OR | 21.11.22

Montag, 21. November 2022 13:54

Satz 2.10.3

Ein primitives Polyeder P ist entweder ein affiner Unterraum oder ein affiner Halbraum.

Beweis 1 Fall $\partial_r P = \emptyset$ ✓ 2 Fall $\partial_r P \neq \emptyset$

$\boxed{1}$ $x \in \partial_r P$, $x \notin \mathrm{int}_r P \xRightarrow[x \in P]{\text{Bem}} \exists$ nicht singuläre RHE

H mit $x \in H$, $\partial_r P \subset H$

$\boxed{2}$ Beh $\exists!$ RHE H : $P \not\subset H$, $\partial_r P \subset H$

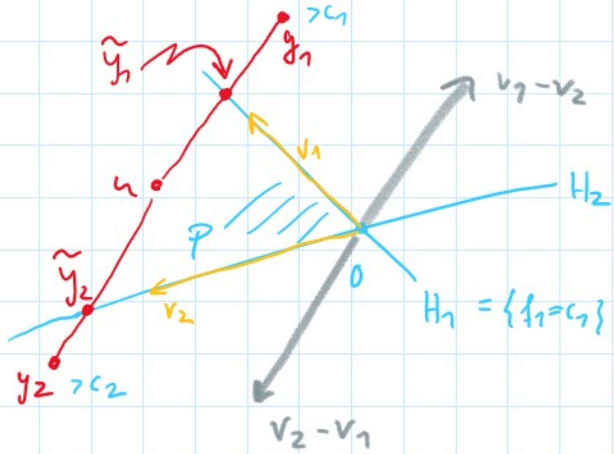
Beweis Aus $\boxed{1}$ wissen wir, es gibt mindestens eine solche RHE. Annahme es gibt zwei davon, also $H_1 := \{ f_1 = c_1 \}$ $H_2 := \{ f_2 = c_2 \}$ und $v_1 \in H_1 \setminus H_2$, $v_2 \in H_2 \setminus H_1$

$\Rightarrow$ $f_1(v_1) = c_1$, $f_2(v_1) < c_2$

$f_1(v_2) < c_1$, $f_2(v_2) = c_2$

$\Rightarrow$ $f_1(v_1 - v_2) = f_1(v_1) - f_1(v_2) > 0$

$f_2(v_1 - v_2) = f_2(v_1) - f_2(v_2) < 0$



$\Rightarrow$ $\forall u \in P \; \exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$:

>0

$\Rightarrow \forall u \in P \ \exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$:

$$f_1(\underbrace{u + \alpha_1(v_1 - v_2)}_{=: y_1}) = \overbrace{f_1(u)}^{\le c_1} + \alpha_1 \overbrace{f_1(v_1 - v_2)}^{>0} > c_1$$

$$f_2(\underbrace{u + \alpha_2(v_2 - v_1)}_{=: y_2}) = \overbrace{f_2(u)}^{\le c_2} + \alpha_2 \overbrace{f_2(v_2 - v_1)}^{>0} > c_2$$

$\Rightarrow u \in P, \ y_1, y_2 \notin P \ : \ u \in [y_1, y_2]$

$\overset{\text{Üb}}{\Longrightarrow} \exists \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in \partial_r P \ : \ \tilde{y}_1 \in [u, y_1], \ \tilde{y}_2 \in [u, y_2]$

$\overset{\text{Bem ⑥}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ liegen in echten Seiten von P und

$u \in [\tilde{y}_1, \tilde{y}_2]$

$\Rightarrow$ u ist Konvexkombi von Punkten echter Seiten von

P $\underset{\substack{u \in P \\ \text{beliebig}}}{\Longrightarrow}$ P ist Konvexkombi von echten Seiten ↯

(zu P primitiv)

$\boxed{3}$ Sei $H := \{f = c\}$ die RHE aus $\boxed{2}$ mit $\partial_r P \subset H$

Sei $\hat{H} := \{f \le c\}$, $M := \operatorname{aff} P$, $P \subset \hat{H}$ (klar)

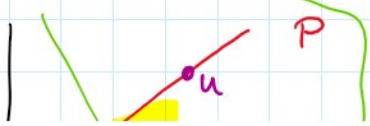
$\boxed{4}$ Beh $P = M \cap \hat{H}$ ($P = \operatorname{aff} R \cap HR$)

Bew „$\subset$" $P \subset \operatorname{aff} P$, $P \subset \hat{H} \Rightarrow P \subset M \cap \hat{H}$

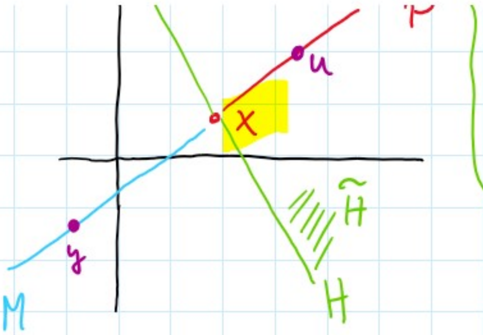
„$\supset$" Annahme : $y \in (M \cap \hat{H}) \setminus P$

$\boxed{4a}$ H nicht singulär $\Rightarrow \exists \boxed{u \in P \setminus H} \Rightarrow u \in P$,

$y \in M \setminus P \Rightarrow \exists x \in [u, y] \subset M \ : \ x \in \partial_r P$



$\overset{\boxed{2}}{\Longrightarrow} x \in M \cap H$



$\boxed{2}$ $\Rightarrow x \in M \cap H$

$\Rightarrow x \in M \cap H$, $u \in M \cap \tilde{H}$

$y \in M \cap \tilde{H}$, $x \neq u$ $(u \notin H)$

$y \neq x$ $(y \notin P)$

$\boxed{4b}$ $M \cap H = \underbrace{M \cap \tilde{H}}_{\subset \{f \leq c\}} \cap \underbrace{H}_{= \{f = c\}} \overset{S.2.2.1}{\Longrightarrow} M \cap H$ Seite von $M \cap \tilde{H}$

Dfn Seite

$\Longrightarrow u, y \in M \cap H \Longrightarrow u \in H$ $\lightning$

Lemma 2.10.2

Jeder affine Unterraum und jeder affine Halbraum ist von der Form

$$u + \text{cone}(Y)$$

mit $u \in \mathbb{R}^n$ *und* $Y = \{y_1, ..., y_m\} \subset \mathbb{R}^n$ *endlich.*

Beweis $\boxed{1}$ $M = \underbrace{x_0}_{=:u} + U \subset \mathbb{R}^n$ sei aff UR und

$\{b_1, \ldots, b_k\}$ Basis von $\Rightarrow U = \text{cone}(\underbrace{\{b_1, \ldots, b_k, -b_1, \ldots, -b_k\}}_{=:Y})$

$\boxed{2}$ $\tilde{H}$ aff HR $\Rightarrow \tilde{H} = x_0 + \mathbb{R}_+ \cdot v + U = x_0 +$

$+ \text{cone}(\{v, b_1, \ldots, b_k, -b_1, \ldots, -b_k\})$ $\square$

Satz 2.10.4

Für jedes Polyeder P gibt es endliche Mengen $X \subset \mathbb{R}^n$ *und* $Y \subset \mathbb{R}^n$*, sodass*

$$P = k(X) + \text{cone}(Y).$$

Bew Für $P = \emptyset$ wähle $X = Y = \emptyset$. Sei $P \neq \emptyset$

$$K\ 2.10.3 \Rightarrow \exists \text{ aff UR, HR } A_1, \dots, A_p : P = k(A_1, \dots, A_p)$$

$$L\ 2.10.2 \Rightarrow A_i = \underline{u_i + \operatorname{cone}(Y_i)} = u_i + \operatorname{cone}(\{ \{ y_1^{(i)}, \dots, y_{m(i)}^{(i)} \})$$

„$\subset$" $x \in P \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i, \quad a_i \in A_i, \quad \sum \lambda_i = 1$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(u_i + \sum_{j=1}^{m(i)} \mu_j^{(i)} y_j^{(i)} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i}_{\in k(\underbrace{\{u_1, \dots, u_p\}}_{=:X})} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{\sum_{j=1}^{m(i)} \overbrace{\mu_j^{(i)}}^{\geq 0} \overbrace{y_j^{(i)}}^{\in Y_i}}_{\in \operatorname{cone}(Y_i)}}_{\in \operatorname{cone}(\underbrace{\bigcup Y_i}_{=:Y})}$$

„$\supset$" $X := \{u_1, \dots, u_p\}, \quad Y := \bigcup_{i=1}^{p} Y_i$

$$x \in k(X) + \operatorname{cone}(Y) \Rightarrow x = u + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \overbrace{y_j}^{\in Y}$$

$$u \in k(\{u_1, \dots, u_p\}), \quad \lambda := \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\lambda_j}_{\geq 0}$$

Falls $\lambda = 0 \Rightarrow x = u \in k(X) \subset P \quad (X \subset P)$

Falls $\lambda > 0$

$\boxed{1}$ $$x = u \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j}{\lambda}}_{=1} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j = \sum_{j=1}^{p} \overbrace{\frac{\lambda_j}{\lambda}}^{=:\mu_j} u + \lambda_j y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \mu_j (u + \lambda y_j), \quad \sum \mu_j = 1$$

$\boxed{2}$ $y_j \in Y_{i_0}, \quad A_{i_0} = u_{i_0} + \operatorname{cone}(Y_{i_0}) \subset P \Rightarrow$

$\boxed{2}$ $y_j \in Y_{i_0}$, $A_{i_0} = u_{i_0} + \text{cone}(Y_{i_0}) \subset P \Longrightarrow$

$\forall \mu \geq 0 : u_{i_0} + \mu y_j \in A_{i_0} \subset P$

Konvexkombi

$\alpha \in (0,1)$:

$\boxed{3}$ $x_\alpha := \alpha \cdot \Big(\underbrace{u_{i_0} + \frac{\lambda}{\alpha} y_j}_{\overset{\boxed{2}}{\in} P} \Big) + (1-\alpha) \underbrace{u}_{\in P} \in P$

$= \alpha u_{i_0} + \lambda y_j + (1-\alpha) u$

$= u_{i_0} + \lambda y_j + (1-\alpha)(u - u_{i_0}) \xrightarrow{\alpha \downarrow 0} u + \lambda y_j$

$\overset{\text{Pabg}}{\Longrightarrow} u + \lambda y_j \in P \overset{\boxed{1}}{\Longrightarrow} x \in P$ $\square$

Lemma 2.10.3

Sei P ein Polyeder. In der Zerlegung

$$P = K + S$$

mit $K = k(\{x_1, ..., x_k\})$ und $S = \text{cone}(\{y_1, ..., y_l\})$ ist S eindeutig bestimmt. Für jedes $x_0 \in P$ gilt

$$S = \{y \in \mathbb{R}^n : x_0 + \lambda y \in P \quad \text{für alle } \lambda \geq 0\}.$$

$S_{x_0} = \{ \ldots\ldots \}$

$\boxed{A}$ Beh $x_0, x \in P \Longrightarrow S_{x_0} = S_x$

Bew „$\subset$" $y \in S_{x_0} \Longrightarrow \forall \lambda \geq 0 : x_0 + \lambda y \in P$

Sei nun $\mu \geq 0$:

$x_\alpha := x_0 + \mu y + (1-\alpha)(x - x_0) \xrightarrow{\alpha \downarrow 0} x + \mu y \in P$

$= \alpha \Big(\underbrace{x_0 + \frac{\mu}{\alpha} y}_{\in P} \Big) + (1-\alpha) x \in P$ Pabg

$\Longrightarrow \forall \mu \geq 0 : x + \mu y \in P \Longrightarrow y \in S_x$

„$\supset$" ✓

„$\supset$" ✓

$\boxed{B}$ Sei $x_0 \in K$. Wir zeigen $S = \mathrm{cone}(\{y_1 \ldots y_e\}) \stackrel{!}{=} S_{x_0}$

„$\subset$" $y \in S \Rightarrow \forall \lambda \geq 0 : \lambda y \in S \Rightarrow \forall \lambda \geq 0 : x_0 + \lambda y$

$\in K + S \stackrel{\text{Vor}}{=} P \Rightarrow y \in S_{x_0}$

„$\supset$" $\boxed{1}$ Sei $y_0 \in S_{x_0} \setminus S$. Also lässt sich $y_0 (\notin S)$

nicht als $\sum_{k=1}^{e} x_k y_k$, $x_k \geq 0$, $y_k \in S$ schreiben

$\boxed{2}$ Def $A := \overbrace{(y_1, \ldots, y_e)}^{\text{Spalten}}$, damit $Ax = \sum_{k=1}^{e} x_k y_k$

also hat $Ax = y_0$, $x \geq 0$ keine Lsg

$\xrightarrow[S272]{MF} \exists u \in \mathbb{R}^n : u^T y_0 > 0$ und $u^T A \leq 0$

$\Rightarrow 0 \geq u^T A = u^T (y_1 \ldots y_e) = (u^T y_1, \ldots, u^T y_e)$

$\Rightarrow \forall j \in \{1 \ldots e\} : u^T y_j \leq 0$

$\boxed{3}$ $\forall x \in P$: $x = \underbrace{\sum \lambda_i x_i}_{\in k(X)} + \underbrace{\sum \mu_j y_j}_{\in \mathrm{cone}(y)}$

$\Rightarrow u^T x = \sum \lambda_i u^T x_i + \sum \mu_j \underbrace{u^T y_j}_{\leq 0 \ \boxed{2}}$

$\leq \sum \lambda_i u^T x_i$

$\leq (\max_{i=1 \ldots k} u^T x_i) \cdot \underbrace{\sum \lambda_i}_{=1} =: \text{const}$

$\boxed{4}$ $y_0 \in S_{x_0} \Rightarrow \forall \lambda \geq 0 : x_0 + \lambda y_0 \in P$

$\lambda \to \infty$

$\boxed{4}$ $y_0 \in S_{x_0} \Rightarrow \forall \lambda \geq 0 : x_0 + \lambda y_0 \in P$

$$\Rightarrow u^T (x_0 + \lambda y_0) = u^T x_0 + \lambda \underbrace{u^T y_0}_{\textcircled{2} > 0} \xrightarrow{\lambda \to \infty} \infty$$

im $\lightning$ $\boxed{3}$

$\boxed{5}$ Also Ann. falsch, also $y_0 \in S$

$\boxed{6}$ Rest (Übung!) $\square$