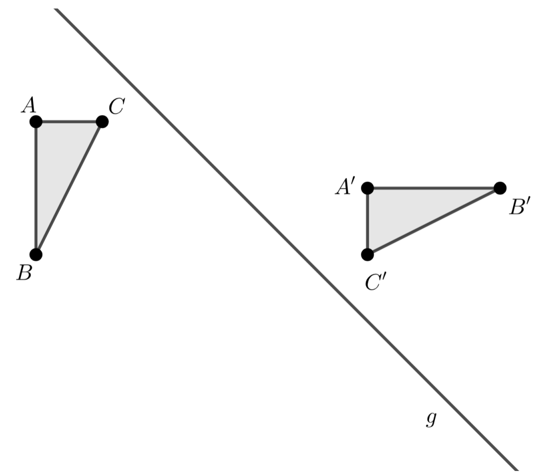
Universität Bielefeld
Dr. Daniel Frohn
Dr. Jason Uhing

Sommersemester 2022

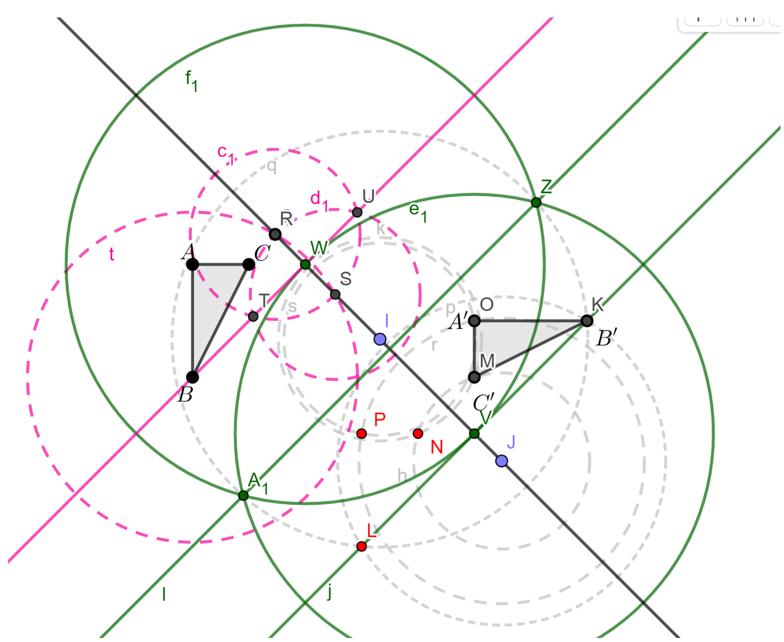
Elementare Geometrie ☺ Übung 11

Aufgabe 31 *(Tutorium, 6 Punkte)* Konstruieren Sie in folgender Figur zwei Geraden e und f, so dass $\sigma_g \circ \sigma_f \circ \sigma_e$ eine Gleitspiegelung ist, die das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'B'C'$ abbildet.



Dabei soll die Gerade e durch den Punkt B verlaufen.

<u>Hinweis:</u> In dieser Aufgabe müssen Sie eine farbige Konstruktion mit GeoGebra erzeugen (verwenden Sie die Vorlage auf der Homepage) und eine Konstruktionsbeschreibung handschriftlich anfertigen. Die Begründungen sind ebenfalls handschriftlich anzufertigen.



Konstruktionsbeschreibung

a) Spiegele das Dreieck $A'B'C'$ an g (es reicht auch aus, nur den Punkt B' zu spiegeln) durch Konstruktion der Lote mittels Kreisen durch I und J. Dies geschieht mit Hilfe der grauen Kreise. Das gespiegelte Dreieck ist PNL.

b) Konstruiere das Lot durch B auf g. Dies geschieht mit Hilfe der rosa gefärbten Kreise t, c_1 und d_1. Der Lotfußpunkt heisse $W \in g$.

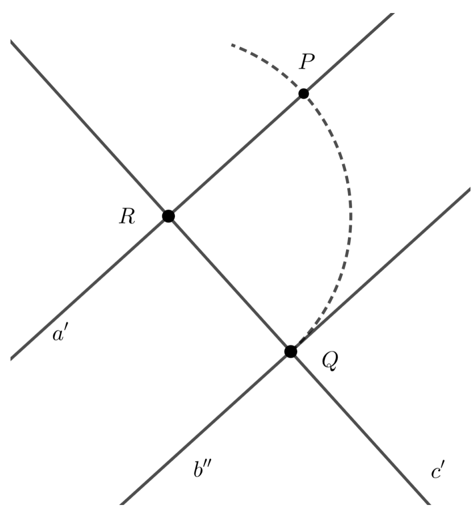
c) $V := B'L \cap g$ ist der Lotfußpunkt von B' auf g.

d) Konstruiere die Mittelsenkrechte ZA_1 zu W und V. Dies geschieht mit Hilfe der grünen Kreise.

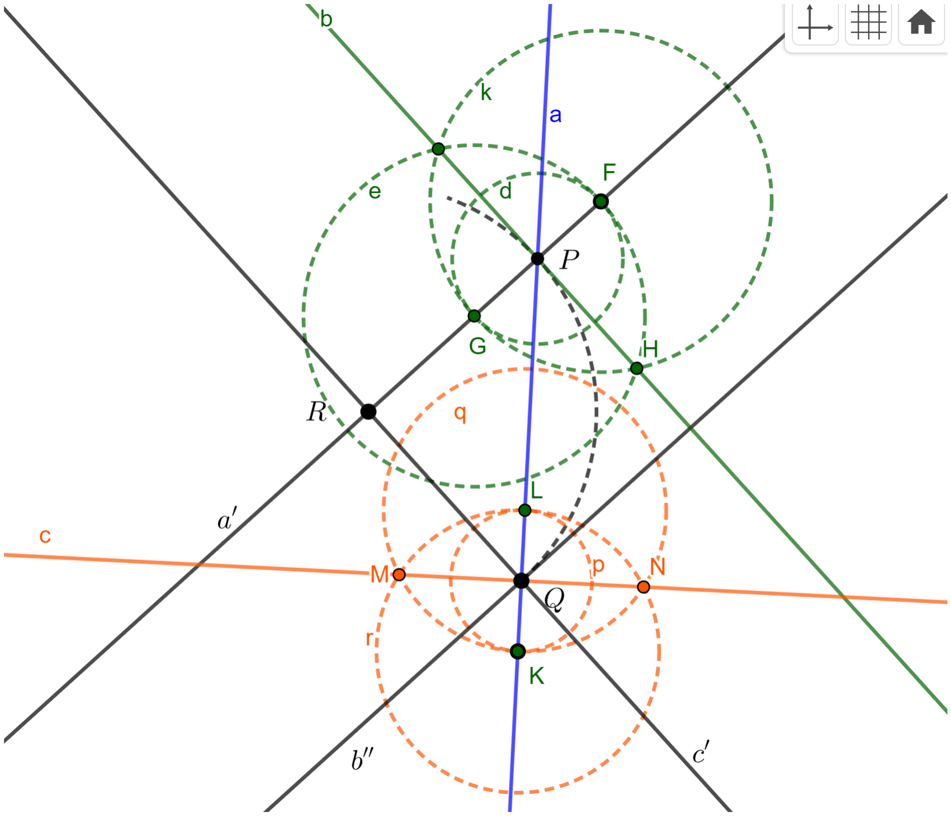
Behauptung: $e = BW$, $f = ZA_1$.
Begründung: Der Abstand d von e und f ist $d = \frac{1}{2}|WV|$. Damit ist $\sigma_f \circ \sigma_e = \tau_{\overrightarrow{WV}}$. Da $B \in e$ und $L \in LV$ ist, gilt $\tau_{\overrightarrow{WV}}(B) = L$. Also auch $\tau_{\overrightarrow{WV}}(ABC) = PLN$. Insgesamt

$$\sigma_g \circ \sigma_f \circ \sigma_e(ABC) = \sigma_g \circ \tau_{\overrightarrow{WV}}(ABC) = \sigma_g(PLN) = A'B'C'.$$

Aufgabe 32 *(Globalübung, 6 Punkte)* In folgender Figur seien $a' \| b''$, $a' \perp c'$, $b'' \perp c'$ und $|RP| = |RQ|$. Wir betrachten die Schubspiegelung $\sigma_{c'} \circ \sigma_{b''} \circ \sigma_{a'}$.



Konstruieren Sie Geraden a, b und c, so dass $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_{c'} \circ \sigma_{b''} \circ \sigma_{a'}$ gilt. Dabei soll $P \in a$ und $a \neq a'$ gelten.



Konstruktionsbeschreibung

a) $a := PQ$

b) Konstruiere Senkrechte b zu a' durch P mit Hilfe der grünen Kreise.

c) Konstruiere Senkrechte c zu a durch Q mit Hilfe der orangenen Kreise.

Behauptung: a, b und c sind die gesuchten Geraden.
Begründung: Die Situation ist diejenige aus dem Beweis zu Satz 3.6 der Vorlesung. Die Bezeichungen hier passen zu denen in der Vorlesung. Da hier $a = PQ$ und nach Vorlesung $b' = PQ$ gelten muss, muss $a = b'$ sein. Wegen $|RP| = |RQ|$ ist $\angle(a', a) = 45°$. Nach Schritt b) ist somit $45° = \angle(a, b)$. Also gilt $\angle(a, b) = \angle(a', b')$ und $P \in b$, somit ist b die laut Beweis Satz 3.6 gesuchte Gerade.
In c) wird $a \perp c$ mit Schnittpunkt Q konstruiert. Wegen $a = b'$ ist c nach Beweis Satz 3.6 die gesuchte Gerade . □

Aufgabe 33 *(Globalübung, 3 + 4 Punkte)*

a Es sei $\delta_{Z,180°}$ eine Punktspiegelung an Z und σ_c eine Spiegelung an einer Geraden c mit $Z \notin c$. Zeigen Sie, dass $\sigma_c \circ \delta_{Z,180°}$ eine Gleitspiegelung ist.

b Zeigen Sie: Die Verkettung einer Drehung mit einer Verschiebung ist eine Drehung.

Lösung a Es seien a und b Geraden mit $a \perp b$ und $Z = a \cap b$, so dass weder a noch b parallel zu c sind. Dann ist $\delta_{Z,180°} = \sigma_b \circ \sigma_a$. Also

$$\sigma_c \circ \delta_{Z,180°} = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a.$$

Das ist nach Satz 3.6 eine Schubspiegelung.

Lösung b Wir betrachten den zweiten Fall von Beweis des Satzes 3.7. Eine Drehung läßt sich durch zwei Geradenspiegelungen an a und b schreiben. Die Verschiebung sei durch die zwei Parallelen d und c gegeben. Nach Folie 182 können wir a und b so drehen, dass keine von beiden parallel zu den Verschiebungsachsen c und d ist. Diese können nach Folie 175 parallel nach d' und c' verschoben werden. Die Spiegelungen an a, b und c' sind nach Satz 3.5 durch eine Spiegelung σ_x gegeben. Insgesamt ergibt sich

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_d = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_{c'} \circ \sigma_{d'} = \sigma_x \circ \sigma_{d'}.$$

Die Verkettung $\sigma_x \circ \sigma_{d'}$ ist nach Satz 3.3 eine Drehung mit Zentrum $Z = x \cap d'$.

<u>Hinweis:</u> Eingereichte Hausaufgaben können nur dann als 'sinnvoll bearbeitet' bewertet werden, wenn sie mithilfe des bis zu diesem Zeitpunkt behandelten Stoff der Vorlesung bearbeitet wurden.

`https://www.math.uni-bielefeld.de/~juhing/2022_SS/EG/tipps.html`

Abgabe: bis zum Montag, den 20. Juni 2022, 12 Uhr