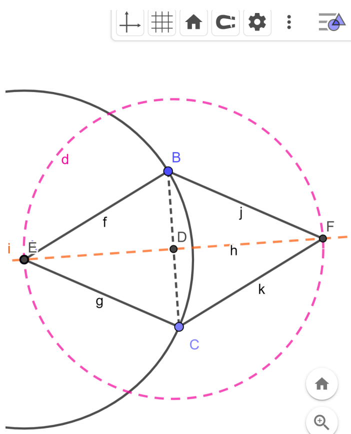
Universität Bielefeld
Dr. Daniel Frohn
Dr. Jason Uhing Sommersemester 2022

Elementare Geometrie ☺ Übung 03

Aufgabe 7 *(G, (2+2+2) + (2+2+2) Punkte)* Konstruieren Sie mit GeoGebra eine Raute mit vorgegebener Seitenlänge $|AB|$ auf zwei verschiedene Arten.

Hinweis: In dieser Aufgabe müssen Sie jeweils eine farbige Konstruktion und eine Konstruktionsbeschreibung mit Geogebra erzeugen und zum Beispiel durch einen Screenshot in eine pdf-Datei einbinden. Die Begründungen sind handschriftlich anzufertigen.

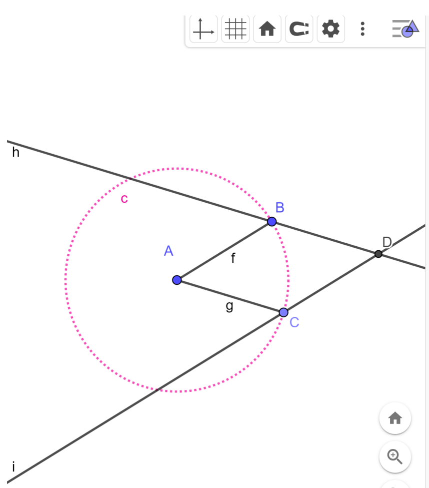
Lösung 1 In der folgenden Konstruktion ist die Mittelsenkrechte zu konstruieren. Wegen Übersichtlichkeit ist dies weggelassen worden.



	Name	Symbol	Beschreibung
1	Punkt A		
2	Punkt B		
3	Strecke f		Strecke A, B
4	Kreis c		Kreis durch B mit Mittelpunkt A
5	Punkt C		Punkt auf c
6	Strecke g		Strecke A, C
7	Strecke h		Strecke B, C
8	Gerade i		Mittelsenkrechte h
9	Punkt D		Schnittpunkt von h, i
10	Kreis d		Kreis durch A mit Mittelpunkt D
11	Punkt E		Schnittpunkt von d, i
11	Punkt F		Schnittpunkt von d, i
12	Strecke j		Strecke B, F
13	Strecke k		Strecke C, F

Nach Satz 1.14.3 ist $EBFC$ eine Raute.

Lösung 2 In der folgenden Konstruktion sind die Parallelen zu konstruieren. Wegen Übersichtlichkeit ist dies weggelassen worden.



	Name	Beschreibung
1	Punkt A	
2	Punkt B	
3	Strecke f	Strecke A, B
4	Kreis c	Kreis durch B mit Mittelpunk A
5	Punkt C	Punkt auf c
6	Strecke g	Strecke A, C
7	Gerade h	Gerade durch B parallel zu g
8	Gerade i	Gerade durch C parallel zu f
9	Punkt D	Schnittpunkt von h, i

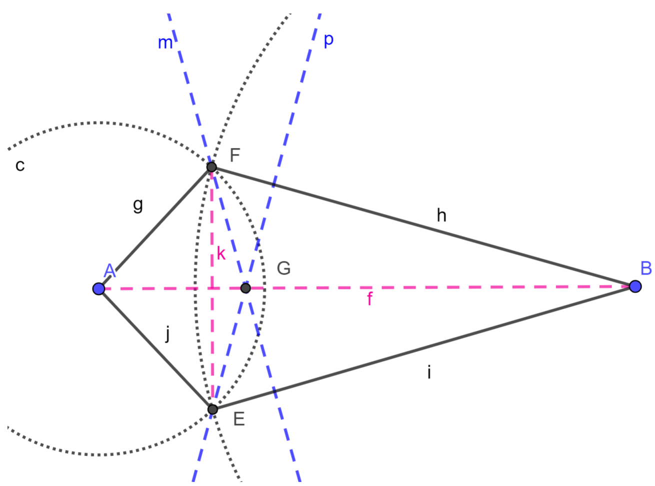
NAch Satz 1.12 sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang, also sind alle Seiten gleich lang. Daher handelt es sich nach Satz 1.14.2 eine Raute.

Aufgabe 8 *(Globalübung, 4 + 2 Punkte)* Zeigen Sie, dass folgende Vierecke einen Inkreis haben:

a Drachen,

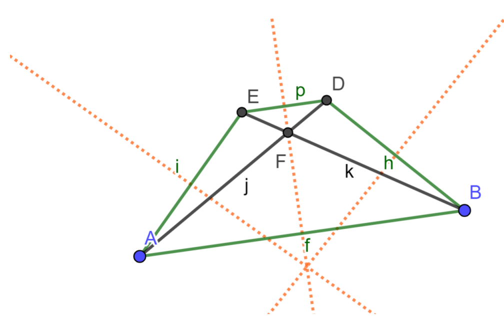
b Zeigen Sie, dass ein symmetrisches Trapez einen Umkreis hat.

Lösung 8a



Nach Satz 1.13 ist AB die Mittelsenkrechte von FE. Also sind die Dreiecke AFE und EFB gleichschenklig. Daher ist AB jeweils Winkelhalbierende der Innenwinkel. Es seien m und p die Winkelhalbierenden der anderen beiden Innenwinkel mit Schnittpunkten $G_m := AB \cap m$ und $G_p := AB \cap p$. Diese Innenwinkel sind gleich, denn die Dreiecke AFB und AEB sind nach **SSS** kongruent. Nach **WSW** sind damit die Dreiecke AFG_m und AEG_p kongruent, also $|AG_m| = |AG_p|$ und somit $G_m = G_p = G$. Also liegt G auf allen Winkelhalbierenden und ist daher der Mittelpunkt des Inkreises.

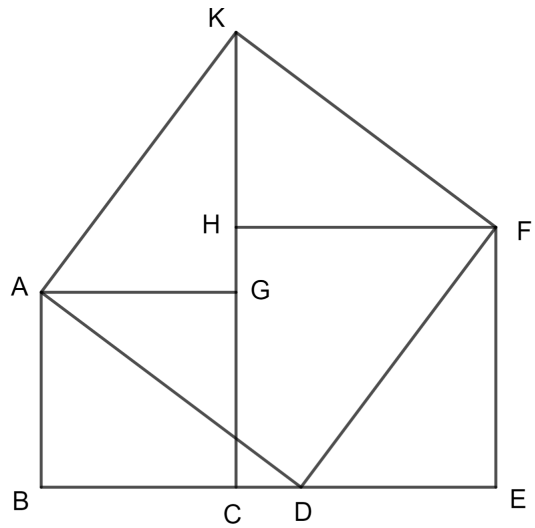
Lösung 8b Nach Satz 1.15 sind AFB und EFD gleichschenklig und nach Definition ist $ED \| AB$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{ED}$ geht daher durch F und steht senkrecht auf $\overline{AB}$. Also ist dies auch die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$. Sei i die Mittelsenkrechte von $\overline{AE}$ und $U := f \cap i$. Also $|UB| = |UA| = |UE| = |UD|$ daher liegt U auf der Mittelsenkrechten h von $\overline{DB}$ un ist somit der Mittelpunkt des Umkreises.



Aufgabe 9 *(Tutorium, 3 + 3 Punkte)* In folgender Abbildung gelte:

1 $ABCG$ und $CEFH$ sind Quadrate.

2 $|AB| = |DE| = |HK|$ und $|BD| = |EF| = |GK|$



a Zeigen Sie, dass $ADFK$ ein Quadrat ist.

b Finden Sie anhand der Abbildung einen Beweis des Satzes von Pythagoras.

Lösung 9a
Die kleinen Dreiecke sind nach **SWS** (rechter Winkel und Voraussetzung 2) alle kongruent. Also folgt $|AD| = |DF| = |FK| = |KA|$. Wegen der Kongruenz der kleinen Dreiecke sind die Winkel an den Hypothenusen jeweils gleich: der Winkelsummensatz im Dreieck ergibt, dass der obere Winkel bei K gleich dem unteren bei D, gleich 90 Grad (im großen Viereck) ist. Der rechte Winkel bei F ist $\beta + 90 - \beta = 90$, dabei sei β der Winkel zwischen den beiden längeren Schenkeln eines kleinen Dreiecks. Wegen des Winkelsumme im Vieleck ist also der linke auch 90 Grad. Also ist $ADFK$ ein Quadrat.

Lösung 9b Mit

$$a := |AB|, \quad b := |BD|$$

folgt aus dem Flächeninhalt der Figur:

$$a^2 + b^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}ab = c^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}ab$$

□

Abgabe: bis zum Montag, den 25. April 2022, 12 Uhr