Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing Wintersemester 2023/2024

Ausgewählte Kapitel aus der Mathematik

☺

Übung 05

Aufgabe 16 *(2 + 2 + 0 Punkte)*

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\t\\11\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\-4\\0\end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

b) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix}6\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Stellen Sie $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ dar.

c) Prüfen Sie Ihre Lösungen in a) und b) mit WolframAlpha.

Aufgabe 17 *(4 + 2 Punkte)*

Zeigen Sie die folgenden Aussagen aus Beispiel 51.

a) Es seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$ eine $(m \times n)$-Matrix. Die i-te Spalte von A bestehe aus $\vec{v}_i$. Dann gilt:

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \text{ linear unabhängig } \Leftrightarrow \mathbb{L}_{(A|0)} = \{\vec{0}\}.$$

b) Für $n > m$ in a) sind die Vektoren linear abhängig.

! Weitere Aufgaben auf der nächsten Seite !

Aufgabe 18 *(2 Punkte + (1 + 1) Bonuspunkte)*

Wir betrachten die Menge aller Funktionen (=Abbildungen)

$$\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist Abbildung}\}.$$

Wir definieren eine Addition und eine Skalarmultiplikation auf $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ wie folgt:

„+“) $g, h \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $\quad (g+h)(x) := g(x) + h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

„•“) $g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$: $\quad (\lambda g)(x) := \lambda \cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

1) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.

Es seien

$$\mathcal{C} := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ ist stetig}\}, \quad \mathcal{D} := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$$

die Menge der setigen bzw. differenzierbaren Abbildungen. Wir wissen, dass

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{C} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

gilt.

2) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist.

3) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{C}$ ist.

Hinweis Für 2) und 3) können Sie ihr Wissen über stetige und differenzierbare Funktionen aus der Vorlesung Funktionen verwenden.

Aufgabe 19 *(4 Punkte)* Präsenzaufgabe 05.