

Ausgewählte Kapitel aus der Mathematik



Übung 06

Aufgabe 19 (4 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis des von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

erzeugten Vektorraums. Begründen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe geeigneter Sätze der Vorlesung.

Aufgabe 20 (2 + 2 Punkte)

Eine affine Ebene in \mathbb{R}^3 läßt sich als Koordinatenform (wie in a), als Parameterform (wie in b) oder als Normalenform (wie in c) schreiben.

- $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $E_{a,b,c,d} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}$.
 - $\vec{p}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ mit \vec{v}, \vec{w} linear unabhängig : $E_{\vec{p}, \vec{v}, \vec{w}} = \{\vec{p} + \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$
 - $\vec{q}, \vec{n} \in \mathbb{R}^3$: $E_{\vec{q}, \vec{n}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n}, \vec{x} - \vec{q} \rangle = 0\}$
- Es sei die Koordinatenform in a) vorgelegt. Finden Sie die Parameterform in b), indem Sie die Vektoren $\vec{p}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ durch $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ aus a) ausdrücken.
 - Es sei die Parameterform in b) vorgelegt. Finden Sie die Normalenform in c), indem Sie die Vektoren $\vec{q}, \vec{n} \in \mathbb{R}^3$ durch $\vec{p}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ aus b) ausdrücken.

Aufgabe 21 (2 + 2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 2x_3, x_2 + x_1)$$

linear ist.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$f \text{ injektiv} \iff \text{Kern } f = \{0\}.$$

Aufgabe 22 (4 Punkte) Präsenzaufgabe 06.