Universität Bielefeld
Dr. Daniel Frohn
Dr. Jason Uhing
Sommersemester 2022

Elementare Geometrie ☺ Übung 07

Aufgabe 19 *(Tutorium, 4 Punkte)* Überprüfe den Eulerschen Polyedersatz an einem Prisma und an einer Pyramide, jeweils mit einem n-Eck als Grundfläche.

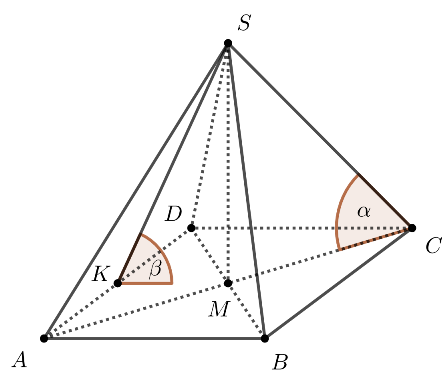
Lösung Ein n-Eck hat n Ecken und n Kanten. Das Prisma hat demnach $e = 2n$ Ecken und $k = 2n + n$ Kanten. Es hat n Seitenflächen also insgesamt $f = n + 2$ Flächen. Wir berechnen

$$e + f - k = 2n + n + 2 - 2n - n = 2.$$

Eine Pyramide hat $e = n + 1$ Ecken, $k = n + n = 2n$ Kanten und $n + 1$ Flächen, daher gilt

$$e + f - k = n + 1 + n + 1 - 2n = 2.$$

Aufgabe 20 *(Globalübung, 5 + 3 + 3 Punkte)* Vorgelegt sei eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge $a := |AB|$ und Höhe $h := |MS|$ wie in folgender Figur.

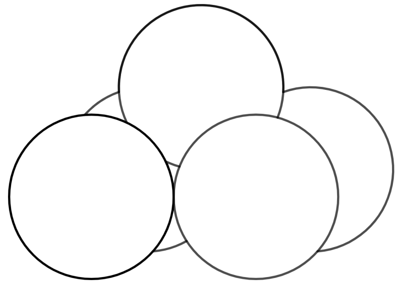


a Berechnen Sie folgenden Größen in Abhängigkeit von a und h:

$$|AM|, \quad |AS|, \quad |BS|, \quad |CS|, \quad |DS|, \quad |KS|, \quad \tan\alpha, \quad \tan\beta.$$

b Für die Pyramide gelte nun $a = |AS|$. Berechnen Sie h, α und β.

c Vorgelegt sei eine „quadratische Kugelpyramide“von identischen Kugeln mit Radius r. Damit ist gemeint, dass die unteren vier Kugeln sich in vier Punkten berühren und „2×2-quadratisch“ ausgelegt sind. Die obere Kugel berührt jede der unteren Kugeln.



Berechnen Sie die Höhe der „Kugelpyramide“.

Lösung a Die Diagonalen im Quadrat schneiden sich im rechten Winkel und halbieren sich. Die Strecke $\overline{MS}$ steht senkrecht auf dem Quadrat. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich daher

$$|AC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{2}a,$$

also $|AM| = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$. Weiter ist $|AS|^2 = |AM|^2 + |MS|^2 = \frac{1}{2}a^2 + h^2$ und damit $|AS| = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + h^2}$. Genauso kann man die anderen Seiten der Dreiecke berechnen und erhält $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$. Da K Mittelpunkt von $\overline{AD}$ und ADS gleichschenklig ist, ist KS Mittelsenkrechte auf AD. Daher gilt

$$(\tfrac{1}{2}a)^2 + |KS|^2 = |AS|^2 \Rightarrow |KS| = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 + h^2 - \tfrac{1}{4}a^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + h^2}.$$

Für die Winkel gilt

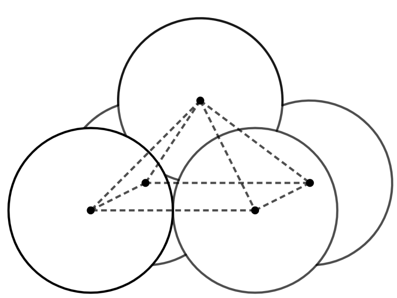
$$\tan\alpha = \frac{|MS|}{|CM|} = \frac{h}{\frac{1}{2}\sqrt{2}a} = \frac{2h}{a\sqrt{2}}, \quad \tan\beta = \frac{h}{\frac{1}{2}a} = \frac{2h}{a}.$$

Lösung b Aus obigen Rechnungen erhalten wir $a^2 = \frac{1}{2}a^2 + h^2$. Also

$$h = \sqrt{\tfrac{1}{2}}a = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \tan\alpha = 1, \quad \tan\beta = \sqrt{2}.$$

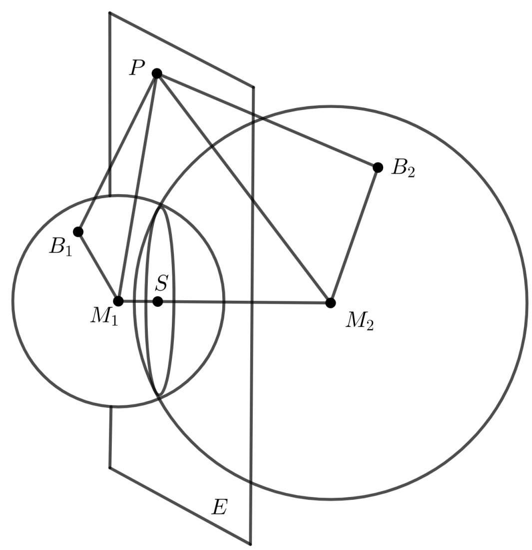
Daraus ergibt sich $\alpha = 45°$ und $\beta = 54,73°$.

Lösung c Sei P ein Berührpunkt zweier Kugeln K_1 und K_2 mit Mittelpunkten M_1 und M_2. Dann gibt es je eine Tangentialebene T_1 und T_2 durch P an K_1 und K_2, die identisch sein müssen, also $T_1 = T_2$. Die Radien der Kugeln stehen senkrecht auf den Tangentialebenen, also liegt M auf der Strecke $\overline{K_1K_2}$ und halbiert diese. Daher ergibt sich folgende quadratische gerade Pyramide mit Seitenlänge $2r$.

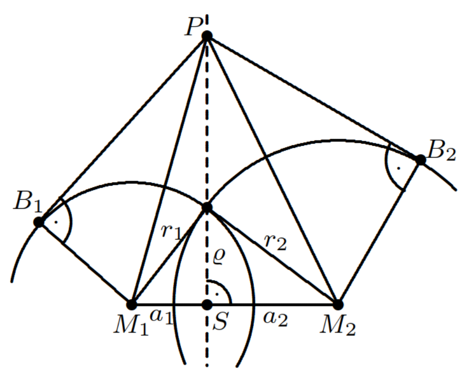


Ebenso ist die Seitenlänge der Dreiecke gleich $2r$. Nach Teil **b** ist die Höhe der Pyramide also $\frac{2r}{\sqrt{2}}$. Die Höhe der Kugelpyramide ist daher $2r + \frac{2r}{\sqrt{2}} = r(2+\sqrt{2})$.

Aufgabe 21 *(Globalübung, 6 Punkte)* Zwei Kugelflächen mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und den Radien r_1, r_2 schneiden sich in einem Kreis. Es seien P ein Punkt der Schnittkreisebene E außerhalb der Kugeln sowie B_1, B_2 die Berührpunkte zweier Tangenten von P aus an die Kugeln. Weiter sei S der Schnittpunkt von E und $\overline{M_1M_2}$.



In der folgenden Figur sei $a_1 := |M_1S|, a_2 := |M_2S|$ und ρ der Radius des Schnittkreises S.



Zeigen Sie, dass $|PB_1|^2 = |PB_2|^2$ gilt, indem Sie eine gültige Gleichungskette

$$|PB_1|^2 = \cdots = |PB_2|^2$$

hinschreiben, in der folgende Terme je genau einmal vorkommen:

$$|PS|^2 + a_1^2 - r_1^2, \quad |PS|^2 + a_2^2 - r_2^2, \quad |PM_1|^2 - r_1^2, \quad |PM_2|^2 - r_2^2, \quad |PS|^2 - \rho^2.$$

Begründen Sie die Gültigkeit jeder Gleichung.

Lösung

Es gilt:

$$|PB_1|^2 = |PM_1|^2 - r_1^2 = |PS|^2 + a_1^2 - r_1^2 = |PS|^2 - \rho^2.$$

Erste Gleichung: Satz über den Tangentialkegel in der Vorlesung auf Folie 127
Zweite und dritte Gleichung: Pythagoras.

Bezüglich der anderen Kugel gilt:

$$|PB_2|^2 = |PM_2|^2 - r_2^2 = |PS|^2 + a_2^2 - r_2^2 = |PS|^2 - \rho^2.$$

Erste Gleichung: Satz über den Tangentialkegel in der Vorlesung auf Folie 127
Zweite und dritte Gleichung: Pythagoras.

Insbesondere daher $|PB_1|^2 = |PB_2|^2$ und somit $|PB_1| = |PB_2|$. $\square$