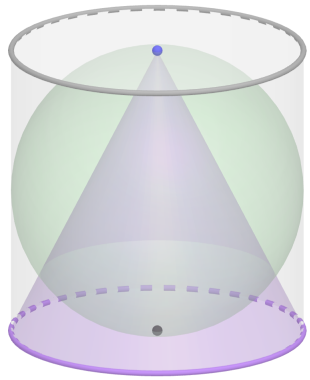
Universität Bielefeld
Dr. Daniel Frohn,
Dr. Jason Uhing

Sommersemester 2022

Elementare Geometrie ☺ Übung 09

Aufgabe 25 *(Tutorium, 2 + 2 Punkte)* Einem Zylinder sei eine Kugel und ein Kegel wie in folgender Figur einbeschrieben.



Bestimmen Sie die Verhältnisse der Volumina

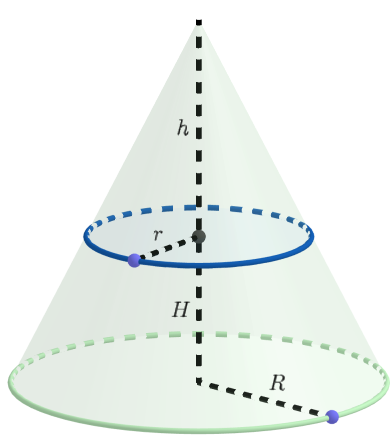
$$V_{Kegel} : V_{Kugel} : V_{Zylinder}.$$

Lösung Es sei r der Radius des Kreises, also auch der Radius der Kugel. Die Höhe des Kegels ist dann $2r$. Dann ist

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3}\pi r^3, \quad V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V_{Zylinder} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3.$$

Daher ist das Verhältnis $\frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 2$ also $1 : 2 : 3$.

Aufgabe 26 *(Globalübung, 3 + 3 + 2 Punkte)* Vorgelegt sei ein Kegel mit Radius R und Höhe H. Diesem sei ein kleinerer Kegel mit Radius r und Höhe h wie in der folgenden Figur einbeschrieben. Dabei seien die Grundflächen der Kegel parallel.



a Zeigen Sie, dass

$$h^3 \cdot V_{Kegel\,groß} = H^3 \cdot V_{Kegel\,klein}$$

gilt.

b Bestimmen Sie h und r, so dass

$$V_{Kegel\,groß} = 2 \cdot V_{Kegel\,klein}$$

gilt.

c Es seien $R = 4$cm und $H = 15$cm. Wie groß muss h gewählt werden, damit das Volumen des kleinen Kegels 5cm^3 beträgt?

Lösung a Wegen der Parallelität ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$$

aus maßstäblicher Vergrößerung. Also

$$\frac{V_{Kegel\,groß}}{V_{Kegel\,klein}} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{H^2}{h^2}\frac{H}{H} = \frac{H^3}{h^3}.$$

Lösung b Aus der Bedingung an die Volumina ergibt sich

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3}\pi R^2 H = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Also

$$h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2 H.$$

Wir setzen das Verhältnis aus **a** ein und erhalten:

$$h^3 = \frac{1}{2} \cdot H^3 \;\Rightarrow\; h = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot H.$$

Wir stellen das Verhältnis aus **a** nach r um undsetzen ein:

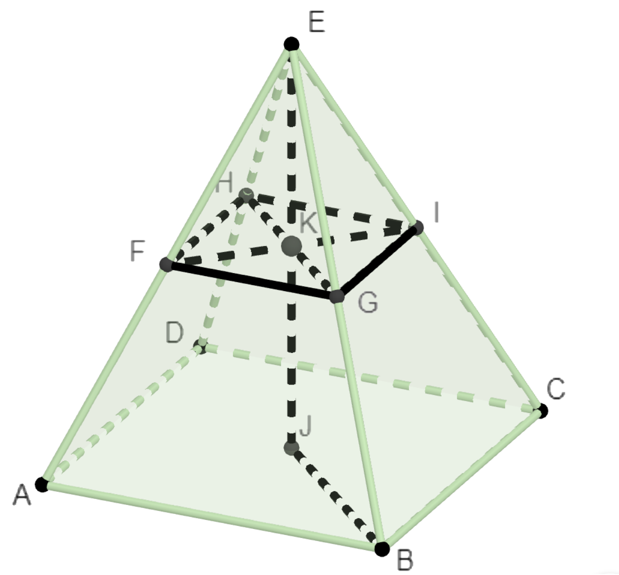
$$r = \frac{hR}{H} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot R.$$

Lösung c Das Volumen des großen Kegels ist also $\frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 15 = 80\pi$. Man setzt nun in **a** ein:

$$80\pi h^3 = 15^3 \cdot 5 \implies h = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 15^3}{80\pi}} \approx 4.06 \quad .$$

Aufgabe 27 *(Globalübung, 6 Punkte)* Eine gerade quadratische Pyramide, deren Grundquadrat die Seitenlänge a hat und deren Höhe h beträgt, soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so in einen Pyramidenstumpf und eine Pyramide zerlegt werden, dass diese beiden Teilkörper dasselbe Volumen haben. Welchen Abstand muss die Schnittebene von der Grunflächenebene haben ?

Lösung Es sei $k := |JK|$ der gesuchte Abstand.



Es seien $a := |AB|$ und $b := |FG|$. Weil FG parallel zu AB ist, gelten wegen maßstäblicher Vergrößerung:

$$\frac{a}{b} = \frac{|BE|}{|GE|} = \frac{|JE|}{|KE|} = \frac{h}{h-k}.$$

Wir setzen $l := h - k = |KE|$. Das Volumen der großen Pyramide ist

$$V_a = \tfrac{1}{3}a^2h.$$

Das Volumen der kleinen Pyramide ist

$$V_b = \tfrac{1}{3}b^2l.$$

Es soll $V_b = \frac{1}{2}V_a$ gelten. Daraus ergibt sich

$$\tfrac{1}{3}b^2l = \tfrac{1}{6}a^2h$$

Also

$$l = \frac{1}{2}\cdot h\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot h\cdot\left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{l^2}.$$

Daher

$$l = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}.$$

Insgesamt also

$$k = h - l = h - \frac{h}{\sqrt[3]{2}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)h.$$

<u>*Hinweis:*</u> *Eingereichte Hausaufgaben können nur dann als 'sinnvoll bearbeitet' bewertet werden, wenn sie mithilfe des bis zu diesem Zeitpunkt behandelten Stoff der Vorlesung bearbeitet wurden.*

`https://www.math.uni-bielefeld.de/~juhing/2022_SS/EG/tipps.html`

Abgabe: bis zum Montag, den 13. Juni 2022, 12 Uhr