Universität Bielefeld
Dr. Daniel Frohn
Dr. Jason Uhing

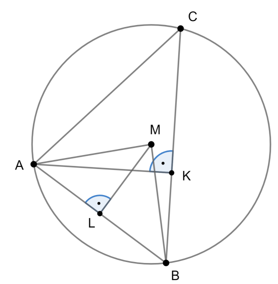
Sommersemester 2022

Elementare Geometrie ☺ Übung 05

Aufgabe 13 *(Globalübung, 4 + 4 Punkte)*

a Beweisen Sie den Peripheriewinkelsatz für den Fall $\mu > 180°$.

b Vorgelegt sei der Umkreis eines Dreiecks ABC. Es sei M der Mittelpunkt des Kreises wie in folgender Figur.



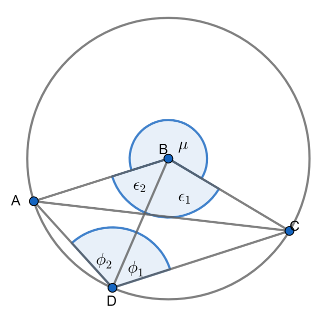
b1 Begründen Sie, dass die Dreiecke ALM und AKC ähnlich sind.

b2 Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC durch

$$\frac{|AC| \cdot |CB| \cdot |BA|}{4|AM|}$$

gegeben ist.

Lösung a Die Dreiecke ABD und BDC sind gleichschenklig, daher gilt $2\phi_1 + \epsilon_1 = 180$ und $2\phi_2 + \epsilon_2 = 180$. Außerdem gilt $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \mu = 360$. Addition der ersten beiden Gleichungen und ersetzen von $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 360 - \mu$ ergibt $2\phi := 2(\phi_1 + \phi_2) = \mu$.



Lösung b1 Beide haben einen rechten Winkel. Laut Peripheriewinkelsatz sind die Winkel bei C und M gleich. Also sind alle Winkel paarweise gleich.

Lösung b2 Wegen **b1** gibt es eine maßstäbliche Vergrößerung mit Faktor k, also

$$k|AM| = |AC|, \quad k|AL| = |AK|, \quad k|LM| = |KC|.$$

Umstellen nach k und gleichsetzen ergibt

$$\frac{|KA|}{|AL|} = \frac{|AC|}{|AM|}.$$

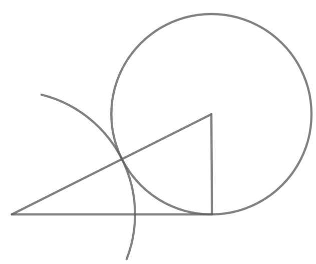
Die Fläche des Dreiecke ist damit gegeben durch

$$\tfrac{1}{2}|CB||AK| = \tfrac{1}{2}|CB||AL|\frac{|AC|}{|AM|} = \tfrac{1}{2}|CB|\tfrac{1}{2}|AB|\frac{|AC|}{|AM|}.$$

Aufgabe 14 Ein Punkt T teilt eine Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt, wenn

$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$

gilt. Vorgelegt sei nun eine Strecke $\overline{AB}$. Konstruieren Sie einen Punkt T, der $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt. Verwenden Sie die folgende Skizze als Idee:

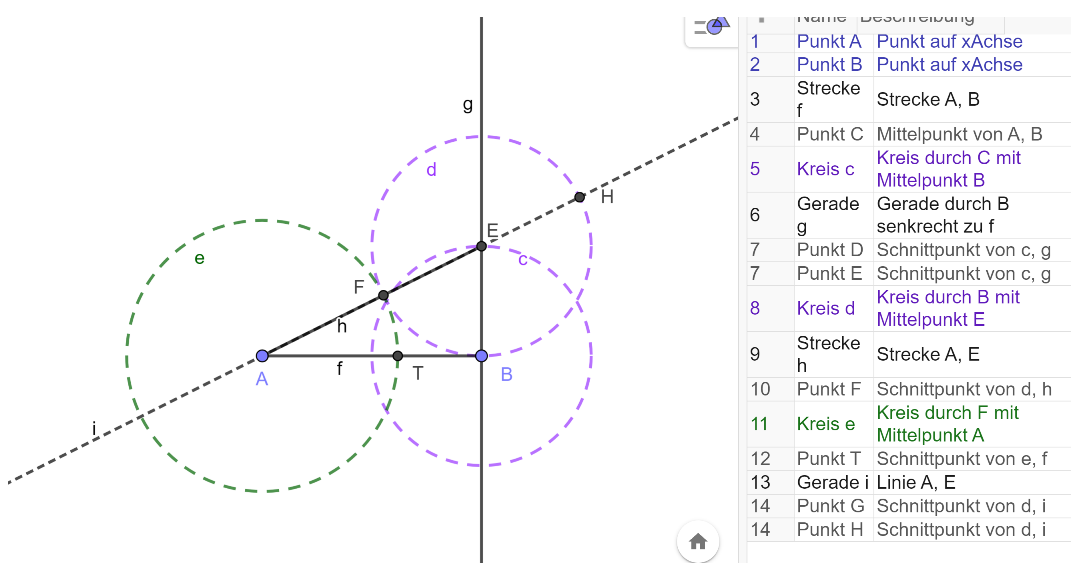


Lösung Der Kreis um E hat den Radius $r := \frac{1}{2}|AB|$. Also gelten $r = \frac{1}{2}|AB| = |EB| = |EF| = |EH|$. Der Kreis um A hat Radius $l := |AF| = |AT|$. Der Sekanten-Tangentsatz liefert $|AB|^2 = |AF||AH|$. Mit $|AH| = |AF| + 2r$ ergibt sich daraus

$$(2r)^2 = l(l + 2r) \Rightarrow l^2 = 2r(2r - l).$$

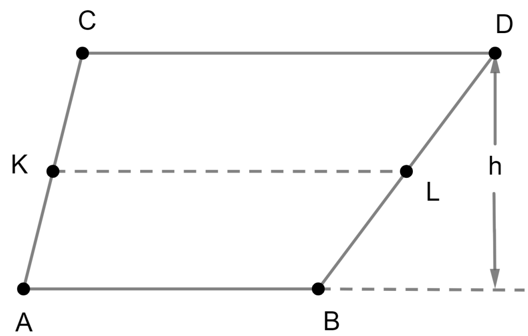
Also

$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{2r}{l} = \frac{l}{2r - l} = \frac{|AT|}{|TB|}.$$

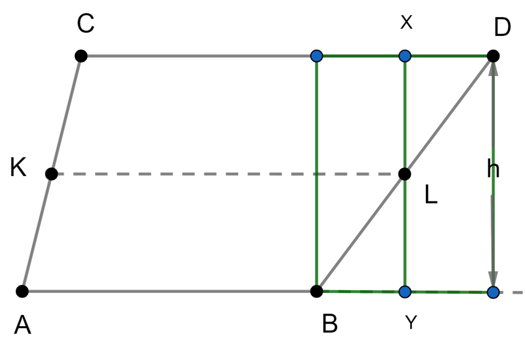


Aufgabe 15 Vorgelegt sei ein Trapez $ABCD$ wie in der unten stehenden Figur. Dabei seien K und L jeweils die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. Begründen Sie mit der Methode der Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit die folgende Formel für den Flächeninhalt A des Trapezes:

$$A = h \cdot |KL|.$$



Lösung



Die Dreiecke BLY und LXD haben paarweise gleiche Winkel (Wechsel-, Scheitel-, rechter Winkel). Außerdem zwei gleich lange Seiten $\overline{BL}$ und $\overline{LD}$. Damit sind sie kongruent, also nach VL flächengleich. Nun schneidet man das Obere aus und setzt es in das Untere ein.

Analog geht man auf der linken Seite des Trapezes vor. Es ergibt sich also nach Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit der Flächeninhalt $h \cdot |KL|$.

`https://www.math.uni-bielefeld.de/~juhing/2022_SS/EG/tipps.html`

Abgabe: bis zum Montag, den 9. Mai 2022, 12 Uhr