Universität Bielefeld
Dr. Daniel Frohn
Dr. Jason Uhing Sommersemester 2022

Elementare Geometrie ☺ Übung 04

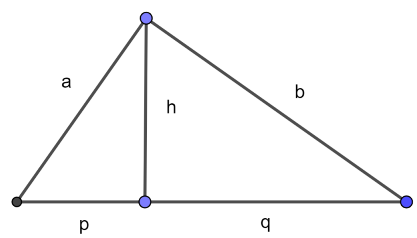
Aufgabe 10 *(Globalübung, 4 + 4 Punkte)* Den Kathetensatz, den Höhensatz und den Satz des Pythagoras nennt man Satzgruppe des Pythagoras. Zeigen Sie:

a Der Höhensatz folgt aus dem Satz von Pythagoras.

b Der Kathetensatz folgt aus dem Höhensatz.

Hinweis: In Teil **b** verwendet man den Satz des Thales.

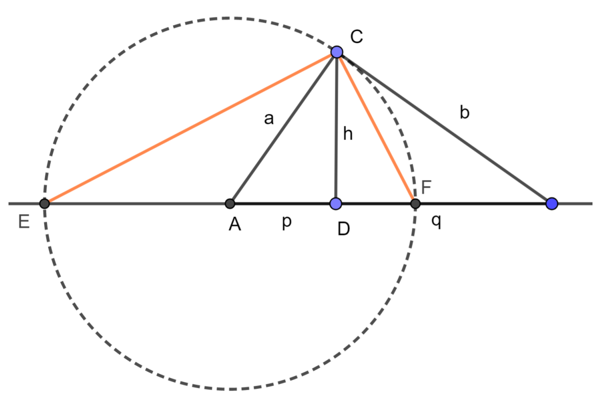
Lösung zu a Es gelte $a^2 + b^2 = c^2$ nach SvP.



Ausserdem $h^2 + p^2 = a^2$ und $h^2 + q^2 = b^2$ nach SvP. Damit

$$h^2 = a^2 - p^2 = c^2 - b^2 - p^2 = (p+q)^2 - h^2 - q^2 - p^2 = 2pq - h^2.$$

Lösung zu b Schlage einen Thaleskreis um A durch C mit Radius $a = |AC|$.



Dann gilt nach Höhensatz in EFC:

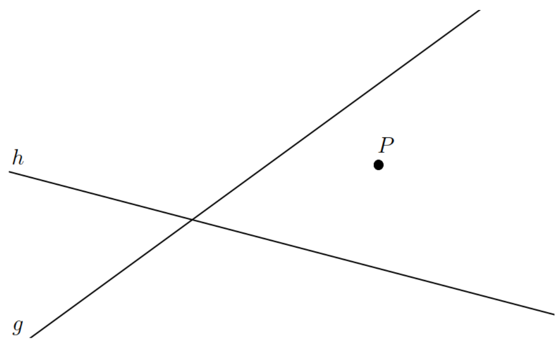
$$h^2 = |ED||DF| = (a+p)(a-p) = a^2 - p^2.$$

Außerdem gilt nach Höhensatz $h^2 = pq$. Also ergibt sich

$$a^2 - p^2 = pq \quad \Rightarrow \quad a^2 = p(p+q) = pc.$$

Den anderen Kathetensatz erhält man völlig analog mithilfe eines Thaleskreis auf der anderen Seite des Dreiecks.

Aufgabe 11 *(Tutorium, (3+3+3) Punkte)*
Gegeben seien die Geraden h und g sowie der Punkt P. Konstruieren Sie Punkte $A \in g$ und $B \in h$ mit $2|AP| = 3|PB|$ und $P \in AB$.

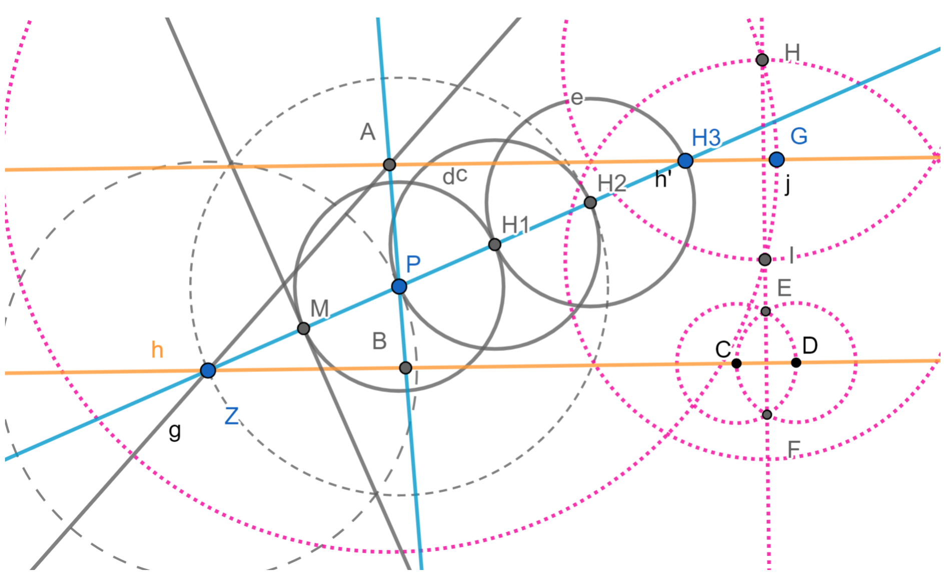


Hinweis: In dieser Aufgabe können Sie sich aussuchen, ob Sie

a) *eine farbige Konstruktion und eine Konstruktionsbeschreibung mit Geogebra erzeugen und zum Beispiel durch einen Screenshot in eine pdf-Datei einbinden und die Begründung handschriftlich anfertigen, oder*

b) *Konstruktion, Konstruktionsbeschreibung und Begründung handschriftlich anfertigen.*

Lösung zu 11 beginnt mit einer Bemerkung: in der VL werden Ähnlichkeitsbeweise für die Satzgruppe des P gegeben. Dort wird (innerhalb der VL) zum ersten Mal aus der Parallelität auf die Streckenverhälnisse geschlossen. Dies wird hier (und in den PÜ) thematisiert.



Konstruktionsbeschreibung

a Gerade h' durch Z und P

b Mittelsenkrechte m zu Z und P, $M := m \cap \overline{ZP}$

c $r := |PM|$

d Kreis c um P mit Radius r, $H_1 := (c \cap h') \setminus \{M\}$

e Kreis d um H_1 mit Radius r, $H_2 := (d \cap h') \setminus \{P\}$

f Kreis e um H_2 mit Radius r, $H_3 := (e \cap h') \setminus \{H_1\}$

g Parallele j zu h durch H_3, $A := j \cap g$

h $B := AP \cap h$

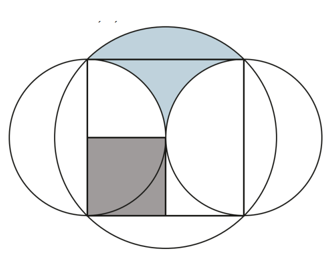
Begründung Wegen **b** gilt $|ZM| = |MP| = r$. Schritte **d, e, f** liefern $r = |MP| = |H_1P| = |H_1H_2| = |H_2H_3|$. Also

$$\frac{|PH_3|}{|PZ|} = \frac{3}{2}\,.$$

Wegen $j \parallel h$ sind die Dreiecke ZBP und PAH_3 ähnlich, und gehen daher aus einer maßstäblichen Vergrößer- bzw. Verkleinerung hervor. Die Streckenverhältnisse der entsprehenden Schenkel sind demnach gleich. Man erhät:

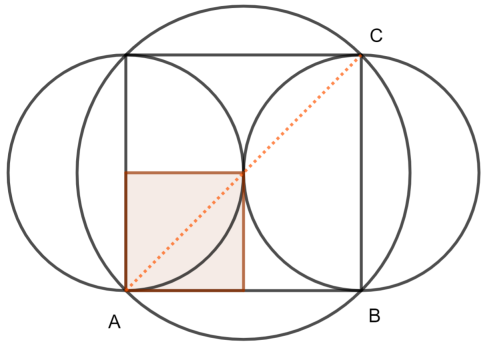
$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|PH_3|}{|PZ|} = \frac{3}{2}\,.$$

Aufgabe 12 *(Globalübung, 4 Punkte)* Zeigen Sie, dass die markierten Flächenstücke den gleichen Inhalt haben.



Lösung Wir legen Bezeichnungen für Flächeninhalte aus der Abbildung fest:

$$\begin{aligned} Q &= \text{großes Quadrat} \\ K &= \text{großer Kreis} \\ L &= \text{kleiner Kreis} \\ M &= \text{Fläche zwische Kreisbogen und Strecke } CB \\ G &= \text{gesuchte Fläche} \end{aligned}$$



Der erweiterte SvP an der Diagonale im Quadrat ergibt

$$\frac{1}{2}K = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L$$

also $K = 2L$. Damit

$$2G = K - L - 2M = K - L - \left(\frac{1}{2}(K - Q)\right) = 2L - L - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}Q = L - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}Q.$$

Also gilt $G = \frac{1}{4}Q$. $\square$

Abgabe: bis zum Montag, den 9. Mai 2022, 12 Uhr