Donnerstag, 2. Februar 2023 09:26

Beispiel zu NOP

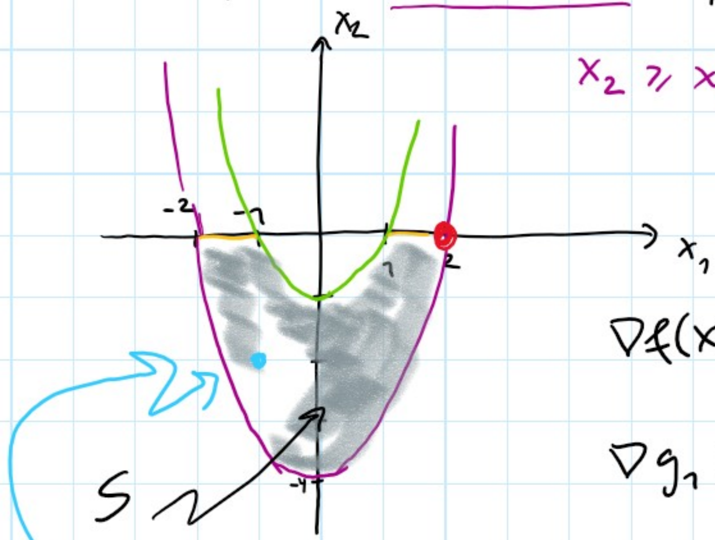
$$f(x_1,x_2) := -(x_1+1)^2 - (x_2+2)^2$$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$S := \bigcap_{i=1}^{3} \{ g_i(x_1,x_2) \le 0 \}, \quad g_1(x_1,x_2) := x_2 \le 0$$

$$g_2(x_1,x_2) := x_1^2 - x_2 - 4 \le 0, \quad g_3(x_1,x_2) := -x_1^2 + x_2 + 1 \le 0$$

$x_2 \geq x_1^2 - 4$ $\qquad$ $x_2 \le x_1^2 - 1$



$$\nabla f(x_1,x_2) = (-2(x_1+1), -2(x_2+2))$$

$$\nabla g_1(x_1,x_2) = (0,1)$$

$$\nabla g_2(x_1,x_2) = (2x_1, -1)$$

$$\nabla g_3(x_1,x_2) = (-2x_1, 1)$$

Auf $\mathring{S}$: $(0,0) = \nabla f(x_1,x_2) \Rightarrow (x_1,x_2) = (-1,-2)$

$$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \to \text{neg. dfn}$$

$\to$ lok. Maximum

Durch "Hinschauen": Minimum bei $(x_1,x_2) = (2,0) \in S$

KKT: $(x_1,x_2) = (2,0)$, $I((2,0)) = \{1,2\}$

$\underline{KKT}$: $(x_1, x_2) = (2,0)$, $I((2,0)) = \{1,2\}$

$\Rightarrow (0,0) = \nabla f(2,0) + \mu_1 \underbrace{(0,1)}_{=\nabla g_1(2,0)} + \mu_2 \underbrace{(4,-1)}_{=\nabla g_2(2,0)}$

$\Rightarrow (0,0) = (-6,-4) + \mu_1(0,1) + \mu_2(4,-1)$

$\Rightarrow 4\mu_2 - 6 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 3/2 \geq 0$

$\Rightarrow 0 = -4 + \mu_1 + 3/2(-1) = \mu_1 (-\frac{11}{2})$

$\Rightarrow \mu_1 = \frac{11}{2} \geq 0$

Habe Minimum an $(2,0)$ ✓

Gradienten $\nabla g_1(2,0)$, $\nabla g_2(2,0)$ l.u.

$\overset{\text{Satz}}{\Rightarrow} \exists \mu_1, \mu_2 \geq 0$

Aber $\nabla f(-1,-2) = (0,0)$, $\mu_i := 0$

$\Rightarrow \nabla f(-1,-2) + \sum_{i=1}^{3} \mu_i \nabla g_i(-1,-2) = (0,0)$

also KKT erfüllt !!

$I((-1,-2)) = \emptyset$!

Weil S nicht konvex ist lässt sich Satz 5.2.3

nicht anwenden.

(Übung: g_i quasi konvex $\Rightarrow$ $\cap \{g_i \leq 0\}$ konvex)