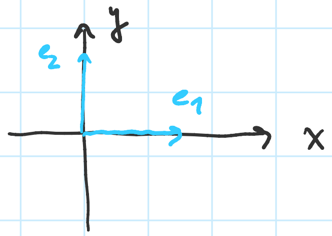
UEB Bonus

Mittwoch, 3. Januar 2024 08:52

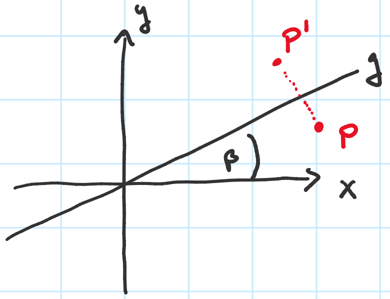
$\boxed{B1}$ a) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$. Nach VL lassen sich lin. Abbildungen durch Matrizen beschreiben: $f(x) = Ax$, $g(x) = Bx$. Dann $(g \circ f)(x) = g(Ax) = B \cdot (Ax) = (BA)x$

b) Nach VL ist eine lin. Abbildung durch Bilder auf Basis bestimmt:



Definiere $s(e_1) := e_1$ und $s(e_2) := -e_2$. Damit also $s(e_1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$, $s(e_2) = 0 \cdot e_1 + (-1)\, e_2$, daher ist $s((x,y)) = S \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c)



Wir spiegeln P an g mit Spiegelpunkt P', indem wir P um den Winkel $-\beta$ drehen, dann an x-Achse spiegeln und dann um β zurückdrehen. Die Drehmatrix eines Winkel α lautet $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Es sei $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Also bilden wir so ab

$D_{-\beta}$ D_β

... Also ... wir so ...

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{D_{-\beta}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{D_\beta} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto D_{-\beta}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto S\,D_{-\beta}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto D_\beta\, S\, D_{-\beta}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Matrizenprodukt berechnen:

$$D_\beta\, S\, D_{-\beta} = D_\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overbrace{\cos(-\beta)}^{=\cos\beta} & -\overbrace{\sin(-\beta)}^{=\sin\beta} \\ \underbrace{\sin(-\beta)}_{=-\sin\beta} & \underbrace{\cos(-\beta)}_{=\cos\beta} \end{pmatrix}$$

aus EG bekannt

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

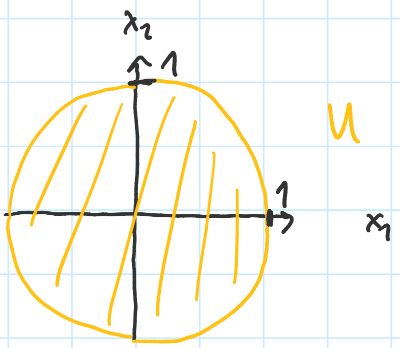
$$= \begin{pmatrix} (\cos\beta)^2 - (\sin\beta)^2 & 2\cos\beta\sin\beta \\ 2\cos\beta\sin\beta & (\sin\beta)^2 - (\cos\beta)^2 \end{pmatrix}$$

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

Additionstheorem

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2\sin^2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & 1 - 2\sin^2\beta \end{pmatrix}$$

$\boxed{B2}$ $\boxed{a}$



U ist kein UVR, denn

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ aber

für $\lambda := 2$ ist $2e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$.

$\boxed{b}$ $W := \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - 2x_3 = 0,\ x_2 = 0 \}$. Definiere

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 2x_3, x_2)$

damit gilt: $\ker f = W$. Schreibt man f mit

einer Matrix $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$f(1,0,0) = (1,0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$

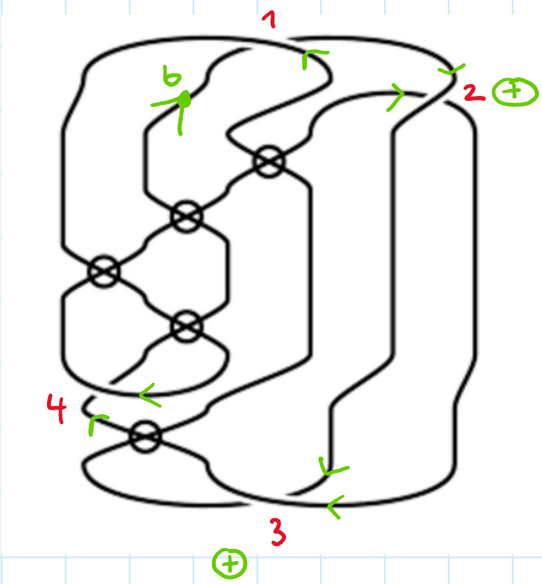
$f(0,1,0) = (0,1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$

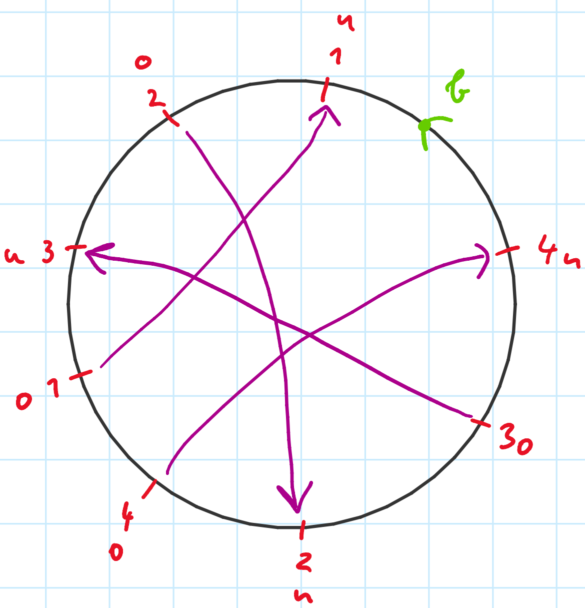
$f(0,0,1) = (-2,0) = -2 e_1 + 0 \cdot e_2$

so sieht man: $\operatorname{rang} f = 2$. Nach Dimensionsformel gilt daher: $\dim \ker f = 3 - \operatorname{rang} f$

$= 3 - 2 = 1$.

$\boxed{B3}$





$\operatorname{odd}(D) = \{2, 3\}$ $\quad w_{odd}(D) = 2$