Schubspiegelung $\sigma_{c'} \circ \sigma_{b''} \circ \sigma_{a'}$.



Konstruieren Sie Geraden a, b und c, so dass $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_{c'} \circ \sigma_{b''} \circ \sigma_{a'}$ gilt. Dabei soll $P \in a$ und $a \neq a'$ gelten.

Satz 3.6
Seien a, b, c Geraden mit mindestens zwei sich schneidenden Geradenpaaren. Dann ist die Abbildung $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ eine Schubspiegelung.

Beweis:



Wir nehmen zunächst an, dass a und b einen Schnittpunkt P besitzen.
Es sei dann α der von a nach b orientierte Schnittwinkel.
Die Gerade b' durch P sei orthogonal zu c, und die Gerade a' durch P verlaufe im Winkel α zu b' mit gleicher Orientierung wie bei a und b.
Dann gilt $\sigma_b \circ \sigma_a = \delta_{P,2\alpha} = \sigma_{b'} \circ \sigma_{a'}$.
Sei Q der Schnittpunkt von b' mit c.
Die Gerade b'' durch Q verlaufe parallel zu a', und die Gerade c' durch Q verlaufe orthogonal zu b''.
Dann gilt $\sigma_c \circ \sigma_{b'} = \delta_{Q,180°} = \sigma_{c'} \circ \sigma_{b''}$ und es folgt insgesamt: $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_{a'} = \sigma_{c'} \circ \sigma_{b''} \circ \sigma_{a'}$
Da $\sigma_{b''} \circ \sigma_{a'}$ eine Verschiebung parallel zu c' ist, ist die Dreifachspiegelung $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ eine Schubspiegelung.

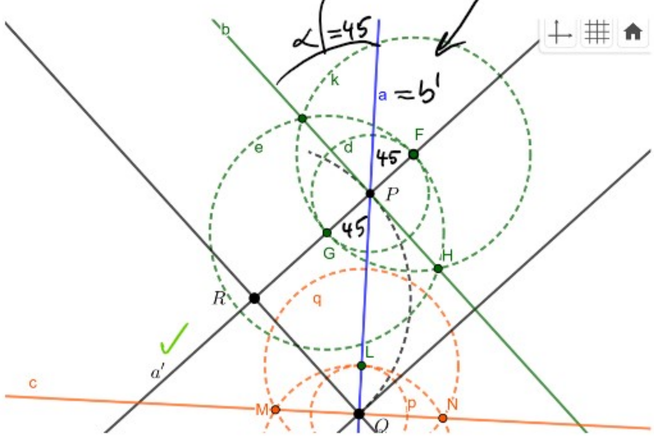
Konstruktionsbeschreibung

a) $a := PQ$

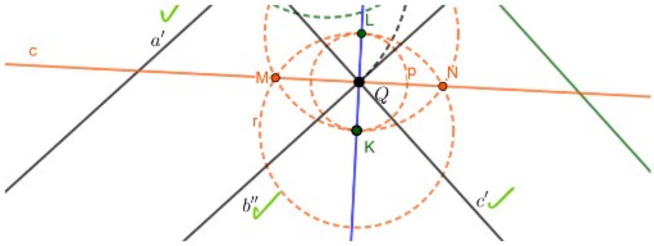
b) Konstruiere Senkrechte b zu a' durch P mit Hilfe der grünen Kreise.

c) Konstruiere Senkrechte c zu a durch Q mit Hilfe der orangenen Kreise.

Behauptung: a, b und c sind die gesuchten Geraden.
Begründung: Die Situation ist diejenige aus dem Beweis zu Satz 3.6 der Vorlesung. Die Bezeichungen hier passen zu denen in der Vorlesung. Da hier $a = PQ$ und nach Vorlesung $b' = PQ$ gelten muss, muss $a = b'$ sein. Wegen $|RP| = |RQ|$ ist $\angle(a', a) = 45°$. Nach Schritt b) ist somit $45° = \angle(a, b)$. Also gilt $\angle(a, b) = \angle(a', b')$ und $P \in b$, somit ist b die laut Beweis Satz 3.6 gesuchte Gerade.
In c) wird $a \perp c$ mit Schnittpunkt Q konstruiert. Wegen $a = b'$ ist c nach Beweis Satz 3.6 die gesuchte Gerade .



Wir nehmen zunächst an, dass a und b einen Schnittpunkt P besitzen.
Es sei dann α der von a nach b orientierte Schnittwinkel.
Die Gerade b' durch P sei orthogonal zu c, und die Gerade a' durch P verlaufe im Winkel α zu b' mit gleicher Orientierung wie bei a und b.
Dann gilt $\sigma_b \circ \sigma_a = \delta_{P,2\alpha} = \sigma_{b'} \circ \sigma_{a'}$.
Sei Q der Schnittpunkt von b' mit c.
Die Gerade b'' durch Q verlaufe parallel zu a', und die Gerade c' durch Q verlaufe orthogonal zu b''.
Dann gilt $\sigma_c \circ \sigma_{b'} = \delta_{Q,180°} = \sigma_{c'} \circ \sigma_{b''}$ und es folgt insgesamt: $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_{a'} = \sigma_{c'} \circ \sigma_{b''} \circ \sigma_{a'}$
Da $\sigma_{b''} \circ \sigma_{a'}$ eine Verschiebung parallel zu c' ist, ist die



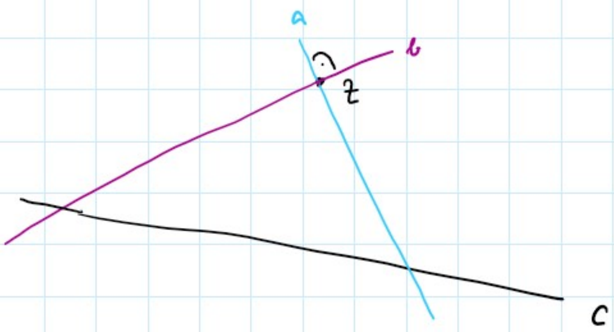
Dann gilt $\sigma_c \circ \sigma_{b'} = \delta_{Q,180°} = \sigma_{c'} \circ \sigma_{b''}$ und es folgt insgesamt: $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_c \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_{a'} = \sigma_{c'} \circ \sigma_{b''} \circ \sigma_{a'}$ Da $\sigma_{b''} \circ \sigma_{a'}$ eine Verschiebung parallel zu c' ist, ist die Dreifachspiegelung $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ eine Schubspiegelung.

Aufgabe 33 *(Globalübung, 3 + 4 Punkte)*

a Es sei $\delta_{Z,180°}$ eine Punktspiegelung an Z und σ_c eine Spiegelung an einer Geraden c mit $Z \notin c$. Zeigen Sie, dass $\sigma_c \circ \delta_{Z,180°}$ eine Gleitspiegelung ist.

b Zeigen Sie: Die Verkettung einer Drehung mit einer Verschiebung ist eine Drehung.

zu a)

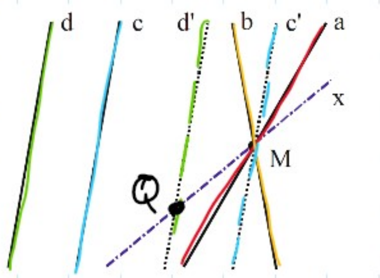


Es seien a, b Geraden mit $a \perp b$, $a \cap b = \{Z\}$ so dass $a \nparallel c$ und $b \nparallel c$. Dann rechne

$$\sigma_c \circ \delta_{Z,180°} = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$$

also nach Satz 3.6. eine Gleitspiegelung □

zu b) Betrachte den zweiten Fall aus Satz. 3.7



Eine Drehung lässt sich durch 2 Spiegelungen an a und b beschreiben. Die Verschiebung sei durch die Parallelen c und d gegeben. Nach Folie 182 können wir a und b so ausrichten, dass keine von beiden parallel zu d oder c ist. c und d können nach Folie 175 nach d' und c' verschoben werden. Die Spiegelungen an a, b und c' sind nach Satz 3.5 durch eine Spiegelung σ_x gegeben. Jetzt rechne

so nicht:

Spiegelung σ_X gegeben: zwei Fälle

$$\text{Drehung um } M \circ \text{Verschiebung} = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_d$$
$$= \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_{c'} \circ \sigma_{d'}$$
$$= \sigma_X \circ \sigma_{d'}$$
$$\boxed{Q := X \cap d'} \text{ — } \boxed{\text{Satz 3.3}} \text{ — } \overset{!}{=} \; \delta_{Q,\,\text{Winkel}}$$