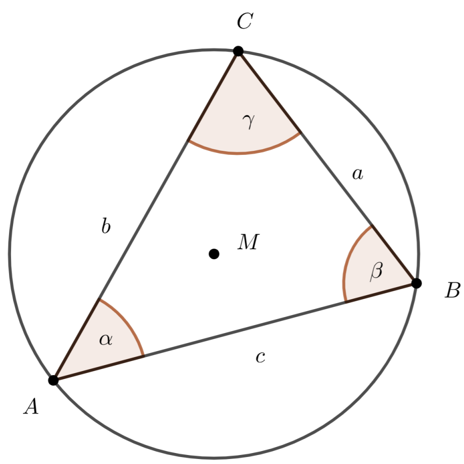
Universität Bielefeld
Dr. Daniel Frohn
Dr. Jason Uhing Sommersemester 2022

Elementare Geometrie ☺ Übung 06

Aufgabe 16 *(Globalübung, 3 + 3 Punkte)* Vorgelegt sei ein Dreieck ABC mit Umkreis K, Mittelpunkt M, Radius r und Flächeninhalt F.

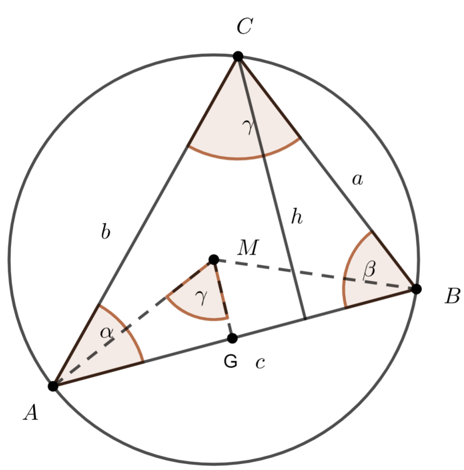


Zeigen Sie:

a $c = 2r \sin\gamma$,

b $F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

Lösung Im gleichschenkligen Dreieck ABM ist MG Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende.



Daher liefert der Peripheriewinkelsatz $\angle AMG = \gamma$. Am rechtwinkligen Dreieck AGM gilt somit

$$\sin\gamma = \frac{\frac{c}{2}}{r}.$$

Also

$$c = 2r \sin\gamma.$$

Mit den anderen Dreiecksseiten erhält man auf dieselbe Art

$$b = 2r \sin \beta, \quad a = 2r \sin \alpha.$$

Aus Satz 1.28 wissen wir

$$b \sin \alpha = h = a \sin \beta$$

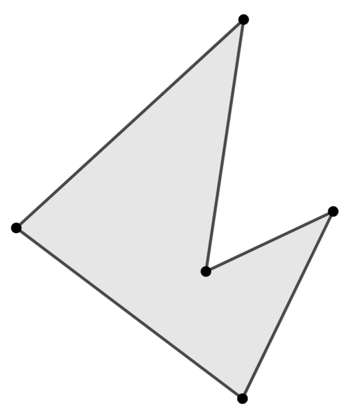
und damit für die Fläche des Dreiecks

$$F = \tfrac{1}{2} ch = \tfrac{1}{2} cb \sin \alpha = \tfrac{1}{2} ca \sin \beta = rb \sin \gamma \sin \alpha = ra \sin \gamma \sin \beta = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

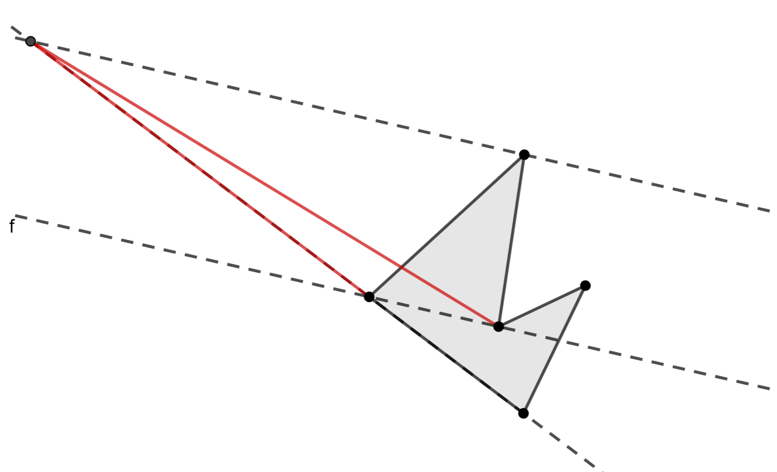
□

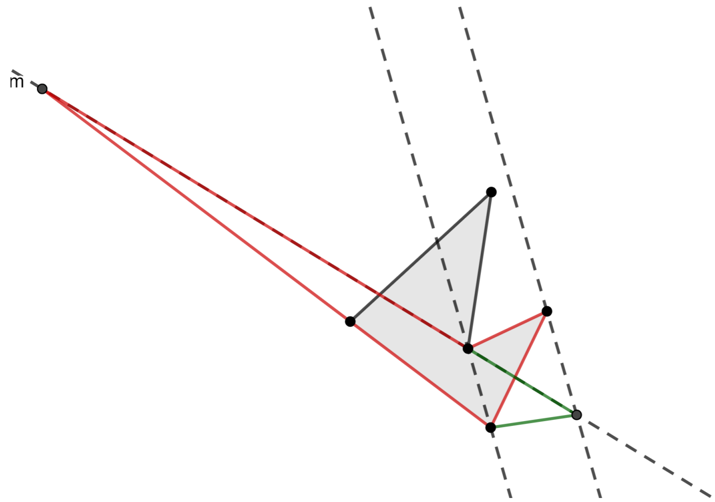
Aufgabe 17 *(Tutorium, 4 Punkte)* Führen Sie das folgende Vieleck durch Scherungen in ein flächengleiches Rechteck über.

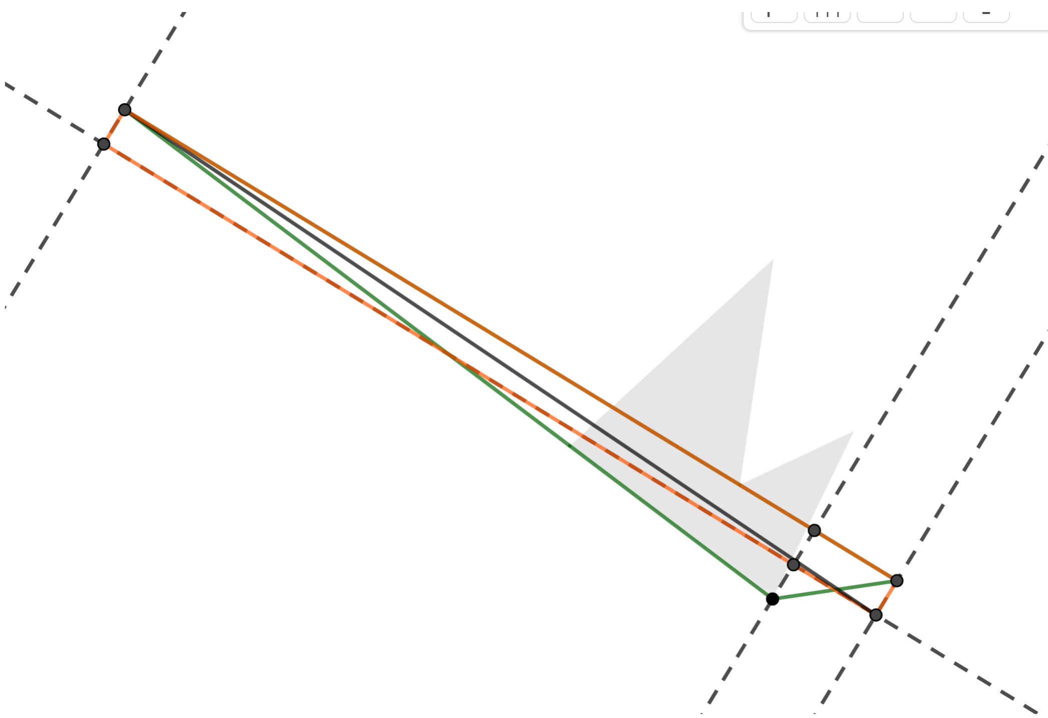
Hinweis: Die Scherungen sollen nicht konstruiert werden. Für Parallelen dürfen Sie in dieser Aufgabe ein Geodreieck oder die entsprechende Funktion in GeoGebra verwenden.



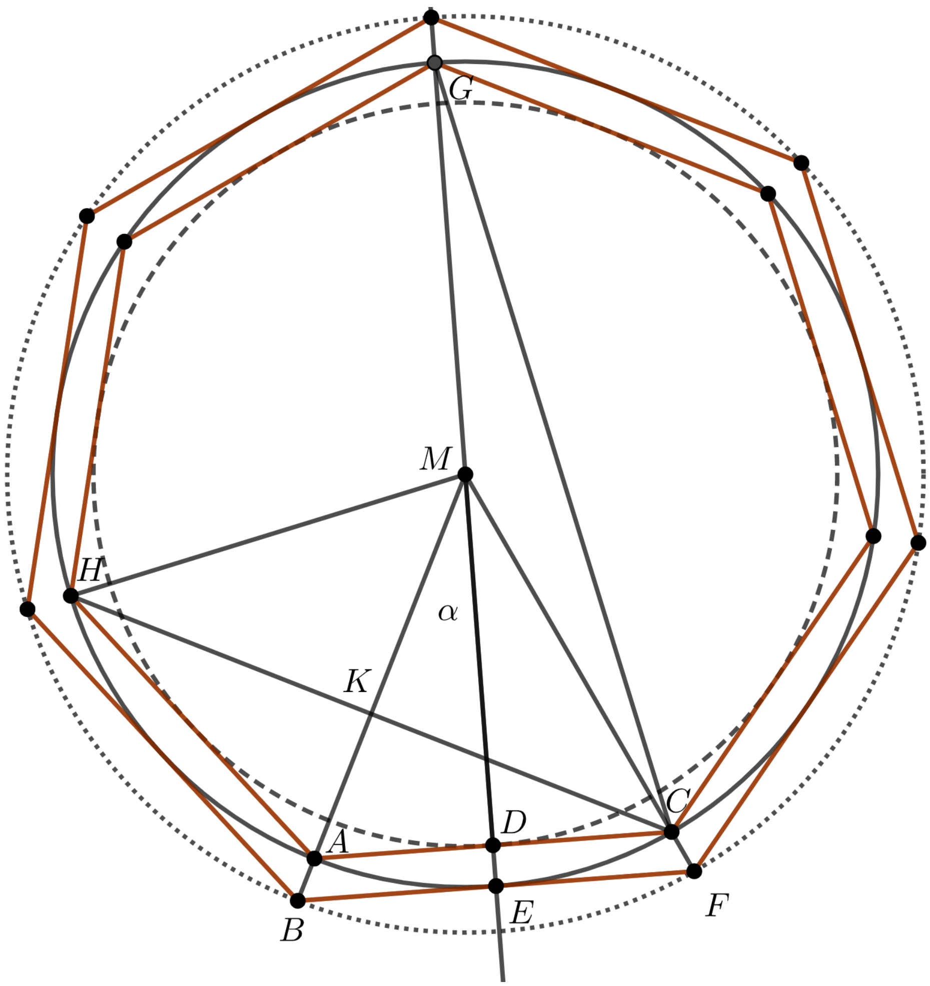
Lösung Es gibt mehrere Möglichkeiten. Hier ist eine:







Aufgabe 16 *(Globalübung, 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2* + 2* + 2* Punkte)* Vorgelegt sei ein Kreis K (durchgezogene Linie) mit Mittelpunkt M, der Umkreis eines regelmäßigen 7-Ecks ist (das innere 7-Eck in der Figur). Weiter sei dieser Kreis der Inkreis eines regelmäßigen 7-Ecks (das äußere 7-Eck in der Figur). Das innere 7-Eck besteht aus sieben gleichlangen Seiten der Länge $a := |AC|$. Das äußere 7-Eck besteht aus sieben gleichlangen Seiten der Länge $b := |BF|$. In der Figur gilt $AD||BF$ (das muss nicht gezeigt werden). Es sei ME die Mittelsenkrechhte auf $\overline{BF}$:



0 Begründen Sie, dass $\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180°$ gilt.

1 Finden Sie eine Formel für $|MD|$ in Abhängigkeit von a und α.

2 Finden Sie eine Formel für $|MA|$ in Abhängigkeit von a und α.

3 Finden Sie eine Formel für $|HC|$ in Abhängigkeit von a und α.

4 Finden Sie eine Formel für $|GC|$ in Abhängigkeit von a und α.

5* Finden Sie eine Formel für den Flächeninhalt F_1 des inneren 7-Ecks in Abhängigkeit von a und α.

6* Finden Sie eine Formel für den Flächeninhalt F_2 des äußeren 7-Ecks in Abhängigkeit von a und α.

7* Für die Fläche des Kreises K gilt $F_K = \pi \cdot |MA|^2$. Außerdem gilt $F_1 \leq F_k \leq F_2$. Zeigen Sie

$$7 \sin\alpha \cos\alpha \ \leq \pi \ \leq 7 \tan\alpha.$$

Lösung Zunächst einige Abkürzungen zur besseren Übersicht:

$$R := |MA|, r := |MD|, a := |AC|, b := |BF|, d_1 := |HC|, d_2 := |GC|, \alpha := \frac{1}{7} \cdot 180°.$$

Das 7-Eck liefert 7 gleichschenklige Dreiecke, die jeweils kongruent zu MAC sind. Der Innenwinkel an M ist daher $\frac{1}{7}\cdot 360°$. Die Mittelsenkrechte ME ist in MAC auch Winkelhalbierende, daher gilt $\alpha = \frac{1}{7}\cdot 180°$. Das Dreieck MAD liefert

$$\tan\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{2r},$$

und

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{R}{r} = \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

(Das brauchen wir später.)

Weil $ACHM$ ein Drachen ist, gilt $MA \perp HC$ und $d_1 = 2\cdot|HK|$. Die Winkel in HKA sind 90° und

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot 180° = \frac{450°}{7}$$

also ist der dritte Winkel

$$180° - \frac{450°}{7} - 90° = \alpha$$

und damit

$$\cos\alpha = \frac{\frac{d_1}{2}}{a} = \frac{d_1}{2a}.$$

Der Peripheriewinkelsatz über $\overline{AC}$ liefert, dass der Winkel bei G im Dreieck GDC genau $\frac{\alpha}{2}$ ist. Daher gelten

$$\sin\tfrac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{d_2} = \frac{a}{2d_2}$$

und

$$\tan\tfrac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{a}{2h}.$$

Der Flächeninhalt des inneren 7-Ecks beträgt

$$F_1 = 7\cdot\frac{ar}{2} = 7\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2\tan\alpha} = \frac{7a^2}{4\tan\alpha}.$$

Maßstäbliche Vergrößerung bezüglich der Dreiecke MAC und MBF liefert

$$\frac{a}{b} = \frac{r}{R}$$

also berechnet sich der Flächeninhalt des äußeren 7-Ecks wie folgt:

$$F_2 = 7\cdot\frac{bR}{2} = 7\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{2\sin\alpha} = 7\cdot\frac{\frac{Ra}{r}}{2}\cdot\frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{7}{4}\cdot\frac{R}{r}\frac{a^2}{\sin\alpha} = \frac{7}{4}\cdot\frac{R}{r}\frac{a^2}{\sin\alpha} = \frac{7}{4}\cdot\frac{a^2}{\cos\alpha\sin\alpha}.$$

Die Fläche des Kreises ist $F_K = \pi R^2$. Damit gilt

$$F_1 \le F_K \le F_2.$$

Wir setzen die Formeln ein und erhalten

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{7a^2}{4\tan\alpha} \leq \pi \leq \frac{1}{R^2} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{a^2}{\cos\alpha \sin\alpha}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{4\sin^2\alpha}{a^2} \cdot \frac{7a^2}{4\tan\alpha} \leq \pi \leq \frac{4\sin^2\alpha}{a^2} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{a^2}{\cos\alpha \sin\alpha}$$

und daraus dann

$$7\sin\alpha\cos\alpha \leq \pi \leq 7\tan\alpha.$$

□

*Hinweis zu den *-Aufgaben: dies sind zusätzliche Teilaufgaben. Für eine sinnvolle Bearbeitung dieser Aufgabe müssen mindestens 3 Teilaufgaben sinnvoll bearbeitet werden.*

Hinweis: Eingereichte Hausaufgaben können nur dann als 'sinnvoll bearbeitet' bewertet werden, wenn sie mithilfe des bis zu diesem Zeitpunkt behandelten Stoff der Vorlesung bearbeitet wurden.

`https://www.math.uni-bielefeld.de/~juhing/2022_SS/EG/tipps.html`

Abgabe: bis zum Montag, den 23. Mai 2022, 12 Uhr